This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

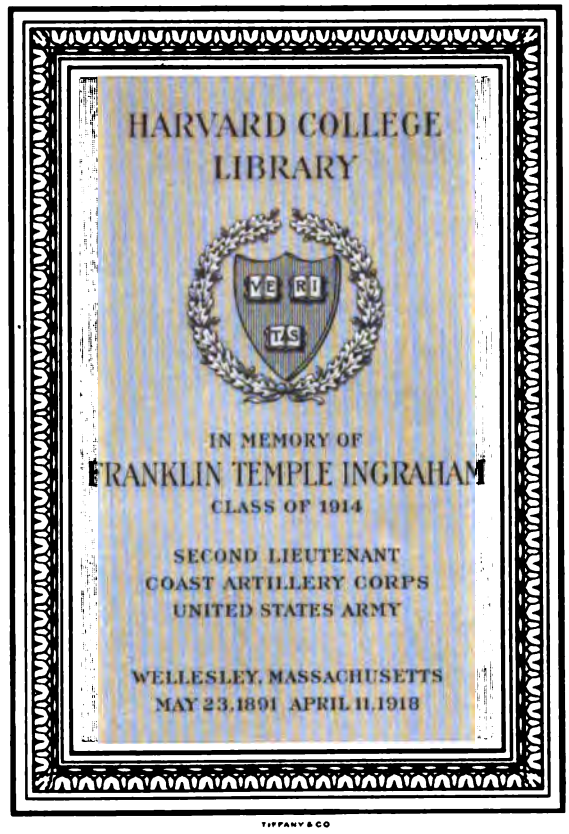
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

LSoc2542.8


HARVARD COLLEGE
LIBRARY
VE RI
TAS
IN MEMORY OF
FRANKLIN TEMPLE INGRAHAM
CLASS OF 1914
SECOND LIEUTENANT
COAST ARTILLERY CORPS
UNITED STATES ARMY
WELLESLEY, MASSACHUSETTS
MAY 23, 1891 APRIL 11, 1918
TIFFANY & CO

C160

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

31

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XXXI. - ANNO XXXI.

(1877-1878)

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N.° 3.

1878

LSoc2542.8

HARVARD COLLEGE LIBRARY
INGRAHAM FUND
Oct 16, 1928

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE I^a DEL 16 DECEMBRE 1877

PRESIDENZA DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULLA NECESSITA' DI STABILIRE I CONFINI CHE SEPARANO LA CHIMICA DALLE SCIENZE AFFINI

NOTA

DEL DOTT. DOMENICO COLAPIETRO

Una interpretazione poco esatta dei moderni progressi della Chimica ne rende talvolta i cultori sospetti di materialismo. A dissipare un equivoco così spiacevole spero che giovino le riflessioni seguenti. Guidata fino alla prima metà di questo secolo dal Principio generale del Dualismo e colla scorta de' Pesi proporzionali od equivalenti aveva dovuto la Chimica elevare una barriera insormontabile fra lo studio di quei corpi, che si ritraggono dal regno minerale, e quelli che provengono dai regni organici. E la ragione ne è evidente. Come si possono assoggettare alla legge dualistica gl' innumerevoli composti derivati dai corpi organizzati, quando questi non ci presentano pressochè mai l'aggruppamento binario de' loro elementi? Come si può determinare l'equivalente dei numerosi composti polimeri? È innegabile però che questa barriera, quantunque giustificata e resa necessaria dai Principj dominanti nella scienza, era di grande nocumento allo svolgersi e progredire della medesima. Sostituito al dualistico il Principio unitario, ed alla dottrina degli equivalenti quella delle

Molecole ed Atomi e dei loro pesi relativi; tosto si vide la generalità di siffatti principj; e come questi egualmente bene abbracciassero i fatti, che ci presentano tanto i corpi minerali quanto quelli che provengono dai regni organici. La divisione fra la Chimica inorganica e la Chimica organica scientificamente era cessata, quantunque nelle scuole possa tuttora sussistere prattica-mente per comodità di chi insegna o meglio di chi apprende. La scomparsa di questa divisione ha dato luogo a molti equivoci, che sono causa di speranze presuntuose in alcuni, di diffidenza in altri per le nuove dottrine chimiche. Infatti fino a poco tempo lontano dal presente, lo studio della chimica organica si versava sopra corpi organizzati e troviamo tutte le opere di chimica organica occuparsi del sangue, della bile, del latte, delle ossa ecc. Quindi il concetto giustissimo, che questi corpi non obbediscono esattamente alle sole leggi chimiche, che non si possono riprodurre nel laboratorio del chimico, ma sono invece il solo prodotto della natura organica sia vegetale, sia animale. Tolta la divisione della chimica in minerale ed organica, è facile di cadere nell'equivoco, di credere cioè che quei corpi, che prima si distinguevano dai minerali per la loro natura organizzata e per la origine ed impossibile riproduzione artificiale, potessero rientrare nell'assoluto dominio della chimica, ed essere a piacimento riprodotti nel laboratorio. Questa idea, che poteva forse allettare le folli speranze del materialista, pose in giusta diffidenza chiunque abborrisca tale errore: quindi l'opposizione alle nuove dottrine chimiche, che si ritenevano come causa di questa confusione o tali da condurre a conseguenze del tutto contrarie alla verità. A dissipare siffatti dubbi, a chiarire un equivoco così funesto, io credo che nulla valga di meglio quanto il definire con esattezza i confini della Chimica; ed il chiarire precisamente il limite che separa la chimica dalle scienze affini.

Come scienza naturale la Chimica trovasi collocata presso le varie scienze, che formano nel loro complesso la storia naturale e quel che più monta per il mio assunto a lato della Fisiologia. Per potere ben distinguere la Chimica da tutte queste scienze, che l'attorniano non solo, ma le forniscono eziandio i materiali per il suo studio, fa di mestieri innanzi tutto precisare con esattezza il concetto di questa scienza ed accuratamente stabilirne lo scopo. La chimica parte dalla Filosofia naturale ha per oggetto lo studio della interna natura dei corpi naturali, cui, senza punto occuparsi della loro provenienza, risolve nei più semplici principj de' quali risultano, ne indaga la costituzione molecolare, ne ricerca le reciproche azioni, in quanto che queste

valgono ad alterarne la natura, studia le loro proprietà, e determina le leggi che governano non solo le azioni, ma puranche la costituzione dei corpi. La determinazione di queste leggi ha limitato il campo della chimica osservazione; e tutti quei fatti che a tali leggi non obbediscono, escono fuori del campo della chimica per entrare in quello di altre scienze. Ciò premesso agevol cosa è il distinguere la Chimica dalle scienze componenti la storia naturale. Imperocchè tanto la Mineralogia e la Geologia, quanto la Botanica e la Zoologia si occupano principalmente dello studio storico degli esseri oggetti rispettivi del loro studio senza che vadano a ricercare l'intiera costituzione di que' corpi: che anzi occorrendo queste cognizioni si volgono alla Chimica per averle, e questa d'altra parte senza investigarne la provenienza compie su que' medesimi corpi i suoi studj, ne determina la costituzione e le singole proprietà. Quanto alla fisica, quantunque i contatti di questa colla Chimica siano così intimi, che fino ad un certo periodo di tempo non esisteva alcuna differenza fra queste due scienze, pure sono oggi così bene distinte da non potere arrecare alcuna difficoltà a limitarne il campo relativo de' loro studj. Ed invero tutto lo studio della Fisica si aggira sopra i fenomeni presentati dai corpi, fenomeni peraltro che non alterano punto la loro natura, mentre che la Chimica studia i fenomeni che cambiano la natura de' corpi medesimi. La distinzione che presenta qualche difficoltà e che più monta di bene stabilire è fra la Chimica e la Fisiologia. Parrebbe strano a prima vista; ma invece è una conseguenza de' fatti annunciati fin da principio. La confusione fra la chimica ed alcuni studj fisiologici deriva dall'avere fatto oggetto di studio per la Chimica organica una quantità di corpi che sono sotto il solo domino della Fisiologia: intendo dire dei veri composti organici, che meglio si dovrebbero chiamare organizzati. Ad evitare siffatta confusione e delineare con precisione il limite di queste due scienze io penso che sia necessario di bene stabilire la differenza che passa fra composto chimico e composto organico propriamente detto. Il composto chimico è il risultato della unione di due o più corpi semplici insieme congiunti in forza di chimica attrazione, in conformità di leggi chimiche generali bene stabilite ed in rapporto della valenza dei vari principj costituenti il composto. Inoltre il composto chimico ha una esistenza subordinata alle sole leggi fisico-chimiche, modificandosi e distruggendosi puranche sotto l'influenza di queste; quindi è che la più parte di questi composti può cambiare stato senza subire alterazione di sorta e se solidi possono prendere una forma cristallina ben determinata. E mentre tutti questi

composti possono dal chimico essere separati mediante l'analisi ne' loro elementi, la più parte di essi può con gli elementi essere dal chimico ricostituita, e in ispecie quelli che provengono dal regno minerale.

Il meno complicato fra i composti organizzati è la cellula o come ritengono i più recenti, fra i quali il Beaunis, il corpuscolo. Or bene questa cellula o corpuscolo risulta formato da numerose sostanze, le quali sono fra loro congiunte non per la forza fisico-chimica, ma sotto l' influenza di una forza che, quantunque ignota nella sua essenza, pure chiaramente si rivela esistere nel regno organico sia vegetale sia animale; forza le cui leggi sono a noi del tutto ignote. Che la formazione dei nominati corpuscoli non si effettui per forza fisico-chimica ce lo dimostra il fatto, che le sostanze costituenti il nominato corpuscolo non sono congiunte a seconda delle leggi universali e ben determinate delle chimiche combinazioni, quali la legge delle proporzioni determinate e quella delle proporzioni multiple; di più niun rapporto si ha in queste unioni colla chimica valenza. Si aggiunga che il corpuscolo così formato non è capace mai di subire quelle metamorfosi chimiche, che in tutti i chimici composti si osservano, come il cambiamento di stato, e le sostituzioni di elementi equivalenti senza alterazione delle molecole in cui avvengano, nè fa d'uopo il dire che i corpuscoli non possono mai assumere la forma cristallina. E quel che più importa questi corpuscoli originati in seno alla organazione vegetante o vivente, non appena vengano sottratti alla vegetazione o alla vita, perdono la loro esistenza: ed i principj de' quali erano costituiti rientrano sotto il dominio delle comuni leggi fisico-chimiche alle quali erano in certo modo sottratte, allorchè facevano parte dei corpuscoli stessi. Questi corpuscoli, i quali variamente modificati, e congiunti fra loro formano le varie strutture degli esseri organati, costituiscono a mio credere il vero limite fra la chimica e la fisiologia. Fino al corpuscolo si può estendere il campo della chimica osservazione; oltre a quello entra il dominio della fisiologica. Può bensì il Chimico distruggere i nominati corpuscoli e prendere ad esame i principj che li costituivano: ma ciò non vuol dire che appartenga al chimico lo studio dei corpuscoli organizzati; e molto meno può dirsi che siffatti corpuscoli siano composti chimici soggetti alle comuni leggi, che governano la composizione dei corpi. Spero di meglio spiegare questo concetto con una considerazione desunta dalla Geologia. Questa scienza si occupa dello studio della formazione della terra e delle parti che la costituiscono. Per raggiungere questo scopo il geologo si rivolge al chimico per conoscere la costituzione di una roccia per modo di esempio. Il

chimico analizza una porzione di questa roccia; e riconosce quali ne siano i principj costituenti ed anche in quale proporzione si trovino.

Può dirsi che il chimico abbia invaso il campo della Geologia analizzando parte di questa roccia? No certamente: poichè lo studio della roccia relativo alla più o meno probabile sua formazione, alla configurazione ai rapporti ecc. di questa roccia con altra è stata fatta dal Geologo. Il Chimico non ha fatto altro che distruggerne una parte, per vedere quali ne fossero i principj costitutivi; e la distruzione del Chimico è stata completa ed irrimediabile, perchè quantunque possa ricostituire con gli elementi i composti che facevano parte della roccia, non potrà certamente ricostruire nella sua integrità la roccia stessa. E questo perchè non è in mano del chimico nè il tempo nè quella intensità di forza, in virtù della quale si sono formate le roccie. Lo stesso e con maggior ragione deve ripetersi per rapporto ai corpi organizzati. Il chimico può studiare questi corpi unicamente distruggendoli per ricercarne i principj costitutivi: distrutti che li abbia, non può più sperare di ricostruirli, perchè manca a lui la forza, in virtù della quale essi si sono formati.

Quando venga il campo della Chimica circoscritto in questi giusti suoi limiti, non veggo con quale sostegno e per quali ragioni possa tutto giorno strombazzarsi, che la chimica moderna apra la via al materialismo, e che i grandi progressi di questa scienza vadano direttamente a svelare quei misteri, che sono e saranno sempre inaccessibili alla mente dell'uomo.

ESERCIZIO GEOMETRICO

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1° Problema. — Assegnare le formole generali per le quali si abbiano quelle curve, la rettificazione delle quali dipenda dall'arco di una linea data.

Sia *ds* l'elemento di un arco di data curva, e perciò determinata funzione di una variabile : si domanda quella curva M_0 M N.... la rettificazione della quale sia ridotta a dipendere dall'arco dato *ds*, così che se quest'arco fosse l'elemento di un arco circolare od ellittico, si domanderebbero quelle curve la rettificazione delle quali dipenderebbe da quella della circonferenza, e dell'arco ellittico.

Ciò posto si dicano x, y le coordinate del punto M principio dell'arco *ds* : la inclinazione di quest' arco elementare nel punto M rispetto l'asse delle ascisse deve essere eguale a quella che in questo punto ha la tangente alla curva dimandata, che rappresentata per φ, avremo dal triangolo differenziale Mmr :

$$dx = ds \cos \varphi \ , \ dy = ds \operatorname{sen} \varphi \qquad (1)$$

e quindi

$$x = \int ds \cos \varphi + c \ ; \ y = \int ds \operatorname{sen} \varphi + c' \qquad (2)$$

ove c, c' sono costanti arbitrarie.

Qui è necessario notare, che *ds* è una funzione determinata di una certa variabile; ma della φ si sa soltanto che deve essere espressa in funzione della stessa variabile, affinchè possa darsi luogo alla integrazione. Però questa dipendenza è arbitraria, e così quante saranno queste leggi di dipendenza che possono immaginarsi tante saranno le differenti linee che adempiranno alla condizione voluta nel problema. Espresse dunque tanto *ds* quanto φ in funzione di una medesima variabile, avrà luogo la integrazione a partire dalla condizione che le coordinate abbiano un determinato valore, che potrà essere anche nullo quando la variabile principale abbia un valore

determinato. E quindi se tra le (2) verrà eliminata la variabile comune φ si avrà l'equazione della curva tra le coordinate x, y.

Se qui porremo che *ds* sia stata ridotta a dipendere da una sola variabile angolare θ in modo che abbiasi

$$\varphi = n\,\theta$$

avremo le seguenti formole

$$x = \int ds \cos n\,\theta + c \;,\; y = \int ds \operatorname{sen} n\,\theta + c' \,. \qquad (3)$$

Ponendo poi

$$\operatorname{tang} \varphi = f(\theta)$$

ne dedurremo

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + f(\theta)^2}} \;,\; \operatorname{sen} \varphi = \frac{f(\theta)}{\sqrt{1 + f(\theta)^2}}$$

che sostituite nelle (3) avremo:

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + f(\theta)^2}} + c \;,\; y = \int \frac{ds\, f(\theta)}{\sqrt{1 + f(\theta)^2}} + c' \qquad (4)$$

le quali saranno anche più generali delle antecedenti.

2° PROBLEMA. — Assegnare l'equazione di quelle curve la rettificazione delle quali sia ridotta a dipendere dall'arco

$$ds = \frac{dz}{z}\sqrt{z^2 - a^2}.$$

Sostituendo nelle formole generali (1) avremo

$$dx = \frac{dz \cos \varphi}{z}\sqrt{z^2 - a^2} \;,\; dy = \frac{dz \operatorname{sen} \varphi}{z}\sqrt{z^2 - a^2}. \qquad (5)$$

Per rendere razionali queste due formole osserveremo che dovendo essere $z > a$, potremo porre:

$$z = \frac{a}{\cos \varphi}$$

della quale presi i logaritmi neperiani e fatta quindi la differenziazione si avrà:

$$\frac{dz}{z} = d\,\theta \operatorname{tang} \theta$$

onde le (5) si muteranno in

$$dx = \frac{ad\,\theta\,\text{sen}^2\,\theta\cos\varphi}{\cos^2\theta}\;;\qquad dy = \frac{ad\,\theta\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\theta}$$

ed ancora

$$dx = \frac{ad\,\theta\cos\varphi}{\cos^2\theta} - ad\,\theta\cos\varphi\;;\;dy = \frac{ad\,\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\theta} - ad\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \qquad (6)$$

le quali non possono integrarsi se non quando venga posta una relazione tra i due angoli φ, θ; supponiamo pertanto

$$\varphi = n\,\theta$$

ed allora le (6) si muteranno in

$$dx = \frac{ad\,\theta\cos n\,\theta}{\cos^2\theta} - ad\,\theta\cos n\,\theta\;;\;dy = \frac{ad\,\theta\,\text{sen}\,n\,\theta}{\cos^2\theta} - ad\,\theta\,\text{sen}\,n\,\theta \qquad (7)$$

Qui avvertiremo una volta per sempre che n, θ sono due indeterminate, la prima ci dà il genere della linea, perchè varia da linea a linea mutando con essa la legge di sua generazione, e la seconda θ muta da punto a punto restando in una medesima linea. Per integrare i primi termini delle (7) basta ricordare essere

$$\cos n\,\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-2}\theta\,\text{sen}^2\,\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4}\theta\,\text{sen}^4\,\theta - \ldots\ldots$$

$$\text{sen}\,n\,\theta = \cos^{n-1}\theta\,\text{sen}\,\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3}\theta\,\text{sen}^3\,\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos^{n-5}\theta\,\text{sen}^5\,\theta - \ldots.$$

Considerando la prima delle equazioni da integrarsi avremo

$$\frac{\cos n\,\theta}{\cos^2\theta} = \cos^{n-2}\theta - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-4}\theta\,\text{sen}^2\,\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-6}\theta\,\text{sen}^4\,\theta - \ldots.$$

dalla quale riconosciamo facilmente che dovremo integrare termini della forma seguente

$$B\int d\,\theta\cos^{n-2r}\theta\,\text{sen}^{2(r-1)}\theta$$

di cui come è noto dai principii del calcolo integrale può sempre assegnarsi la espressione finita. Alla medesima conclusione si giunge per l'altra quantità :

$$\frac{\text{sen } n\ \theta}{\cos^2 \theta}$$

La integrazione di queste funzioni può eseguirsi con maggiore eleganza e semplicità quando si ponga :

$$A = \frac{\text{sen } (n-1)\ \theta}{\cos \theta}$$

la quale differenziata ci dà

$$d\ A = \frac{d\ \theta}{\cos^2 \theta}\Big(n \cos \theta \cos (n-1)\ \theta - \cos n\ \theta\Big).$$

Per la formola

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\Big(\cos (a+b) + \cos (a-b)\Big),$$

ponendo

$$a = (n-1)\ \theta \quad , \quad b = \theta$$

si ha

$$a + b = n\ \theta \quad , \quad a - b = (n-1)\ \theta$$

e quindi

$$\cos \theta \cos (n-1)\ \theta = \tfrac{1}{2}\Big(\cos n\ \theta + \cos (n-2)\ \theta\Big)$$

che sostituito dà

$$d\ A = \frac{d\ \theta}{2 \cos^2 \theta}\Big[(n-2) \cos n\ \theta + n \cos (n-2)\ \theta\Big]$$

e da questa integrando

$$\int \frac{d\ \theta \cos n\ \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{n-2} A - \frac{n}{n-2} \int \frac{d\ \theta \cos (n-2)\ \theta}{\cos^2 \theta}$$

ovvero

$$\int \frac{d\ \theta \cos n\ \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{n-2} \frac{\text{sen } (n-1)\ \theta}{\cos \theta} - \frac{n}{n-2} \int \frac{d\ \theta \cos (n-2)\ \theta}{\cos^2 \theta}$$

che per noi è una formola di riduzione per mezzo della quale la quantità costituente il primo membro è ridotta a dipendere da un'altra pariforme dove la n è diminuita di due unità: con analogo ragionamento questa si ridurrebbe a dipendere da un'altra pariforme nella quale n sarebbe diminuita di quattro unità e così di seguito: onde lorchè n è pari, l'ultimo integrale sarà

$$\int \frac{d\,\theta}{\cos^2\theta} = \text{tang}\,\theta$$

e quando n è dispari avremo in fine

$$\int \frac{d\,\theta}{\cos\theta} = \log.\ \text{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Per integrare il primo termine del valore della y porremo:

$$B = \frac{\cos(n-1)\,\theta}{\cos\theta}$$

pel quale, dopo avere operato come nel caso antecedente, troveremo

$$\int \frac{d\,\theta\,\text{sen}\,n\,\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{2}{n-2}\,\frac{\cos(n-1)\,\theta}{\cos\theta} - \frac{n}{n-2}\int \frac{d\,\theta\,\text{sen}\,(n-2)\,\theta}{\cos^2\theta}$$

Sostituiti questi valori nelle (7) sottoposte alla integrazione ne risultano le coordinate

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\,a}{n-2}\,\frac{\text{sen}\,(n-1)\,\theta}{\cos\theta} - \frac{a}{n}\,\text{sen}\,n\,\theta - \frac{a\,n}{n-2}\int \frac{d\,\theta\cos(n-2)\,\theta}{\cos^2\theta} + c \\ y &= -\frac{2\,a}{n-2}\,\frac{\cos(n-1)\,\theta}{\cos\theta} + \frac{a}{n}\cos n\,\theta - \frac{a\,n}{n-2}\int \frac{d\,\theta\cos(n-2)\,\theta}{\cos^2\theta} + c' \end{aligned} \qquad (8)$$

Dalla semplice forma che hanno i valori di queste coordinate risulta che desse sono infinite per $n = 2$ onde per trattare questo caso è d'uopo ritornare alle (7), le quali si mutano nelle seguenti

$$dx = \frac{a\,d\,\theta\cos 2\,\theta}{\cos^2\theta} - a\,d\,\theta\cos 2\,\theta$$

$$dy = \frac{a\,d\,\theta\,\text{sen}\,2\,\theta}{\cos^2\theta} - a\,d\,\theta\,\text{sen}\,2\,\theta$$

che ponno mettersi sotto la forma

$$dx = 2\,ad\,\theta - \frac{ad\,\theta}{\cos^2\theta} - ad\,\theta\cos 2\,\theta$$

$$dy = \frac{2\,ad\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} - ad\,\theta\,\mathrm{sen}\,2\,\theta\ ,$$

ed integrando è

$$x = 2\,a\,\theta - a\,\mathrm{tang}\,\theta - \frac{a}{2}\mathrm{sen}\,2\,\theta + c$$

$$y = -2\,a\log.\cos\theta + \frac{a}{2}\cos 2\,\theta + c'\ .$$

Siccome la eliminazione di θ conduce necessariamente ad una equazione trascendente, così se ne conclude che per la relazione

$$\varphi = 2\,\theta$$

non vi è curva algebrica la cui rettificazione possa dipendere dall'arco dato Per $n = 1$ le (8) diventano

$$x = -a\,\mathrm{sen}\,\theta + a\int\frac{d\,\theta}{\cos\theta} + c$$

$$y = \frac{2\,a}{\cos\theta} + a\cos\theta - a\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} + c'$$

ed eseguita la integrazione si ha

$$x = -a\,\mathrm{sen}\,\theta + a\log.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

$$y = \frac{2\,a}{\cos\theta} + a\cos\theta - \frac{a}{\cos\theta} + c'$$

Quando si vogliano i valori delle costanti coll'ammettere che a $\theta = o$ debbano corrispondere $x = o$, $y = o$ troveremo

$$c = o\ ,\ c' = -2\,a$$

e perciò la linea è data in questa ipotesi dalla coesistenza delle due

$$x = a\log.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$y = a\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}\ .$$

In queste curve, qualunque sia n, merita di essere avvertita la semplicità della forma sotto la quale si presenta il raggio di loro curvatura.

La formola generale per questo caso è

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

onde riprese le formole generali (7) messe prima sotto la forma seguente

$$dx = ad\,\theta\,\text{tang}^2\,\theta\cos n\,\theta\ ;\quad dy = ad\,\theta\,\text{tang}^2\,\theta\,\text{sen}\,n\,\theta$$

differenziando ne deduciamo

$$d^2x = ad\,\theta^2\,\text{tang}\,\theta\left(2\frac{\cos n\,\theta}{\cos^2\theta} - n\,\text{sen}\,n\,\theta\,\text{tang}\,\theta\right)$$

$$d^2y = ad\,d\,\theta^2\,\text{tang}\,\theta\left(2\frac{\text{sen}\,n\,\theta}{\cos^2\theta} + n\cos n\,\theta\,\text{tang}\,\theta\right)$$

e quindi

$$dx\,d^2y = a^2\,d\,\theta^3\,\text{tang}^3\,\theta\left(2\frac{\text{sen}\,n\,\theta\cos n\,\theta}{\cos^2\theta} + n\cos^2 n\,\theta\,\text{tang}\,\theta\right)$$

$$dy\,d^2x = a^2\,d\,\theta^3\,\text{tang}^3\,\theta\left(2\frac{\text{sen}\,n\,\theta\cos n\,\theta}{\cos^2\theta} - n\,\text{sen}^2 n\,\theta\,\text{tang}\,\theta\right)$$

onde

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = n\,a^2\,d\,\theta^3\,\text{tang}^4\,\theta\ .$$

Essendo poi

$$dx^2 + dy^2 = a^2\,d\,\theta^2\,\text{tang}^4\,\theta$$

otterremo sostituendo

$$\rho = \frac{a}{n}\text{tang}^2\,\theta \qquad (9)$$

Dalla quale risulta che tutte le linee di cui è questione sono assintotiche perchè per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha $\rho = \infty$, onde i loro rami tendono ad essere rettilinei.

3.° Problema. Si domandano quelle curve la rettificazione delle quali dipende dall'arco

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{a}} \sqrt{a+z}\,.$$

Avremo immediatamente

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{a}} \sqrt{a+z} \cos\varphi \;,\; dy = \frac{dz}{\sqrt{a}} \sqrt{a+z} \operatorname{sen}\varphi$$

ove posto

$$z = a \operatorname{tang}^2 \theta$$

se ne deduce

$$dx = \frac{2\,ad\,\theta \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}{\cos^4\theta} \;,\quad dy = \frac{2\,ad\,\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^4\theta}$$

e fatto

$$\varphi = n\,\theta$$

risulta

$$dx = \frac{2\,ad\,\theta \operatorname{sen}\theta \cos n\,\theta}{\cos^4\theta} \;,\quad dy = \frac{2\,ad\,\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (10)$$

Ora essendo

$$\operatorname{sen} b \cos a = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right)$$

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a = \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

fatto

$$b = \theta \;,\; a = n\,\theta$$

se ne ricava

$$\operatorname{sen}\theta \cos n\,\theta = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(n+1)\,\theta - \operatorname{sen}(n-1)\,\theta\right)$$
$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\,\theta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(n-1)\,\theta - \cos(n+1)\,\theta\right)$$

e così le (10) diverranno

$$dx = ad\,\theta \left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\theta - \operatorname{sen}(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta}\right) \qquad (11)$$

$$dy = ad\,\theta \left(\frac{\cos(n-1)\,\theta - \cos(n+1)\,\theta}{\cos^4\theta}\right)$$

che danno

$$x = C + a\int \frac{d\,\theta \operatorname{sen}(n+1)\,\theta}{\cos^4\theta} - a\int \frac{d\,\theta \operatorname{sen}(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (12)$$

$$y = C' + a\int\frac{d\,\theta\cos(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} - a\int\frac{d\,\theta\cos(n+1)\,\theta}{\cos^4\theta}\,.$$

Per effettuare l'integrazione vediamo di assegnare le respettive formule di riduzione, al quale fine porremo

$$A = \frac{\cos(n-2)\,\theta}{\cos^3\theta}$$

che differenziato ci dà

$$d\,A = \frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}\Big(-(n-2)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,(n-2)\,\theta + 3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(n-2)\,\theta\Big)$$

la quale può mettersi sotto la seguente forma

$$d\,A = \frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}\Big(-(n+1)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,(n-2)\,\theta + 3\,\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta\Big)$$

avvertendo essere

$$n - 2 = n + 1 - 3$$

E perchè

$$\cos\theta\,\mathrm{sen}\,(n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta + \mathrm{sen}\,(n-3)\,\theta)$$

così avremo ancora

$$d\,A = \frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}\left(-\left(\frac{n-5}{2}\right)\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta - \left(\frac{n+1}{2}\right)\mathrm{sen}\,(n-3)\,\theta\right)$$

ed integrando è

$$A = -\left(\frac{n-5}{2}\right)\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-1)}{\cos^4\theta} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-3)\,\theta}{\cos^4\theta}$$

da cui

$$\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} = -\frac{2\,A}{n-5} - \frac{n+1}{n-5}\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-3)\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (13)$$

Si ponga quindi

$$B = \frac{\mathrm{sen}\,(n-2)\,\theta}{\cos^3\theta}$$

che differenziata e ridotta come l'antecedente ci dà

$$d\,B = \frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\cos\theta\cos(n-2)\,\theta - 3\cos(n-1)\,\theta\right)$$

e per essere

$$\cos\theta\cos(n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(n-1)\,\theta + \cos(n-3)\,\theta\Big)$$

avremo

$$d\,B = \frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}\left(\left(\frac{n-5}{2}\right)\cos(n-1)\,\theta + \left(\frac{n+1}{2}\right)\cos(n-3)\,\theta\right)$$

e quindi integrando si ricava

$$\int\frac{d\,\theta\cos(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} = \frac{d\,B}{n-5} - \frac{n+1}{n-5}\int\frac{d\,\theta\cos(n-3)\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (14)$$

Se nelle (12), (14) si muta la n in n+2 e le A, B in A_1, B_1 avremo

$$\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n+1)\theta}{\cos^4\theta} = -\frac{2\,A_1}{n-3} - \frac{n+3}{n-3}\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (13')$$

$$\int\frac{d\,\theta\cos(n+1)\,\theta}{\cos^4\theta} = \frac{2\,B_1}{n-3} - \frac{n+3}{n-3}\int\frac{d\,\theta\cos(n-1)\,\theta}{\cos^4\theta} \qquad (14')$$

le quali sostituite nelle (12) ci danno le coordinate di qualunque punto della linea dimandata in funzione della indeterminata *n* onde è indefinito il numero delle linee piane la rettificazione delle quali dipende dalla funzione data per l'arco.

È da notarsi che dalle espressioni (13), (14) risulta potersi sempre compiere la integrazione perchè per *n* pari si otterrà in fine

$$\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^4\theta}\;\int,\;\frac{d\,\theta}{\cos^3\theta}\;;$$

la prima delle quali dà

$$\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^4\theta} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta},$$

e la seconda si riduce a dipendere da

$$\int\frac{d\,\theta}{\cos\theta} = \log.\ \mathrm{tang}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right):$$

per *n* dispari poi si ottengono le due espressioni

$$\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^4\theta},\;\int\frac{d\,\theta}{\cos^4\theta}$$

che si sanno integrare.

Il raggio di curvatura può dedursi con molta facilità perchè dalle (10) differenziando risulta

$$d^2 x = \frac{2\, ad\, \theta^2}{\cos^5 \theta} \left[(1 + 3 \operatorname{sen}^2 \theta) \cos n\theta - n \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} n \theta \right]$$

$$d^2 y = \frac{2\, ad\, \theta^2}{\cos^5 \theta} \left[(1 + 3 \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} n\, \theta + n \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos n\, \theta \right]$$

e quindi

$$dx\, d^2y - dy\, d^2 x = \frac{8\, a^2\, nd\, \theta^3 \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^8 \theta} .$$

Essendo poi

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\, a^3\, n\, d\, \theta^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta}$$

ne risulta

$$\rho = \frac{a}{n} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^4 \theta} \qquad (15)$$

ed anche queste curve, come le precedenti , sono assintotiche perchè per $\theta = \frac{\pi}{2}$ hanno $\rho = \infty$

4.° Problema. — Assegnare quelle linee la cui rettificazione dipende da quella della cicloide ordinaria.

Rappresentato per r il raggio del circolo generatore abbiamo

$$ds = 4\, r\, \frac{d\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}$$

ove σ è l'angolo che il raggio diretto al punto generatore forma con una perpendicolare alla base della cicloide. Abbiamo come sopra

$$dx = ds \cos \varphi = 4\, r\, .\, \frac{d\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \varphi$$

$$dy = ds \operatorname{sen} \varphi = 4\, r\, .\, \frac{d\sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \varphi \qquad (16)$$

Si ponga per comodo $\frac{\sigma}{2} = \theta$, e secondo il solito $\varphi = n\, \theta$, avremo

$$dx = 4\, r\, d\, \theta \operatorname{sen} \theta \cos n\, \theta \; ; \; dy = 4\, r\, d\, \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} n\, \theta \qquad (17)$$

e per le note formole trigonometriche è

$$dx = 2\, r\, d\, \theta \left(\operatorname{sen} (n + 1) - \operatorname{sen} (n-1)\, \theta \right)$$

$$dy = 2\, r\, d\, \theta \left(\cos (n-1)\, \theta - \cos (n+1)\, \theta \right)$$

dalle quali integrando

$$x = 2r\left(\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right) + c$$

$$y = 2r\left(\frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{n+1}\right) + c'$$

Se qui poniamo che a $\theta = o$, corrisponda $y = o$, $x = o$ troveremo

$$c = -\frac{4r}{n^2-1}, \quad c' = o$$

onde

$$x = 2r\left(\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{2}{n^2-1}\right)$$

$$y = 2r\left(\frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{n+1}\right)$$

le quali ponno mettersi ancora sotto le forme seguenti

$$x = \frac{4r}{n^2-1}\left(n \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta + \cos\theta \cos n\theta - 1\right)$$

$$y = \frac{4r}{n^2-1}\left(\cos\theta \operatorname{sen} n\theta - n \operatorname{sen}\theta \cos n\theta\right); \qquad (18)$$

e per le note relazioni trigonometriche facilmente avremo

$$x = \frac{2r}{n^2-1}\left[(n+1)\cos(n-1)\theta - (n-1)\cos(n+1)\theta - 1\right]$$

$$y = \frac{2r}{n^2-1}\left[(n+1)\operatorname{sen}(n-1)\theta - (n-1)\operatorname{sen}(n+1)\theta\right]$$

e se pongasi

$$x' = x + \frac{2r}{n^2-1}$$

sarà pure

$$x = \frac{2r}{n^2-1}\left[(n+1)\cos(n-1)\theta - (n-1)\cos(n+1)\theta\right]$$

$$y = \frac{2r}{n^2-1}\left[(n+1)\operatorname{sen}(n-1)\theta - (n-1)\operatorname{sen}(n+1)\theta\right]$$

non tenendo conto dell'accento nell'ascissa.

Queste equazioni rappresentano tante epicicloidi, ed ipocicloidi.

Se da queste equazioni, per ogni valore di n, venissero eliminate le funzioni circolari otterremo tutte quelle curve tanto algebriche, quanto trascendenti la rettificazione delle quali dipende da archi cicloidali. Se nelle (17) poniamo $n = 1$ esse si presentano sotto forme indeterminate, ma per noti principii si trova,

$$x = 2\,r \operatorname{sen}^2 \theta \;,\; y = 2\,r\,(\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\theta)$$

e perchè

$$2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

così abbiamo finalmente

$$x = r\,(1 - \cos\sigma) \;,\; y = r\,(\sigma - \operatorname{sen}\sigma)$$

che rappresenta una cicloide il cui circolo generatore è uguale a quello della proposta, e dove le coordinate sono permutate, notando di avere fatto $2\,\theta = \sigma$.

Il raggio di curvatura si ottiene differenziando prima le (17) le quali danno

$$d^2 x = 4\,r\,d\,\theta^2\,(\cos\theta \cos n\,\theta - n \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\,\theta)$$

$$d^2 y = 4\,r\,d\,\theta^2\,(\cos\theta \operatorname{sen} n\,\theta + n \operatorname{sen}\theta \cos n\,\theta)$$

e formando quindi la differenza

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2^4\,r^2\,d\,\theta^3\,n \operatorname{sen}^3\theta$$

e

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = 2^6\,r^3\,d\,\theta^3 \operatorname{sen}^3\theta$$

si ottiene

$$\rho = \frac{r}{n} \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{n} \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2} \;:$$

onde il raggio di curvatura di tali curve è un multiplo o summultiplo di quello della cicloide data secondo che n è fratto od intiero.

Quando si voglia conoscere la quadratura degli spazi limitati da queste linee prenderemo

$$d\,A = y\,dx$$

nella quale sostituiti i respettivi valori per le y, dx, otterremo in funzione della sola variabile θ le seguenti espressioni

$$d\,A = 4\,r^2\,d\,\theta \left[\frac{2\,n}{n^2 - 1} \operatorname{sen}(n+1)\,\theta \operatorname{sen}(n-1)\,\theta - \frac{\operatorname{sen}^2(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}^2(n-1)\,\theta}{n-1} \right]$$

ma

$$\text{sen}\,(n+1)\,\theta\,\text{sen}\,(n-1)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos 2\,\theta - \cos 2\,n\,\theta)$$

dunque

$$dA = 4\,r^2\left[\frac{n}{n^2-1}\,(d\,\theta\cos 2\,\theta - d\,\theta\cos 2\,n\,\theta)\right.$$

$$\left.-\frac{d\,\theta\,\text{sen}^2\,(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{d\,\theta\,\text{sen}^2\,(n-1)\,\theta}{n-1}\right]$$

ed integrando in modo che a $\theta = o$ corrisponda $A = o$ otteniamo

$$A = 4\,r^2\left[\frac{n}{n^2-1}\left(\frac{\text{sen}\,2\,\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\,n\,\theta}{2\,n}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{n+1}\left(-\frac{\cos\,(n+1)\,\theta\,\text{sen}\,(n+1)\,\theta}{n+2} + \frac{(n+1)\,\theta}{n+2}\right)$$

$$\left.-\frac{1}{n-1}\left(-\frac{\cos\,(n-1)\,\theta\,\text{sen}\,(n-1)\,\theta}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

la quale prende differenti valori insieme con la *n*.

5.° Problema. Assegnare l'equazione generale di tutte quelle linee la rettificazione delle quali si riduce a dipendere da una funzione che rappresenti l'ordinata di una iperbole conica.

Rappresentati per *a*, *b* i semi-assi della iperbole, detta θ l'ampiezza, l'ordinata è data da

$$b\,\text{tang}\,\theta$$

e perciò avremo

$$ds = b\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

onde le formole generali seguenti

$$dx = b\,.\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}\,\cos\varphi\;;\;\; dy = b\,.\,\frac{d\,\theta}{\cos^2\theta}\,\text{sen}\,\varphi$$

e quindi

$$dx = b\,d\,\theta\,.\,\frac{\cos n\,\theta}{\cos^2\theta}\;;\;\; dy = b\,d\,\theta\,.\,\frac{\text{sen}\,n\,\theta}{\cos^2\theta} \qquad (18)$$

Integrando avremo per le formole di riduzione stabilite al § (2)

$$x = c + \frac{2\,b}{n-1}\,\frac{\text{sen}\,(n-1)\,\theta}{\cos\theta} - \frac{b\,n}{n-2}\int\frac{d\,\theta\cos\,(n-2)\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$y = c' - \frac{2\,b}{n-2}\,\frac{\cos(n-1)\,\theta}{\cos\theta} - \frac{b\,n}{n-2}\int\frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}\,(n-2)\,\theta}{\cos^2\theta} \qquad (19)$$

che per $n = 1$ diventano

$$x = c + b\int\frac{d\,\theta}{\cos\theta} = c + b\log.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = c' + \frac{2\,b}{\cos\theta} - b\int\frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} = c' + \frac{b}{\cos\theta}\,.$$

Supposto che a $\theta = o$ corrispondano $x = o$, $y = o$ avremo $c = o$, $c' = -b$, e perciò l'equazioni della linea corrispondenti ad $n = 1$ sono

$$x = b\log.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),\quad y = \frac{b\,(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\,.$$

Se poniamo $n = 2$ le (19) non essendo compiuta la integrazione si presentano sotto forma impossibile, e perciò riprese le (18) avremo

$$dx = \frac{b\,d\,\theta\cos 2\,\theta}{\cos^2\theta}\;;\quad dy = \frac{b\,d\,\theta\,\mathrm{sen}\,2\,\theta}{\cos^2\theta}$$

le quali diventano

$$dx = b\,d\,\theta\left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\;;\quad dy = \frac{2\,b\,d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

che integrate così che a $\theta = o$ corrispondano $x = o$, $y = o$ si ha

$$x = b\,(2\,\theta - \mathrm{tang}\,\theta)\;,\quad y = b\log.\frac{1}{\cos^2\theta}\,.$$

Per eliminare θ, dalla seconda si ha

$$\cos^2\theta = e^{-\frac{y}{b}}$$

e quindi

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - e^{-\frac{y}{b}}$$

onde

$$\mathrm{tang}^2\,\theta = e^{\frac{y}{b} - 1}$$

da cui

$$\theta = \mathrm{Arc.\,tang}\left(= \sqrt{e^{\frac{y}{b}} - 1}\right)$$

che sostituito nel secondo membro dell'ascissa si ha

$$x = b\left[2 \operatorname{arc\,tang}\left(-\sqrt{e^{\frac{y}{b}}-1}\right)-\sqrt{e^{\frac{y}{b}}-1}\right].$$

Pel raggio di curvatura, facendo uso della solita formola, considereremo le quantità

$$d^2 x = \frac{b\, d\,\theta^2}{\cos^3\theta}\left(2 \operatorname{sen}\theta \cos n\theta - n \operatorname{sen} n\theta \cos\theta\right)$$

$$d^2 y = \frac{b\, d\,\theta^2}{\cos^3\theta}\left(2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta + n \cos n\theta \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$dx\, d^2y - dy\, d^2 x = \frac{2\, n\, b^2\, d\,\theta^3}{\cos^4\theta}$$

$$\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b^3\, d\,\theta^3}{\cos^6\theta}$$

e quindi

$$\rho = \frac{b}{2\,n}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

che per $\theta = \frac{\pi}{2}$ diventa infinito.

6.° Problema. — Assegnare quelle curve la rettificazione delle quali dipende dall'ordinata di una ellisse.

Chiamando θ l'ampiezza corrispondente ad un punto qualunque della ellisse, la sua ordinata è

$$b \cos\theta$$

onde per la dimandata curva dovrà essere

$$ds = -\, b\, d\theta \operatorname{sen}\theta$$

e quindi

$$dx = -\, b\, d\,\theta \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \;;\; dy = -\, b\, d\,\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

ed ancora in una sola variabile

$$dx = -\, b\, d\,\theta \operatorname{sen}\theta \cos n\theta \;;\; dy = -\, b\, d\,\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta$$

e per le solite formole di trasformazione sarà

$$dx = \frac{b}{2}\left(d\,\theta \operatorname{sen}(n-1)\,\theta - d\,\theta \operatorname{sen}(n+1)\,\theta\right)$$

$$dy = \frac{b}{2}\left(d\,\theta \cos(n+1)\,\theta - d\,\theta \cos(n-1)\,\theta\right)$$

le quali integrate danno

$$x = c + \frac{b}{2}\left(\frac{\cos(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\theta}{n-1}\right)$$

$$y = c' + \frac{b}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\theta}{n-1}\right)$$

e per avere i valori delle costanti si supponga che a $\theta = o$ corrispondano $x = o$, $y = o$, così avremo

$$x - \frac{b}{n^2-1} = \frac{b}{2}\left(\frac{\cos(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\theta}{n-1}\right)$$

$$y = \frac{b}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\theta}{n-1}\right) \qquad (20)$$

Per dedurre da queste espressioni qualche caso particolare poniamo la prima di queste equazioni sotto la forma seguente

$$x = \frac{b}{2}\left[\frac{\cos(n+1)\,\theta}{n+1} - \left(\frac{(n+1)\cos(n-1)\,\theta - 2}{n^2-1}\right)\right].$$

Si faccia $n = 1$, avremo

$$x = \frac{b}{2}\left(\frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{o}{o}\right), \quad y = \frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} - \frac{o}{o}$$

alle quali applicate le solite regole troviamo

$$x = -\frac{b}{4}\left(1 - \cos 2\theta\right), \quad y = -\frac{b}{4}\left(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta\right)$$

che rappresentano una cicloide ordinaria generata da una circonferenza di raggio $\frac{b}{4}$

Le formole generali (20), come abbiamo notato altrove, appartengono ad epicicloidi ed ipocicloidi.

Problema. Si domandano quelle curve la cui rettificazione dipende da una funzione che rappresenti l'ordinata di una parabola.

Se poniamo l'equazione

$$u^n = az^m$$

avremo evidentemente

$$ds = \frac{m}{n} a^{\frac{1}{n}} z^{\frac{m-n}{n}} dz$$

e così le due

$$dz = \frac{m}{n} a^{\frac{1}{n}} z^{\frac{m-n}{n}} dz \cos \varphi \ , \ dy = \frac{m}{n} a^{\frac{1}{m}} z^{\frac{m-n}{n}} dz \operatorname{sen} \varphi$$

e ponendo qui

$$z^{\frac{m}{n}} = \operatorname{tang} \theta \ , \ \text{sarà} \ \frac{m}{n} z^{\frac{m-n}{n}} dz = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

onde

$$dx = a^{\frac{1}{n}} \frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^2 \theta} \ , \ dy = a^{\frac{1}{n}} \frac{d\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^2 \theta}$$

la integrazione delle quali dipende dalle formole di riduzione stabilite al § (2) e differiscono da quelle trovate pel caso della iperbole soltanto pel parametro.

7.° Problema. — Si domandano quelle curve la rettificazione delle quali dipende da archi di lemniscata, o da integrali ellittici di prima specie. Essendo

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

l'equazione della curva abbiamo per l'elemento dell'arco qualunque

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

e quindi

$$ds = \frac{a d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \ .$$

In questa ipotesi l'equazioni generali diverranno

$$dx = \frac{a d\theta \cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\theta}} \ , \quad dy = \frac{a d\theta \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

nelle quali per comodo porremo

$$2\theta = \sigma \ , \quad d\theta = \tfrac{1}{2} d\sigma$$

onde

$$dx = \frac{a}{2} \frac{d\sigma \cos \varphi}{\sqrt{\cos \sigma}} \ , \quad dy = \frac{a}{2} \frac{d\sigma \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{\cos \sigma}}$$

ed affinchè sia possibile la integrazione si faccia $\varphi = n\sigma$ e così sarà

$$dx = \frac{a}{2} \cdot \frac{d\sigma \cos n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}, \quad dy = \frac{a}{2} \cdot \frac{d\sigma \operatorname{sen} n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} \tag{21}$$

Per integrare queste funzioni porremo, secondo il solito

$$A = \operatorname{sen}(n-1)\sigma \,.\, \sqrt{\cos\sigma}$$

dalla quale differenziando abbiamo

$$dA = \frac{d\sigma}{2\sqrt{\cos\sigma}} \left[(2n-2)\cos(n-1)\sigma \cos\sigma - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} n\sigma \right]$$

e per le solite formole di funzioni avremo ancora

$$dA = \frac{d\sigma}{2\sqrt{\cos\sigma}} \left[\left(\frac{2n-3}{2}\right) \cos(n-2)\sigma + \left(\frac{2n-1}{2}\right) \cos n\sigma \right]$$

ed integrando sarà

$$A = \frac{2n-3}{4} \int \frac{d\sigma \cos(n-2)\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} + \frac{2n-1}{4} \int \frac{d\sigma \cos n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

dalla quale

$$\int \frac{d\sigma \cos n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} = \frac{4A}{2n-1} - \frac{2n-3}{2n-1} \int \frac{d\sigma \cos(n-2)\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} \,.$$

Si ponga ora

$$B = \cos(n-1)\sigma \,.\, \sqrt{\cos\sigma},$$

differenziando e riducendo per mezzo delle formole di trasformazione si ottiene

$$dB = -\frac{d\sigma}{4\sqrt{\cos\sigma}} \left[(2n-1)\operatorname{sen} n\sigma + (2n-3)\operatorname{sen}(n-2)\sigma \right]$$

che integrata ci dà

$$\int \frac{d\sigma \operatorname{sen} n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} = -\frac{4B}{2n-1} - \frac{2n-3}{2n-1} \int \frac{d\sigma \operatorname{sen}(n-2)\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

Fatte le opportune sostituzioni nelle (21) otteniamo

$$x = c + \frac{a}{2} \left(\frac{4A}{2n-1} - \frac{2n-3}{2n-1} \int \frac{d\sigma \operatorname{sen}(n-2)\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} \right)$$

$$y = c' - \frac{a}{2} \left(\frac{4B}{2n-1} + \frac{2n-3}{2n-1} \int \frac{d\sigma \operatorname{sen}(n-2)\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} \right) \tag{22}$$

Qui noteremo che la indeterminata n va sempre diminuendo di due unità,

dunque quand'essa è data da un numero intero pari dovremmo integrare soltanto

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

perchè l'ultimo termine della y è allora nullo; e se è dispari avremo da integrare in fine le due espressioni

$$\int d\sigma \sqrt{\cos\sigma}\ , \quad \int \frac{d\sigma \operatorname{sen}-n\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

Riguardo alla funzione che si ottiene nella prima ipotesi si ponga

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}}$$

ove posto

$$2\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2} = \operatorname{sen}^2\omega$$

ne dedurremo

$$d\omega = \frac{d\omega\cos\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}}$$

e perciò

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} = F\left(\tfrac{1}{2}, \omega\right)$$

che è un integrale ellittico di prima specie.

Per l'altra funzione

$$\int d\sigma\sqrt{\cos\sigma} = \int d\sigma\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}$$

e fatto il medesimo cangiamento di variabile avremo

$$\int d\sigma\sqrt{\cos\sigma} = \int \frac{d\omega\cos^2\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} - \int \frac{d\omega\operatorname{sen}^2\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}}$$

il cui ultimo termine si può mettere sotto la seguente forma

$$\int \frac{d\omega\operatorname{sen}^2\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} = 4\int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} - 4\int d\omega\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}$$

e sostituendo

$$\int d\sigma \sqrt{\cos\sigma} = -3 \int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}} + 4 \int d\omega \sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\omega}$$

che dipende da due integrali ellittici l'uno di prima e l'altro di seconda specie.

Per la terza funzione si ha immediatamente

$$\int \frac{d\sigma \operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}} = -2\sqrt{\cos\sigma}$$

Da quanto abbiamo esposto risulta che generalmente le coordinate x, y sono funzioni trascendenti, per altro vi possono essere dei particolari valori per la indeterminata *n* pei quali risultino relazioni algebriche.

Riprese le (22) da esse apprendiamo che una prima relazione algebrica l'abbiamo quando sia

$$2n-3=0 \quad , \quad \text{ed} \quad n=\frac{3}{2}$$

perchè in tale caso

$$x = c + A\,a = c + a \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\sqrt{\cos\sigma}$$

$$y = c' - B\,a = c' - a\cos\frac{\sigma}{2}\sqrt{\cos\sigma} \qquad (23)$$

e posto che ad $\sigma = 0$ corrisponda $x = 0$, $y = -a$, troveremo $c = 0$, $c' = 0$, e così

$$x = a \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\sqrt{\cos\sigma} \quad ; \quad y = -a\cos\frac{\sigma}{2}\sqrt{\cos\sigma}$$

le quali quadrate e sommate danno

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos\sigma$$

dalla quale

$$\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \quad , \quad \cos^2\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$$

Ora dalle (23) abbiamo

$$\operatorname{tang}^2\frac{\sigma}{2} = \frac{x^2}{y^2}$$

dunque si trova

$$\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(y^2-x^2\right)+o$$

che è la stessa lemniscata di Bernoulli, ma le sue coordinate sono permutate, e la inclinazione del suo raggio vettore rispetto l'asse delle ascisse è data dalla relazione.

$$\varphi = 3\,\theta.$$

Per determinare in queste curve il raggio di curvatura si prendano le

$$dx = \frac{a}{2}\cdot\frac{d\,\sigma\cos n\,\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}\quad;\quad dy = \frac{a}{2}\cdot\frac{d\,\sigma\,\mathrm{sen}\,n\,\sigma}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

e si deducano

$$d^2x = \frac{a\,d\,\sigma^2}{4\cos\sigma\sqrt{\cos\sigma}}\left(-2\,n\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,n\,\sigma+\mathrm{sen}\,\sigma\cos n\,\sigma\right)$$

$$d^2y = \frac{a\,d\,\sigma^2}{4\cos\sigma\sqrt{\cos\sigma}}\left(2\,n\cos\sigma\cos n\,\sigma+\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,n\,\sigma\right)$$

e quindi

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x\pm\frac{n\,a^2\,d\,\sigma^2}{4\cos\sigma}\,.$$

Di più abbiamo

$$\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^3\,d\,\sigma^3}{2^3\sqrt{\cos^3\sigma}}$$

e perciò

$$\rho=\frac{a}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\sigma}}$$

che per $\sigma=\frac{\pi}{2}$ diventa infinito, onde i corrispondenti rami della curva tendono ad essere rettilinei.

8.° Problema. Assegnare quelle curve la cui rettificazione dipende da archi ellittici, o da integrali ellittici di seconda specie.

Siano, a, b i semi-assi della ellisse, rappresentata per θ l'ampiezza, le coordinate di qualunque punto sono

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta\quad;\quad b\cos\theta$$

e perciò

$$ds = d\,\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta\,\theta+b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$$

Le formole generali diverranno in questo caso

$$dx = d\theta \cos\varphi \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$dy = d\theta \operatorname{sen}\varphi \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Per rendere razionali queste funzioni porremo

$$a \cos\theta = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{tang}\omega$$

e così avremo

$$dx = \frac{b\, d\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\theta}{\cos\omega}, \quad dy = \frac{b\, d\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\omega},$$

e se qui poniamo, per eliminare ω, la relazione

$$\varphi = n\theta + \varpi$$

avremo

$$dx = b\, d\theta \operatorname{sen}\theta (\cos n\theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{tang}\omega)$$

$$dy = b\, d\theta \operatorname{sen}\theta (\operatorname{sen} n\theta + \cos n\theta \operatorname{tang}\omega)$$

Sostituito in queste il valore di tang ω ne risultano

$$\begin{aligned} dx &= b\, d\theta \operatorname{sen}\theta \cos n\theta - ad\theta \cos\theta \operatorname{sen} n\theta \\ dy &= b\, d\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta + ad\theta \cos\theta \cos n\theta \end{aligned} \tag{24}$$

e per le note relazioni trigonometriche troveremo ancora

$$dx = \frac{b}{2} d\theta \Big(\operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta\Big) - \frac{a}{2} d\theta \Big(\operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n-1)\theta\Big)$$

$$dy = \frac{b}{2} d\theta \Big(\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\Big) + \frac{a}{2} d\theta \Big(\cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta\Big)$$

ovvero

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{a-b}{2} d\theta \operatorname{sen}(n+1)\theta - \frac{a+b}{2} d\theta \operatorname{sen}(n-1)\theta \\ dy &= \frac{a+b}{2} d\theta \cos(n-1)\theta + \frac{a-b}{2} d\theta \cos(n+1)\theta \end{aligned} \tag{25}$$

le quali integrate così che a $\theta = o$ corrispondano $x = o$, $y = o$, otteniamo

$$x = -\frac{a+b}{2(n-1)}\Big(1 - \cos(n-1)\theta\Big) - \frac{a-b}{(2n+1)}\Big(1 - \cos(n+1)\theta\Big)$$

$$y = \frac{a+b}{2(n-1)} \operatorname{sen}(n-1)\theta + \frac{a-b}{2(n+1)} \operatorname{sen}(n+1)\theta$$

che rappresentano tutte le ipocicloidi ed epicicloidi
Se qui poniamo $n = 1$ avremo

$$x = -\frac{a+b}{2}\left(\frac{o}{o}\right) - \frac{a-b}{4}\left(1 - \cos 2\theta\right)$$

$$y = \frac{a+b}{2}\left(\frac{o}{o}\right) + \frac{a-b}{4} \operatorname{sen} 2\theta$$

e quindi pei noti principii

$$x = -\frac{a-b}{4}\left(1 - \cos 2\theta\right)$$

$$y = \frac{a+b}{4} \cdot 2\theta + \frac{a-b}{4} \operatorname{sen} 2\theta .$$

Si riprendano le formole (24) e si differenzino, avremo

$$d^2 x = d\theta^2 \left[(b-an)\cos\theta \cos n\theta - (a-bn) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta\right]$$

$$d^2 y = d\theta^2 \left[(b-an)\cos\theta \operatorname{sen} n\theta - (a-bn) \operatorname{sen}\theta \cos n\theta\right]$$

e formando ora il composto $dx\, d^2y - dy\, d^2 x$, risulterà dopo facili riduzioni

$$dx\, d^2 y - dy\, d^2 x = d\theta^3 \left((n a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta) - ab \right).$$

Con maggiore facilità troveremo

$$\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}} = d\theta^3 \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}$$

e quindi pel raggio di curvatura sarà

$$\rho = \frac{\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{n\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) - ab}$$

che per $\theta = o$ diventa

$$\rho = \frac{a^2}{na - b}$$

e per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\rho = \frac{b^2}{ab - a}.$$

Conservando la indeterminazione della n possiamo assegnare l'area limitata da tali curve che nel voluto modo derivano dall' ellisse.
Essendo generalmente

$$dA = y\,dx$$

sarà in particolare

$$dA = -\left[\frac{n(a^2-b^2)}{4(n^2-1)} 2 \operatorname{sen}(n-1)\theta \operatorname{sen}(n+1)\theta + \frac{(a+b)^2}{4(n-1)} \operatorname{sen}^2(n-1)\theta + \frac{(a-b)^2}{4(n+1)} \operatorname{sen}^2(n+1)\theta\right] d\theta$$

ma

$$2 \operatorname{sen}(n-1)\theta \operatorname{sen}(n+1)\theta = \cos 2\theta - \cos 2n\theta$$

dunque

$$dA = -\frac{(a^2-b^2)n}{4(n^2-1)}(d\theta \cos 2\theta - d\theta \cos 2n\theta) - \frac{(a+b)^2}{4(n-1)} d\theta \operatorname{sen}^2(n-1)\theta - \frac{(a-b)^2}{4(n+1)} d\theta \operatorname{sen}^2(n+1)\theta$$

la quale integrata così che a $\theta = o$, corrisponda $A = o$, troviamo

$$A = \frac{a^2-b^2}{8(n^2-1)}\left(\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{n} - \operatorname{sen} 2\theta\right) + \frac{(a+b)^2}{8(n-1)}\left(\operatorname{sen}(n-1)\theta \cos(n-1)\theta - (n-1)\theta\right) + \frac{(a-b)^2}{8(n+1)}\left(\operatorname{sen}(n+1)\theta \cos(n+1)\theta - (n+1)\theta\right)$$

che si tradurrà ai differenti casi coll'attribuire particolari valori alla indeterminata n.

Prob. Assegnare l'equazione di quelle linee la rettificazione delle quali dipende da archi iporbolici.
Si dica θ l'ampiezza corrispondente ad un punto qualunque della iperbole di semi-assi a, b: per l'elemento del suo arco avremo

$$ds = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

e quindi per le coordinate della curva dimandata sarà

$$dx = \frac{d\theta \cos\varphi}{\cos^2\theta}\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,,\ dy = \frac{d\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\theta}\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Per trasformare queste funzioni in altre che sieno razionali impiegheremo il medesimo artificio usato in un problema antecedente, così porremo

$$a \operatorname{sen}\theta = b \operatorname{tang}\omega$$

per la quale sostituzione le due formole si mutano in

$$dx = \frac{b\, d\theta \cos\varphi}{\cos\omega \cos^2\theta}\,,\ dy = \frac{b\, d\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\omega \cos^2\theta}\,.$$

In queste si contiene l'arco indeterminato φ, e di questo ne disporremo in guisa che possa facilmente eliminarsi l'arco ω. A questo fine porremo

$$\varphi = n\theta + \omega$$

e così i differenziali delle coordinate si riducono alle forme seguenti

$$dx = \frac{b\, d\theta \cos n\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a d\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^2\theta}$$

$$dy = \frac{b\, d\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^2\theta} + \frac{a d\theta \operatorname{sen}\theta \cos n\theta}{\cos^2\theta}$$

e perchè

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} n\theta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos n\theta = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n-1)\theta\right)$$

sarà

$$dx = b.\ \frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a}{2}\frac{d\theta \cos(n-1)\theta}{\cos^2\theta} + \frac{a}{2}\frac{d\theta \cos(n+1)\theta}{\cos^2\theta}$$

$$dy = b.\ \frac{d\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^2\theta} + \frac{a}{2}\frac{d\theta \operatorname{sen}(n+1)\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a}{2}\frac{d\theta \operatorname{sen}(n-1)\theta}{\cos^2\theta}$$

Essendo però

$$\int\frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{n-2}\frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{\cos^2\theta} - \frac{n}{n-2}\int\frac{d\theta \cos(n-2)\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\int\frac{d\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{2}{n-2}\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta} - \frac{n}{n-2}\int\frac{d\theta \operatorname{sen}(n-2)\theta}{\cos^2\theta}$$

se in queste si pone $n+1$, $n-1$ in luogo di n avremo le formole di riduzione per la integrazione di tutti tre i termini che compongono le espressioni delle coordinate.

Per un caso particolare si ponga $n = o$, ed allora riprendendo le espressioni generali sarà

$$dx = \frac{b\,d\,\theta}{\cos^2\theta}\ ;\quad dy = \frac{a d\,\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

le quali integrate così che $a\,\theta = o$ corrispondano $x = o$, $y = a$, troviamo

$$x = b.\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\ ,\quad y = \frac{a}{\cos\theta}$$

dalle quali

$$\cos\theta = \frac{ab}{by}\ ,\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{ax}{by}$$

e quindi

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

che è una iperbole coniugata alla proposta.

9.° Problema. — Assegnare quelle curve la cui rettificazione dipende da quella di una parabola conica.

Per la parabola di second'ordine è

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}$$

l'elemento dell'arco, e quando si ponga

$$y = p \operatorname{tang}\theta\ ,\quad e\ dy = \frac{p\,d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

si ottiene

$$ds = \frac{p\,d\,\theta}{\cos^3\theta}$$

onde per la curva dimandata avremo

$$dx = \frac{p\,d\,\theta\cos\varphi}{\cos^3\theta}\ ,\quad dy = \frac{p\,d\,\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\theta}$$

e quindi posto $\varphi = n\,\theta$ si hanno

$$dx = \frac{p\,d\,\theta\cos n\,\theta}{\cos^3\theta}\ ,\quad dy = \frac{p\,d\,\theta\operatorname{sen} n\,\theta}{\cos^3\theta} \qquad (26)$$

Per la integrazione di queste porremo

$$A = \frac{\operatorname{sen}(n-1)\,\theta}{\cos^2\theta}\ ,\quad B = \frac{\cos(n-1)\,\theta}{\cos^2\theta}$$

dalla prima differenziando e riducendo abbiamo

$$dA = \frac{(n+1)\, d\theta \cos\theta \cos(n-1)\theta - 2\, d\theta \cos n\theta}{\cos^3\theta}$$

ma essendo

$$\cos\theta \cos(n-1)\theta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(n-2)\theta + \cos n\theta\right)$$

ne deduciamo

$$dA = \frac{n+1}{2} \times \frac{d\theta \cos(n-2)\theta}{\cos^3\theta} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^3\theta}$$

e quindi integrando risulta

$$\int \frac{d\theta \cos n\theta}{\cos^3\theta} = \frac{2A}{n-3} - \frac{n+1}{n-3} \int \frac{d\theta \cos(n-2)\theta}{\cos^3\theta}$$

Dalla seconda operando egualmente si trae

$$\int \frac{d\theta \operatorname{sen} n\theta}{\cos^3\theta} = -\frac{2B}{n-3} - \frac{n+1}{n-3} \int \frac{d\theta \operatorname{sen}(n-2)\theta}{\cos^3\theta}$$

Dopo ciò le (26) ci danno

$$x = c + p\left(\frac{2A}{n-3} - \frac{n+1}{n-3} \int \frac{d\theta \cos(n-2)\theta}{\cos^3\theta}\right)$$

$$y = c' - p\left(\frac{2B}{n-3} + \frac{n-1}{n-3} \int \frac{d\theta \operatorname{sen}(n-2)\theta}{\cos^3\theta}\right)$$

Se qui la n è pari l'ultimo integrale per l'ordinata è nullo e per l'ascissa sarà

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

che si sa determinare: se n è dispari gli ultimi termini diventano ordinatamente.

$$\int \frac{d\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

che sono immediati.

Si ponga il caso particolare di $n+1=0$, ovvero $n=-1$, allora avremo

$$x = c - \frac{Ap}{2}; \quad y = c' + \frac{Bp}{2};$$

ma

$$A = -2 \operatorname{tang}\theta; \quad B = 1 - \operatorname{tang}^2\theta$$

dunque

$$x = c + p \operatorname{tang} \theta \quad , \quad y = c' + \frac{p}{2}\left(1 - \operatorname{tang}^2 \theta\right)$$

e per determinare le costanti supponiamo che a $\theta = 0$ corrisponda $x = 0$, $y = \frac{p}{2}$, ed allora sarà $c = 0$, $c' = 0$, onde

$$x = p \operatorname{tang} \theta \quad ; \quad y = \frac{p}{2}\left(1 - \operatorname{tang}^2 \theta\right)$$

dalle quali

$$y = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)$$

ed in fine

$$x^2 = p^2 - 2 p y$$

la quale rappresenta un' altra parabola che è simmetrica intorno l'asse delle ordinate, mentre la proposta è simmetrica intorno l'asse delle ascisse.

Per $n=3$ le formole che danno le coordinate si presentano sotto forma d'infinito, perchè in esse non è determinata la costante della integrazione, e così per questa ipotesi ritorneremo alle equazioni differenziali che diventano

$$dx = \frac{p\, d\theta \cos 3\theta}{\cos^3 \theta} \quad , \quad dy = \frac{p\, d\theta \operatorname{sen} 3\theta}{\cos^2 \theta}$$

ma

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad ; \quad \operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$$

dunque

$$dx = p\, d\theta - 3 p \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \; ; \quad dy = 3 p \frac{d\theta \operatorname{sen} \theta}{\cos^3 \theta} - 4 p \frac{d\theta \operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta}$$

ed integrando

$$x = c + p\theta - 3 p \operatorname{tang} \theta \; ; \quad y = c' + \frac{3p}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} - 4 p \int \frac{d\theta \operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta}$$

Integrando per parti l'ultimo termine avremo

$$\int d\theta \operatorname{sen} \theta \cos^{-3} \theta \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} - \int \frac{d\theta \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

e quindi

$$\int \frac{d\theta \operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} + \log \cos \theta$$

e così l'equazioni alla curva sono

$$x = c + p\,\theta - 3\,p \operatorname{tang}\theta$$

$$y = c' + \frac{3\,p}{2\cos\theta} - \frac{2\,p \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \log\cos\theta$$

e posto che a $\theta = o$ debba corrispondere $x = o$, ed $y = \frac{3p}{2}$ troveremo $c = o$, $c' = o$, onde

$$x = p\,\theta - 3\,p \operatorname{tang}\theta$$

$$y = \frac{3p}{\cos\theta} - 2\,p \operatorname{tang}^2\theta - \log\cos\theta$$

10.° Problema. Si domandano ora quelle curve la rettificazione delle quali dipende da funzioni di coordinate pariformi a quelle che danno i raggi di curvatura di una ellisse.

Per un punto qualunque della ellisse si dica θ l'ampiezza, che per comodo supporremo parta dal semi-asse maggiore, ed a, b i semi-assi, pel raggio di curvatura avremo

$$\rho = \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

la quale differenziata ci dà

$$d\rho = \frac{3}{2\,a\,b}(a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \times 2\,(a^2 - b^2)\,d\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

e fatto

$$a^2 - b^2 = e^2$$

$$d\rho = \frac{3\,e^2}{a\,b} + d\,\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

e quindi

$$dx = \frac{3\,e^2}{a\,b} \times d\,\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

$$dy = \frac{3\,e^2}{a\,b} \times d\,\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{sen}\varphi\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Per rendere razionali queste funzioni porremo

$$b\cos\theta = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{tang}\omega$$

e così avremo

$$dx = \frac{3\,e^2}{b} \times \frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\cos\theta\,\cos\varphi}{\cos\omega}\,,\quad dy = \frac{3\,e^2}{b} \times \frac{d\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\omega}$$

ove posto

$$\varphi = n\,\theta + \varpi$$

si trova

$$dx = \frac{3\,e^2}{b}(a\,d\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,\cos\theta\,\cos n\theta - b\,d\,\theta\,\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,n\,\theta)$$

$$dy = \frac{3\,e^2}{b}(a\,d\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,n\,\theta + b\,d\,\theta\,\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos n\,\theta)$$

Prima d'integrare queste funzioni porremo il caso particolare di $n = o$ nel quale si riducono a

$$dx = \frac{3\,e^2}{b} \times d\,\theta\,\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\quad;\quad dy = \frac{3\,e^2}{a} \times d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos^2\theta.$$

che sono immediatamente integrabili e ci danno

$$x = c + \frac{e^2}{b}\mathrm{sen}^3\,\theta\;;\; y = c' - \frac{e^2}{a}\cos^2\theta\;;$$

e ponendo che a $\theta = o$, corrisponda $x = o$, $y = -\frac{e^2}{a}$ per le costanti otterremo $c = o$, $c' = o$ e così avremo

$$x = \frac{e^2}{b}\mathrm{sen}^3\,\theta\;,\quad y = -\frac{e^2}{a}\cos^3\theta$$

dalle quali

$$\mathrm{sen}\,\theta = \left(\frac{bx}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}\;,\cos\theta = -\left(\frac{ay}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e quindi

$$\left(\frac{ay}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bx}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Poniamo ancora $n = 1$, ed allora dedurremo facilmente

$$dy = \frac{3\,e^2}{a\,b}(a-b)\,d\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\cos^2\theta$$

$$dx = \frac{3\,e^2}{a\,b}(a\,d\,\theta\,\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta + b\,d\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos^3\theta)$$

le quali integrate ci danno

$$x = \frac{3\,e^2(a-b)}{4\,a\,b}\left(-\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) + c$$

$$y = \frac{3\,e^2}{4\,a\,b}\left(a\operatorname{sen}^4\theta - b\cos^4\theta\right) + c'$$

e se per determinare le costanti poniamo che a $\theta = o$ debba corrispondere

$x = o$ ed $y = -\frac{3\,e^2}{4\,a}$ avremo $c = o$, $c' = o$, e quindi

$$x = \frac{3\,e^2(a-b)}{4\,a\,b}\left(-\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right)$$

$$y = \frac{3\,e^2}{4\,a\,b}\left(a\operatorname{sen}^4\theta - b\cos^4\theta\right),$$

e la curva è data una equazione trascendente.

Ritorniamo al caso generale; si riprendano le relative espressioni ponendole prima sotto le seguenti forme

$$dx = \frac{3\,e^2}{2\,a\,b}\left(a\,d\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta\cos n\theta - b\,d\theta\cos\theta\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}n\theta\right)$$

$$dy = \frac{3\,e^2}{2\,a\,b}\left(a\,d\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}n\theta + b\,d\theta\cos\theta\operatorname{sen}2\theta\cos n\theta\right)$$

Per potere integrare queste funzioni è necessario giungere ad esprimere le quantità comprese entro le parentesi per monomi dipendenti da un solo arco, mentre attualmente contengono θ, 2θ, $n\theta$; e perciò richiamiamo primieramente essere

$$\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}n\theta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(n-2)\theta - \cos(n+2)\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}2\theta\cos n\theta = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(n+2)\theta - \operatorname{sen}(n-2)\theta\right)$$

per le quali le ultime equazioni si mutano nelle

$$dx = \frac{3\,e^2}{4\,a\,b}\,d\theta\Big[a\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n+2)\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n-2)\theta\right)$$

$$- b\left(\cos\theta\cos(n-2)\theta - \cos\theta\cos(n+2)\theta\right)\Big]$$

$$dy = \frac{3\,e^2}{4\,a\,b}\,d\,\theta \Big[a\,(\text{sen}\,\theta \cos (n-2)\,\theta - \text{sen}\,\theta \cos (n+2)\,\theta$$

$$+ b\,(\cos\theta\,\text{sen}\,(n+2)\,\theta - \cos\theta\,\text{sen}\,(n-2)\,\theta) \Big]$$

Per trasformare queste è ancora necessario rammentare essere

$$\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,(n+2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos (n+1)\,\theta - \cos (n+3)\,\theta)$$

$$\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,(n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos (n-1)\,\theta - \cos (n-3)\,\theta)$$

$$\cos\theta\cos (n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos (n-3)\,\theta + \cos (n-1)\,\theta)$$

$$\cos\theta\cos (n+2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\cos (n+1)\,\theta + \cos (n+3)\,\theta)$$

$$\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,(n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\text{sen}\,(n-1)\,\theta - \text{sen}\,(n-3)\,\theta)$$

$$\text{sen}\,\theta\cos (n+2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\text{sen}\,(n+3)\,\theta - \text{sen}\,(n+1)\,\theta)$$

$$\cos\theta\,\text{sen}\,(n+2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\text{sen}\,(n+3)\,\theta + \text{sen}\,(n+1)\,\theta)$$

$$\cos\theta\,\text{sen}\,(n-2)\,\theta = \tfrac{1}{2}\,(\text{sen}\,(n-1)\,\theta + \text{sen}\,(n-3)\,\theta)$$

che sostituiti danno dopo riduzione

$$dx = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\Big[(a+b)\,(d\,\theta\cos (n+1)\,\theta - d\,\theta\cos (n-1)\,\theta)$$

$$-(a-b)\,(d\,\theta\cos (n+3)\,\theta - d\,\theta\cos (n-3)\,\theta)\Big]$$

$$dy = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\Big[(a+b)\,(d\,\theta\,\text{sen}\,(n+1)\,\theta - d\,\theta\,\text{sen}\,(n-3)\,\theta$$

$$+(a-b)\,(d\,\theta\,\text{sen}\,(n-1)\,\theta - d\,\theta\,\text{sen}\,(n+3)\,\theta)\Big]$$

le quali integrate ci danno

$$x = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\Big[(a+b)\left(\frac{\text{sen}\,(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\text{sen}\,(n-1)\,\theta}{n-1}\right)$$

$$-(a-b)\left(\frac{\text{sen}\,(n+3)\,\theta}{n+3} - \frac{\text{sen}\,(n-3)\,\theta}{n-3}\right)\Big] + c$$

$$y = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\left[(a+b)\left(\frac{\cos(n-3)\,\theta}{n-3} - \frac{\cos(n+1)\,\theta}{n+1}\right)\right.$$

$$\left. + (a-b)\left(\frac{\cos(n+3)\,\theta}{n+3} - \frac{\cos(n-1)\,\theta}{n-1}\right)\right] + c'$$

e se le costanti si determinano per modo che a $\theta = o$ corrisponda

$$x = o\,,\ y = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\left[(a+b)\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

abbiamo

$$x = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\left[(a+b)\left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n-1)\,\theta}{n-1}\right)\right.$$

$$\left. - (a-b)\left(\frac{\operatorname{sen}(n+3)\,\theta}{n+3} - \frac{\operatorname{sen}(n-3)\,\theta}{n-3}\right)\right]$$

$$y = \frac{3\,e^2}{8\,a\,b}\left[(a+b)\left(\frac{\cos(n-3)\,\theta}{n-3} - \frac{\cos(n+1)\,\theta}{n+1}\right)\right.$$

$$\left. - (a-b)\left(\frac{\cos(n+3)\,\theta}{n+3} - \frac{\cos(n-1)\,\theta}{n-1}\right)\right]$$

le quali ci danno un punto qualunque della linea dimandata.

MÉMOIRE

SUR LES LOIS DE RÉCIPROCITÉ RELATIVES AUX RÉSIDUS DE PUISSANCES.

PAR LE PÈRE PEPIN, S. J.

1. Cauchy a donné en 1829 dans le Bulletin de Férussac (sciences mathématiques, t. XII) une suite de Théorèmes remarquables sur les applications de la théorie des fonctions circulaires à la théorie des nombres. Les résultats énoncés dans les deux premiers paragraphes de ce mémoire se rapportent à la représentation par la forme quadratique $x^2 + ny^2$ de certaines puissances des nombres premiers qui, divisés par n, donnent pour reste l'unité. Ils ont été développés par Cauchy dans le tome XVII des Mémoires de l'Académie des sciences. Le troisième paragraphe du même mémoire a pour objet les lois de réciprocité pour les résidus de puissances. Les résultats y sont donnés sans démonstration, et un seul point a été plus tard exposé par Cauchy, la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques (Mémoires de l'Ac. t. XVII, p. 453).

L'illustre géomètre ajoute bien, à l'endroit cité : « On peut voir dans le Bulletin de Férussac comment les mêmes principes peuvent être appliqués à la théorie des résidus cubiques, biquadratiques, etc. » mais le lecteur serait bien trompé dans son attente s'il allait chercher dans le mémoire de 1829 les théorèmes de Jacobi sur les résidus cubiques ou ceux de Gauss sur les résidus biquadratiques, il ne trouverait qu'une formule tellement générale qu'il serait difficile d'en tirer la solution des questions particulières. Du reste le lecteur pourra juger, par lui-même ; nous donnerons plus loin la démonstration de cette formule et nous l'appliquerons aux cas les plus simples, en suivant la méthode indiquée par Cauchy.

Il suffit cependant de modifier un peu la marche suivie dans le Bulletin de Férussac pour obtenir très-simplement non seulement les théorèmes de Gauss et de Jacobi mais encore des théoremes analogues pour les résidus des puissances d'ordres supérieurs. On a ainsi l'avantage d'obtenir les lois de réciprocité par une methode uniforme. Mais avant d'exposer cette théorie nous allons démontrer quelques théorèmes dont nous aurons besoin dans nos démonstrations.

§. 1. *Théorèmes auxiliares.*

2. Désigons par p un nombre premier, par θ une racine imaginaire de l'équation $x^p = 1$, par ρ une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$, et par $F(\theta, \rho)$ une fonction entière de θ et de ρ dont les coefficients sont des nombres entiers. On pourra mettre cette fonction sous la forme

$$F(\theta, \rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_{p-1}\theta^{p-1};$$

il suffira pour cela de l'ordonner par rapport à θ et de réduire les exposants au moyen de l'équation $\theta^p = 1$; $a_0, a_1, \ldots a_{p-1}$ seront des fonctions de ρ entières et à coefficients entiers.

Supposons que cette fonction conserve la même valeur quand on y remplace la racine θ par une autre racine imaginaire quelconque θ^l de la même équation, en sorte que l'on ait

$$(1) \qquad F(\theta^l, \rho) = F(\theta, \rho)$$

pour toutes les valeurs entières de l, qui ne se réduisent pas à des multiples de p. En donnant à l deux valeurs particulières lg et g, on déduit de l'équation (1) l'équation $F(\theta^{lg}, \rho) = F(\theta^g, \rho)$, d'où l'on conclut immédiatement que l'équation (1) subsiste lorsqu'on y remplace θ par l'une quelconque des racines de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$. On peut d'ailleurs réduire au dessous de p les exposants de θ dans $F(\theta^l, \rho)$, au moyen de l'équation $\theta^p = 1$. La puissance $\theta^{l\alpha_m}$ qui se réduit à θ^m est déterminée par la congruence $l\alpha_m \equiv m$ (mod p), α_m étant comme le nombre m l'un des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots p-1$. On aura donc

$$a_{\alpha_m}\theta^{l\alpha_m} = a_{\alpha_m}\theta^m,$$

et l'on déduira de l'équation (1)

$$F(\theta^l, \rho) - F(\theta, \rho) = \sum_1^{p-1} (a_{\alpha_m} - a_m)\theta^m = 0,$$

ou encore, puisque le facteur θ ne s'annule pas,

$$\sum_1^{p-1} (a_{\alpha_m} - a_m)\theta^{m-1} = a_{\alpha_1} - a_1 + (a_{\alpha_2} - a_2)\theta + \ldots + (a_{\alpha_{p-1}} - a_{p-1})\theta^{p-2} = 0.$$

Cette équation n'est que du degré $p-2$; néanmoins elle doit être vérifiée par les $p-1$ racines imaginaires de l'équation $x^p = 1$; elle doit donc être identiquement nulle, et l'on a

$$a_{\alpha_1} = a_1, \; a_{\alpha_2} = a_2, \ldots a_{\alpha_{p-1}} = a_{p-1}.$$

D'ailleurs en égalant successivement le nombre arbitraire l aux divers termes de la suite $2, 3, 5, \ldots p-1$, on trouve successivement tous les termes de cette même suite comme racines de la congruence

$$l\,\alpha_1 \equiv 1 \pmod{p};$$

on a donc $a_2 = a_1$, $a_3 = a_1$, ... $a_{p-1} = a_1$,

$$F(\theta, \rho) = a_0 + a_1(\theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{p-1}) = a_0 - a_1;$$

c'est-à-dire que la fonction $F(\theta, \rho)$ se reduit à une fonction rationelle de ρ, entière et à coeficients entiers. Donc

THÉORÈME IER

« *Si la fonction $F(\theta, \rho)$ est entière par rapport à θ et à ρ, et que tous ses coefficients soient des nombres entiers, si de plus elle conserve même valeur, quelle que soit la racine imaginaire θ de l'équation $x^p = 1$, cette fonction se réduit à une fonction entière de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers.* »

Ce théorème est applicable toutes le fois qu'en réduisant les exposants de θ, au moyen de l'équation $\theta^p = 1$, et en effectuant les calculs, on ramène la fonction $F(\theta', \rho)$ à une fonction indépendante de θ; car, comme une autre racine θ' vérifiera l'équation $(\theta')^p = 1$, on pourra faire les mêmes réductions et les mêmes calculs et l'on arrivera au résultat déjà obtenu avec la racine θ. Ainsi la fonction $F(\theta, \rho)$ ayant pour coefficients des nombres entiers ne peut jamais se réduire à une fonction entière de ρ, dont les coefficients ne seraient pas tous des nombres entiers.

Nous pouvons supposer $n = 1$, $\rho = 1$, dans le théorème précédent, alors les coefficients $a_0, a_1, \ldots$ sont des nombres entiers et la fonction $F(\theta, \rho)$ se réduit à un nombre entier. Donc,

THÉORÈME II.

« *Désignons par θ une racine primitive de l'équation $x^p = 1$, dont l'exposant p est un nombre premier impair, et par $F(\theta)$ une fonction entière. Si cette fonction à une valeur indépendante de la racine θ, en sorte qu'elle ne varie pas quand on remplace θ par une autre racine primitive de l'équation $x^p = 1$, cette valeur de $F(\theta)$ est un nombre rationnel et entier.* »

Au lieu de déduire ce théorème comme cas particulier du précédent, on peut en donner une démonstration directe, fondée sur l' irreductibilité de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1}=0$.

3. Comme les lois de réciprocité que nous trouverons entre deux nombres premiers $n\varpi+1$ et nq^1-1 exigent l'emploi des racines imaginaires de la congruence $x^{p+1}-1\equiv 0 \pmod p$, nous donnerons ici une théorie très-simple de cette congruence ; cette théorie est fondée sur le théorème suivant :

THÉORÈME III.

Si l'on désigne par n *un nombre entier, positif ou négatif, non résidu quadratique du nombre premier* p, *la congruence*

$$(2) \qquad x^2-ny^2\equiv 1 \pmod p$$

admet p + 1 *solutions dans lesquelles* x *et* y *sont pris dans la suite* 0, 1, 2,.. p − 1.

D'abord notre congruence admet les solutions évidentes $x=1$, $y=o$ et $x=p-1$, $y=o$. Il reste à chercher celles où y est différent de zéro. Soit u la racine de la cougruence $uy\equiv 1 \pmod p$. z le résidu minimum du produit ux, suivant le module p. La congruence (2) multipliée par u^2 deviendra

$$(1) \qquad z^2-u^2\equiv n \pmod p.$$

Posons

$$(a) \qquad z+u\equiv S\,,\ z-u\equiv t \ (\text{mod.}\ p)\,;$$

nous avons à résoudre en nombres entiers, positifs et inférieurs à p la congruence

$$(4) \qquad St\equiv n \ (\text{mod.}\ p).$$

si l'on donne à t successivement les valeurs 1, 2, 3, ... $p-1$, notre congruence déterminera successivement pour S toutes les valeurs comprises dans la même suite ; le nombre des solutions de cette congruence est donc $p-1$. Or à chacune de ces valeurs les congruences (a) font correspondre un système unique de valeurs de z et de u, de plus il n'arrive jamais que u soit nul, car dans cette hypothèse ou aurait (a) $z\equiv S\equiv t \pmod p$, et la formule (4) donnerait

$$t^2\equiv n \pmod p\,,$$

ce qui est impossible, n étant non résidu quadratique de p. Comme le nombre u est différent de zéro, les congruences

$$(b) \quad uy\equiv 1, \text{ et } ux\equiv z \ (\text{mod.}\ p)$$

déterminent une solution unique (x, y) de la congruence (2), dans laquelle y est différent de zéro. Réciproquement à chaque solution (x, y) de la congruence (1) les congruences (b) et (a) font correspondre une solution unique (S, t) de la congruence (4). Donc le nombre des solutions de la congruence (2), dans lesquelles y est > 0, est $p - 1$, comme celui des solutions de la congruence (4). A ces $p - 1$ solutions ajoutons les deux solutions dans lesquelles y est nul, nous avons en tout $p + 1$ solutions, ainsi que nous l'avons annoncé.

4. La démonstration que nous venons de donner indique la marche à suivre pour trouver les solutions de la congruence (2), ainsi que nous allons le montrer par un exemple. Proposons nous de résoudre la congruence

$$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 7.$$

Nous chercherons d'abord les racines (S, t) de la congruence $S\,t \equiv -1 \pmod 7$, qui sont $(6, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 4)$, $(4, 5)$, $(1, 6)$, et auxquelles correspondent respectivement comme solutions (z, u) de la congruence $z^2 - u^2 \equiv -1 \pmod 7$,

$$(0, 6),\ (6, 4),\ (6, 3),\ (1, 4),\ (1, 3),\ (0, 1);$$

$$\text{puis},\ (0, 6),\ (5, 2),\ (2, 5),\ (2, 2),\ (5, 5),\ (0, 1),$$

comme solutions (x, y) de la congruence proposée

Lorsque le module est grand, au lieu de calculer toutes les solutions de le congruence proposée au moyen des congruences auxiliaires (4), (a) et (b), on peut se contenter d'en déterminer quelques unes; les autres pourront se déduire de celles-là par un procédé fondé sur les théorèmes suivants:

Théorème IV.

5. *Si* f *et* g *désignent des nombres compris dans la suite* 0, 1, 2, ... p − 1, *et formant une solution de la congruence*

$$(2) \qquad f^2 - ng^2 \equiv 1 \ (mod\ p),$$

où le nombre n *est non-résidu quadratique de* p, *le nombre complexe* $r = f + g\sqrt{n}$ *est une racine de la congruence*

$$(5) \qquad x^{p+1} \equiv 1 \pmod p.$$

Dans cet énoncé nous exprimons d'une manière abrégée que la $(p+1)^e$ puissance de $f + g\sqrt{n}$ peut se mettre sous la forme $1 + p\,(M + N\sqrt{n})$, M et N désignant des nombres entiers. De plus nous admettons que la congruence

(5) n'admet pas plus de $p+1$ racines; la démonstration par laquelle Lagrange a démontré qu'une congruence, relative à un module premier, n'admet jamais un nombre de racines supérieur à son degré, s'applique aux racines complexes comme aux racines rationnelles. Or on aura d'abord par là

$$(f+g\sqrt{n})^p = f^p + g^p\, n^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{n} + p\,(F + G\sqrt{n}),$$

car p étant nn nombre premier impair tous les coefficients du développement sont des multiples de p, à l'exception de ceux des deux termes extrêmes. D'ailleurs $f^p \equiv f$, $g^p \equiv g$, $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$, en sorte que l'on a

$$(f+g\sqrt{n})^p = f - g\sqrt{n} + p\,(F_1 + G_1\sqrt{n}),$$

d'où, eu égard à la congruence (2),

$$r^{p+1} = (f+g\sqrt{n})^{p+1} = 1 + p\,(E_2 + G_2\sqrt{n});$$

en un mot, le nombre complexe r est racine de la congruence (5).

En développant directement la $(p+1)^e$ puissance de r, on trouve

$$(f+g\sqrt{n})^{p+1} = P + Q\sqrt{n};$$

la comparaison de ce résultat avec le précédent donne

$$P = 1 + p\,F_2,\quad Q = p\,G_2;$$

ce qui montre que, si n est non résidu quadratique du nombre premier p, le coefficient de $\sqrt{n}$ dans le développement de la $(p+1)^e$ puissance de $(f+g\sqrt{n})$ est toujours divisible par p.

6. Il résulte de ce théorème et du précédent que la congruence

$$(5)\qquad x^{p+1} \equiv 1 \pmod p$$

admet $(p+1)$ racines de la forme $f+g\sqrt{n}$; les deux racines réelles de cette congruence se déduisent de la même formule en faisant $g=0$, $f=1$, ou -1. Nous allons voir que toutes ces racines sont congrues à $(p+1)$ puissances succesives de l'une d'entre elles.

D'abord il est évident que si r est une racine de la congruence (5) toutes les puissances de r vérifient la même congruence; car si $r^{p+1} \equiv 1 \pmod p$, $r^{m(p+1)} \equiv 1 \pmod p$, pour toute valeur entière et positive de l'exposant m. Si m est le plus petit exposant positif qui vérifie la condition $r^m \equiv 1 \pmod p$, nous dirons, comme dans le cas des racines réelles, que la

période de r, c'est-à-dire l'ensemble des termes non congrus entre eux de la suite indéfinie $1, r, r^2, \ldots$ est formée de m termes.

On démontre comme pour la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, que l'exposant m auquel appartient une racine de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ est toujours un diviseur de $p+1$. D'abord les m puissances de r

$$\text{(I)} \qquad 1, r, r^2, \ldots r^{m-1}$$

représentent m racines distinctes de la congruence (5). Si r' est une racine de la même congruence non congrue à quelque terme de la suite (I), les m produits

$$\text{(II)} \qquad r', r'r, r'r^2, \ldots r'r^{m-1}$$

seront m nouvelles racines ; si r'' est une racine non équivalente à quelque terme de l'une des deux suites (I) ou (II), en multipliant par r'' les termes du tableau (I) on obtiendra m nouvelles racines ; en procédant de la sorte on distribuera les $(p+1)$ racines de la congruence (5) en un certain nombre de groupes de m racines, ce qui exige que m soit diviseur de $p+1$. Nous omettons de démontrer que les différents groupes ainsi formés sont totalement distincts, en sorte que deux groupes ne renferment jamais deux termes équivalents ; la démonstration donnée pour les racines de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ subsiste dans notre cas.

Nous appellerons racines primitives de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ celles qui appartiennent à l'exposant $p+1$; elles ont la propriété de renfermer $(p+1)$ termes non congrus entre eux dans la suite de leurs puissances, en sorte que toutes les racines de la congruence (5) peuvent être considérées comme des puissances de ces racines primitives. Pour démontrer l'existence des racines primitives nous désignerons par r l'une des racines qui appartiennent au plus grand exposant et par ϖ cet exposant. Si ϖ n'est pas égal à $p+1$, la congruence (2) aura des racines qui ne seront pas comprises dans la suite

$$1, r, r^2, \ldots r^{\varpi-1};$$

soit r_1 l'une de ces racines, et m l'exposant auquel elle appartient. D'abord l'exposant m n'est pas diviseur de ϖ, car alors la congruence

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

aurait un nombre de racines supérieur à son degré, à savoir les m termes $1, r^{\frac{\varpi}{m}}, r^{2\frac{\varpi}{m}}, \ldots r^{(m-1)\frac{\varpi}{m}}$ et en outre la racine r_1. De plus m, n'étant pas

diviseur de ϖ, doit renfermer une puissance de quelque facteur premier, a, supérieure à celle de ce même facteur dans le nombre ϖ. Soit donc $\varpi = a^\alpha k$, $m = a^\beta l$, $\beta > \alpha$, α nul ou positif; k et l sont des nombres entiers premiers avec a. Posons $r^{a^\alpha} = r'$, $r_1^l = r''$; r' et r'' seront encore deux racines de la congruence (5) et appartiendront respectivement aux exposants k et a^β. Puisque ces deux exposants sont premiers entre eux, le produit $r'\,r''$ appartient à un exposant $a^\beta k$ égal à leur produit; nous trouvons ainsi une racine $r'\,r''$ de la congruence (5) dont la période renferme plus de ϖ termes non congrus entre eux, contrairement à l'hypothèse. Il n'existe donc aucune racine r_1 non congrue à quelque puissance de r. Donc

Théorème V.

Toutes les racines de la congruence $x^{p+1} - 1 \equiv$ (*mod* p) *sont congrues suivant le module* p *aux diverses puissances d'un même nombre complexe*

$$r = f + g\sqrt{n}.$$

7. Pour résoudre la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod p$ on cherchera d'abord, pour une valeur de n convenablement choisie, quelques solutions de la congruence (2) $x^2 - ny^2 \equiv 1 \pmod p$, par la méthode indiquée plus haut (4). Soit (α, β) l'une de ces solutions; $\alpha + \beta\sqrt{n}$ sera racine de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod p$, et l'on formera la période de ses puissances, où plutôt des racines congrues à ces puissances. Si cette période ne renferme pas toutes les racines, on déterminera une nouvelle racine r_1 dont on formera la période, et l'on en déduira une racine r_2 appartenant à un exposant premier avec celui auquel appartient la racine r_1; le produit $r_1 r_2$ appartiendra à un exposant égal au produit de ces deux exposants. Si ce nouvel exposant n'est pas égal à $p+1$, on continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on ait formé une période qui renferme les $p+1$ racines de la congruence proposée. La marche à suivre est la même que pour le calcul des racines primitives du nombre premier p; mais dans ce dernier cas on connaît d'avance les racines dont on forme les périodes; ce sont les nombres $1, 2, 3, \ldots p-1$; tandis que, dans le cas actuel, les racines de la congruence proposée doivent en partie se calculer au moyen de la congruence auxiliaire $x^2 - ny^2 \equiv 1 \pmod p$, et en partie se déduire de la formation des périodes.

Prenons pour exemple $p = 19$, $n = -1$. Les congruences auxiliaires sont

$$S\,t \equiv 1,\ 2\,z \equiv S + t,\ 2\,u \equiv S - t,$$
$$u\,x \equiv z,\ u\,y \equiv 1,\ x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{19}.$$

La première solution $t = 1$, $S = 18$, donne $z = 0$, ce qui correspond aux racines $\pm\sqrt{-1}$ de la congruence proposée $x^{20} \equiv 1 \pmod{19}$. La seconde solution $t = 2$, $S = 9$, donne $z = -4$, $u = -6$, $x = 7$, $y = 3$; ce qui correspond à la racine $r = 7 + 3\sqrt{-1}$. Sa période est composée de cinq termes, $7 + 3\sqrt{-1}$, $2 + 4\sqrt{-1}$, $2 - 4\sqrt{-1}$, $7 - 3\sqrt{-1}$, 1 ; la période de $\sqrt{-1}$ est composée de quatre termes ; ces deux nombres, 4 et 5, étant premiers entre eux, leur produit, 20, sera l'exposant auquel appartient le produit des deux racines $\sqrt{-1}$, $7 + 3\sqrt{-1}$, c'est-à-dire $-3 + 7\sqrt{-1}$. Ce nombre $-3 + 7\sqrt{-1}$ est donc une racine primitive de la congruence proposée.

Comme second exemple nous résoudrons la congruence

$$(1) \qquad x^{42} \equiv 1 \pmod{41}.$$

Comme -3, est non-résidu quadratique de 41, nous pouvons mettre les racines de la congruence proposée sous la forme $x = \alpha + \beta\sqrt{-3}$, α et β désignant deux nombres entiers qui vérifient la congruence auxiliaire

$$(2) \qquad x^2 + 3y^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

L'application de la méthode exposée précédemment nous donne pour solutions de la congruence $S\,t \equiv -3 \pmod{41}$, $t = 1$, $S = -3$ et $t = 2$, $S = 19$. On en déduit pour la congruence (2) les solutions $x = -20$. $y = 20$, et $x = -6$, $y = 17$, ce qui donne pour la congruence proposée les deux racines $r_1 = -20 + 20\sqrt{-3}$, $r_2 = -6 + 17\sqrt{-3}$. Les puissances successives de r_1, réduites suivant le module 41, donnent la période

$$-20 + 20\sqrt{-3},\ 20 + 20\sqrt{-3},\ -1\ 20 - 20\sqrt{-3},\ -20 - 20\sqrt{-3},\ 1.$$

Cette racine appartient donc à l'exposant 6, et les termes de la période qu'elle fournit sont les résidus de septièmes puissances pour le module 41.

Les puissances successives de la racine $r = 6 + 17\sqrt{-3}$ nous donnent d'abord les résidus

$$r = 6 + 17\sqrt{-3},\ r^2 \equiv -11 - \sqrt{-3},\ r^3 \equiv -15 + 12\sqrt{-3},$$
$$r^4 \equiv -5 - 19\sqrt{-3},\ r^5 \equiv -4 + 6\sqrt{-3},\ r^6 \equiv -2 + 9\sqrt{-3},$$
$$r^7 \equiv -20 + 20\sqrt{-3},\ r^8 \equiv 8 - 15\sqrt{-3},\ r^9 \equiv -7 + 5\sqrt{-3},$$
$$r^{10} \equiv -10 - 7\sqrt{-3},\ r^{11} \equiv 10 - 7\sqrt{-3},\ \text{etc.}$$

Puisque nous trouvons $r^7 \equiv r_1$, et que r_1 appartient à l'exposant 6, nous sommes assurés que r appartient à l'exposant $6 \times 7 = 42$, et qu'ainsi nous avons une racine primitive. De plus les résidus des puissances comprises entre r^{11} et r^{20}, inclusivement, se déduisent des précédents par le seul changement de signe du premier élément α, en supposant ces résidus mis sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-3}$. A partir de $r^{21} \equiv -1$, les résidus sont égaux et de signes contraires aux résidus précédents, à partir du premier. Ce n'est pas là une propriété particulière au module 41, elle subsiste, quel que soit le nombre premier p, pour les racines de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Soit en effet r une racine primitive de cette congruence. On aura $r^{\frac{p+1}{2}} \equiv -1$, et par conséquent

$$(3) \qquad r^{\mu+\frac{p+1}{2}} \equiv -r^{\mu}, \qquad r^{\mu} \equiv -r^{p+1-(\frac{p+1}{2}-\mu)} \pmod{p}.$$

La première de ces deux congruences nous montre que, à partir de la puissance $r^{\frac{p+1}{2}}$ qui est congrue à -1, les résidus se reproduisent, au signe près qui doit être changé. La seconde congruence ramène le calcul des résidus qui correspondent aux exposants compris entre $\frac{p-1}{4}$ et $\frac{p+1}{2}$ à celui des résidus qui correspondent à des exposants compris entre o et $\frac{p+1}{4}$. En effet si μ est compris entre $\frac{p+1}{4}$ et $\frac{p+1}{2}$, $\frac{p+1}{2} - \mu$ est compris entre o et $\frac{p-1}{4}$; or soit $r^{\frac{p+1}{2}-\mu} \equiv \alpha + \beta\sqrt{n}$; la racine conjuguée s'en déduit par le seul changement de signe du radical, de sorte que l'on a $r^{\frac{p+1}{2}+\mu} \equiv \alpha - \beta\sqrt{n}$; on aura donc, en vertu des formules 3,

$$r^{\mu} \equiv -\alpha + \beta\sqrt{n}.$$

Ainsi le résidu de la puissance r^{μ} se déduit de celui de la puissance $r^{\frac{p+1}{2}-\mu}$ par le seul changement de signe du premier élément α.

Ces remarques permettent de simplifier la construction de tables d'indices pour la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ analogues à celles que Jacobi a publiées pour la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Les arguments de ces tables seront les indices des racines; et l'on placera l'une au dessous de l'autre les valeurs des éléments α, β des racines qui correspondent à ces indices. Nous donnons ici la table relative au module 41.

$$p = 41\,,\ r = 6 + 17\sqrt{-3}$$

Indices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	α	6	− 11	− 15	− 5	− 4	− 2	− 20	8	− 7
	β	17	− 1	+ 12	− 19	6	9	20	− 15	5
1	− 10	10	7	− 8	20	2	4	5	15	11
	− 7	− 7	5	− 15	20	9	6	− 19	12	− 1
2	− 6	− 1	− 6	11	15	5	4	2	20	− 8
	17	0	− 17	1	− 12	19	− 6	− 9	− 20	15
3	7	10	− 10	− 7	8	− 20	− 2	− 4	− 5	− 15
	− 5	7	7	− 5	15	− 20	− 9	− 6	19	− 12
4	− 11	6	1							
	1	− 17	0							

Voici encore une table semblable pour le module 29 :

$$p = 29\,,\ r = -2 - \sqrt{3}$$

Indices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	α	− 2	7	3	10	− 14	− 12	4	− 4	12
	β	− 1	4	14	− 2	− 6	− 3	− 11	− 11	− 3
1	14	− 10	− 3	− 7	2	− 1	2	− 7	− 3	− 10
	− 6	− 2	14	4	− 1	0	1	− 4	− 14	2
2	14	12	− 4	4	− 12	− 14	10	3	7	− 2
	6	3	11	11	3	6	2	− 14	− 4	1

La théorie de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ conduit a la solution de plusieurs questions d'analyse. Dans une note des *Comptes rendus* (t. 24, p. 1117, 1847). Cauchy arrive a cette conclusion que le polinôme $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est ou bien modulairement irréductible, ou bien égal au produit de deux facteurs modulaires irréductibles du second degré, pour les modules premiers compris dans la formule $p = 5l - 1$, et que la seconde hypothèse a lieu pour le module 29. Il résulte de la théorie de la congruence ci-dessus indiquée que la seconde hypothèse à également lieu pour tous les modules premiers compris dans la formule $5l - 1$. De plus les facteurs modulaires peuvent se mettre sous la forme $x^2 - 2\alpha x + 1$. Du reste ce n'est là qu' un cas particulier d'un théorème plus général :

Si p désigne un nombre premier et m un diviseur de la somme $p+1$, le polynôme $\frac{x^m-1}{x^2-1}$ ou $\frac{x^m-1}{x-1}$, suivant que m est pair ou impair, est toujours égal à un produit de facteurs modulaires irréductibles du second degré et ces facteurs peuvent se mettre sous la forme $x^2-2\alpha x+1$.

Il est facile de former ces facteurs modulaires quand on possède pour le nombre p une table d'indices semblable à celles que nous venons de donner; ces facteurs sont équivalents, suivant le module p, aux facteurs trinômes qui correspondent aux divers couples de racines irrationnelles de la congruence $x^m \equiv 1 \pmod{p}$; or le facteur trinôme qui correspond à l'un de ces groupes, $\alpha \pm \beta\sqrt{n}$, est

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{n})\ (x-\alpha+\beta\sqrt{n})=(x-\alpha)^2-n\beta^2,$$

et comme les nombres α, β vérifient la congruence $\alpha^2-n\beta^2\equiv 1 \pmod{p}$, le trinôme considéré est équivalent, suivant le module p, au trinôme $x^2-2\alpha x+1$. Le coefficient α de ce facteur modulaire est donc l'élément α de l'une des racines $\alpha\pm\beta\sqrt{n}$; il correspond dans la table à l'un des indi-indices multiples de $\frac{p+1}{m}$ et inférieurs à $\frac{p+1}{2}$.

Ainsi pour le module 29 les facteurs modulaires irréductibles du polynôme $x^4+x^3+x^2+x+1$ correspondent aux indices multiples de 6, les valeurs de α sont -12 et -3, qui correspondent respectivement aux indices 6 et 12. On a donc

$$x^4+x^3+x^2+x+1\equiv(x^2-5x+1)\ (x^2+6x+1) \pmod{29},$$

comme on peut le déduire de l'identité

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-5x+1)\ (x^2+6x+1)+29x^2.$$

De même pour le module 41 les facteurs modulaires irréductibles du polynôme $\frac{x^7-1}{x-1}$ correspondent aux racines dont les indices sont multiples de 6; on prendra donc dans la table relative au module 41 les valeurs de α qui répondent à ces indices, savoir -2, 7 et 15, et l'on aura

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\equiv(x^2+4x+1)$$
$$(x^2-14x+1)\ (x^2+11x+1) \pmod{41},$$

comme on peut le vérifier au moyen de l'identité

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - 14x + 1)$$
$$(x^2 + 11x + 1) + 41x^2(4x^2 + 15x + 4)$$

Une théorie des racines complexes de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ a été donnée par Lebesgue dans ses recherches sur les nombres, § IV n° I (Journal de M. Liouville, t. IV, p. 9 à 16). Elle repose comme la notre sur le théorème IV ; mais ce dernier théorème s'y trouve déduit de formules compliquées, établies précédemment, au lieu d'être démontré directement par une méthode qui apprenne à trouver les solutions de la congruence proposée.

8. Outre ces théorèmes, qui appartiennent à la théorie des nombres, nous emploierons les théorèmes suivants, qui dépendent en partie des propriétés des polinômes. Ces théorèmes se trouvent en substance dans divers Mémoires de Cauchy publiés dans les *Comptes-rendus*, en 1847.

Théorème VI.

Soient $F(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$, $\varphi(x) = Bx^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n$ *deux polynômes à coefficients entiers, dont le second n'a pas de racine multiple. Si l'équation* $F(x) = 0$ *est vérifiée par toutes les racines de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *et qu'on désigne par* r *une racine de la congruence* $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}$, *dont le module* p *est une nombre premier relativement à* B, *on aura*

$$F(r) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Démonstration. Puisque le polynôme $F(x)$ admet toutes les racines du polynôme $\varphi(x)$, il est divisible par ce polynôme, et le quotient, calculé par la méthode élémentaire, a pour coefficients des nombres rationnels dont les dénominateurs sont des puissances de B. On peut donc trouver une puissance B^k de B, telle que le quotient $B^k F(x) : \varphi(x)$ n'ait que des coefficients entiers. Désignant par $T(x)$ ce quotient,

$$B^k F(x) = T(x) . \varphi(x).$$

En remplaçant x par r dans cette identité on obtient la congruence $B^k F(r) \equiv 0 \pmod{p}$; car $F(r)$, $\varphi(r)$, $T(r)$ sont des nombres entiers, dont le second $\varphi(r)$ est, par hypothèse, multiple de p. D'ailleurs B et p sont supposés premiers entre eux ; le diviseur p est donc premier avec le facteur B^k et, par conséquent, il divise le second facteur $F(r)$. Quand $B = 1$ le module p peut être un nombre premier ou composé quelconque.

Remarques. 1° Lorsque le calcul qui conduit à l'équation $F(x) = 0$ suppose simplement que x est une racine quelconque de l'équation $\varphi(x) = 0$, il est évident qu'en répétant les mêmes calculs, après avoir remplacé x par x', on arrivera à un résultat dont la seule différence avec le premier consistera dans la substitution de x' à x; on aura donc $F(x') = 0$; toutes le racines x, x' ... du polynôme $\varphi(x)$ seront aussi des racines du polynôme $F(x)$.

2° Quand le polynôme $\varphi(x)$ est irréductible, il suffit que le polynôme $F(x)$ ait une racine commune avec $\varphi(x)$ pour qu'il soit divisible par lui. Dans ce cas notre théorème peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème VII.

Soient F (x) *et* φ (x) *deux polynômes à coefficients entiers dont le second,* φ (x), *est en outre irréductible. Si ces deux polynômes ont une racine commune et qu'on désigne par* r *une racine de la congruence* $\varphi(r) \equiv 0$ (*mod* k), *on aura* $F(r) \equiv 0$ (*mod* k), *pourvu que le coefficient de la plus haute puissance de* x *dans* φ (x) *soit premier avec le module. Cette condition est toujours remplie quand le premier coefficient de* φ (x) *est l'unité.*

9. Nous aurons encore recours dans nos démonstrations à quelques théorèmes démontrés par Cauchy dans les notes I et V de son Mémoire sur la théorie de nombres (Mém. de l'Ac. t. XVII). Lebesgue a exposé ces démonstrations avec beaucoup de clarté dans le Journal de M. Liouville (1854, p. 289) C'est pourquoi nous nous bornerons à un simple énoncé.

Designons par p un nombre premier $n\varpi + 1$
par θ une racine primitive de l'équation $x^p = 1$,
par ρ une racine primitive de l'équation $x^n = 1$,
par t une racine primitive de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$;

posons de plus $\Theta_h = \sum p^{lh} . \theta^{t^l}$, $(l = 0, 1, 2, \ldots p-2)$,

$$\Theta_h \, \Theta_k = R_{h,k} \, \Theta_{h+k}.$$

Les principales propriétés de ces fonctions sont exprimées par les théorèmes suivants :

Théorème VIII.

Si l'exposant h *n'est pas divisible par* n, *on aura*

$$\text{I} \qquad \Theta_h \, \Theta_{-h} = (-1)^{h\varpi} . \, p.$$

THÉORÈME IX.

Si aucun des trois nombres h, k, h + k *n'est divisible par* n, *le quotient* $R_{h,k} = \Theta_h \Theta_k : \Theta_{h+k}$ *est une fonction entière de* ρ *déterminée par la formule*

$$\text{II} \qquad R_{h,k} = \sum \rho^{\text{hinds}} . (\rho^{h+k})^{-\text{ind}(s+1)}, \ (s = 1, 2, \ldots p-2),$$

dans laquelle nous exprimons par ind. x *le plus petit exposant positif* λ *qui vérifie la congruence* $t^\lambda \equiv x$ (*mod* p).

THÉORÈME X.

La fonction de ρ *définie par la formule* (II) *sous la condition qu'aucun des trois nombres* h, k, h − k *ne soit divisible par* n, *vérifie toujours l'équation*

$$\text{(III)} \qquad R_{h,k} \, R_{-h,-k} = p.$$

Dans la cas particulier où $h = 1$ et $k = n - 2$ la formule (II) devient

$$\text{(IV)} \qquad R_{1,n-2} = \sum \rho^{inds(s+1)} = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + .. + a_{12-1} \rho^{n-1} ;$$

la sommation s'étend aux valeurs $s = 1, 2, \ldots p-2$, en sorte que le coefficient a_i de ρ^i est égal au nombre des termes de la suite

$$1.\ 2,\ 2.\ 3,\ 3.\ 4, \ldots\ 5\ (5+1), \ldots (p-2)\ (p-1),$$

dont les indices relativement au module p et à la base t sont de la forme $n\,x + i$.

10. *Diverses classifications des résidus d'un module premier* p.

On appelle système complet de résidus pour un module k les k restes $0, 1, 2, \ldots k-1$ que l'on obtient en divisant les nombres entiers par ce module, ou encore k nombres quelconques respectivement congrus à ces restes suivant le même module. Lorsque le module k est un nombre premier p, au lieu des $p-1$ résidus non divisibles par p, on peut prendre $p-1$ puissances successives d'une racine primitive t du nombre p. Nous laisserons de côté le résidu zéro, auquel sont congrus tous les multiples du module, et nous considérerons la suite

$$\text{(A)} \qquad 1, t, t^2, t^3, \ldots t^{p-2},$$

comme formant un système complet de résidus pour le module p. Soit n un diviseur quelconque du nombre $p-1$ et posons $p = n\varpi + 1$; on peut distribuer les résidus (A) de p en n classes renfermant chacune ϖ résidus. La classification adoptée par Gauss pour le cas où $n = 4$, et par Jacobi pour

la valeur 3 de n, consiste à ranger dans une même classe toutes les puissances de la racine primitive t dont les exposants, divisés par n, donnent le même reste. On peut faire ainsi autant de classifications différentes pour les résidus d'un module premier p qu'il y a de diviseurs du nombre $p-1$; nous les distinguerons entre elles par le nombre n des classes dont elles se composent. Nous appellerons classification du second ordre le partage des résidus de p en deux classes dont l'une renferme toutes les puissances paires de t, les résidus quadratiques, et l'autre, les puissances impaires, les non-résidus quadratiques de p. Généralement nous appellerons classification d'ordre $n^{\text{ième}}$ le partage des résidus en n classes composées chacune de $\frac{p-1}{n}$ termes. La classification du second ordre est la seule qui soit applicable à tous les nombres premiers impairs; celle du 3.me ordre n'est possible qu'autant que le module p est de la forme $3\varpi+1$, celle du 4.me ordre ne l'est que pour les modules premiers $4\varpi+1$, etc.

Dans la classification du quatrième ordre Gauss attribue les caractères 0, 1, 2 et 3 aux quatre classes dans lesquelles il groupe les résidus d'un nombre premier $p=4\varpi+1$, et il nomme caractère biquadratique d'un nombre m non divisible par p le caractère 0, 1, 2 ou 3 de la classe à laquelle appartient la puissance de t congrue à m suivant le module p. Dans cette classification 0 est le caractère biquadratique des résidus biquadratiques, 2 est le caractère des résidus quadratiques qui ne sont pas en même temps résidus biquadratiques. De plus, dans son Mémoire posthume sur les congruences à modules complexes (Werke, II, p. 367) Gauss emploie la notation suivante $C_{qq}\frac{m}{M}=i$ pour exprimer que le caractère biquadratique du nombre m, relativement au module premier M, est i. Nous généraliserons les notations et la terminologie de l'illustre géomètre.

Dans la classification du $n^{\text{ième}}$ ordre nous attribuerons les caractères 0, 1, 2, ... $n-1$, respectivement, aux n classes en lesquelles nous partageons les résidus d'un nombre premier $p=n\varpi+1$, et nous appellerons caractère d'ordre n^e d'un nombre m non divisible par p le caractère de la classe à laquelle appartient la puissance de t congrue à m suivant le module p. Le caractère 0 est celui des résidus de $n^{\text{ièmes}}$ puissances, les caractères 1, 2, ... $n-1$, correspondent aux non résidus de $n^{\text{ièmes}}$ puissances. La classe 0 est indépendante de la base t; mais les autres classes se permutent entre elles,

lorsque l'on prend pour nouvelle base une racine primitive de p dont le caractère d'ordre $n^{\text{ième}}$ relativement à la base t est différent de 1. Nous exprimerons par l'équation $C_n \frac{m}{p} = i$ que i est le caractère d'ordre $n^{\text{ième}}$ de m relativement au module premier p; ainsi $C_4 \frac{m}{p} = o$ exprime que le caractère biquadratique de m relativement à p est o, c'est-à-dire que m est résidu biquadratique de p. Quand le caractère i est différent de o il faut supposer connue la base t de la classification; autrement la connaissance du caractère de m apprendrait seulement que ce uombre n'est pas résidu de $n^{\text{ième}}$ puissance.

Nous poserons $t^n \equiv g \pmod{p}$, et les n classes de $n^{\text{ième}}$ ordre seront

$$\begin{array}{c|l}
0 & 1, g, g^2, g^3, \ldots g^{\varpi-1} \\
1 & t, g^t, g^{2t}, g^{3t}, \ldots g^{(\varpi-1)t}, \\
2 & t^2, g^{t^2}, g^{2t^2}, g^{3t^2}, \ldots g^{(\varpi-1)t^2}, \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n-1 & t^{n-1}, g^{tn-1}, g^2\, t^{n-1}, g^3\, t^{n-1}, g^{(\varpi-1)t^{n-1}}.
\end{array}$$

Nous verrons que pour, chaque valeur de n, il existe une fonction $\psi(\rho)$ qui, consistant en un monôme rationnel formé des facteurs complexes de p définis par la formule II (9), donne lieu à une loi de réciprocité analogue, tant à celle que Jacobi a découverte pour les résidus cubiques, qu'à celles que nous avous fait connaître pour les classifications du 5me ordre et du $7^{\text{ième}}$. Nous distinguerons entre elles ces diverses lois de réciprocité par l'ordre de la classification qui correspond à chacune d'elles : la loi de réciprocité de Jacobi sera pour nous la loi de réciprocité du troisième ordre; celle du cinquième ordre sera la loi de réciprocité relative aux résidus de cinquièmes puissances, et ainsi de suite.

§. *II. Résidus quadratiques.*

11. Faisons $n=2$, $h=1$, dans le théoréme VIII (9); nous aurons

$$\rho = -1, \Theta_1 = \Theta_{-1} = \theta - \theta^t + \theta^{t^2} - \theta^{t^3} + \ldots \theta^{t^{\varpi-2}},$$

$$\Theta_1\, \Theta_{-1} = (-1)^{\varpi}\, p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\, p.$$

Posons pour abréger $\Theta_1 = \Delta$; la valeur de Δ est, au signe près, $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\, p}$;

son signe est tantôt + tantôt – suivant celle des racines primitives de l'équation $x^p = 1$ que l'on désigne par θ. Dans tous les cas on aura

$$(1) \qquad \Delta^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

soit q un autre nombre premier et formons la q^e puissances de la somme alternée Δ; le résultat peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \Delta^q = (\theta^q - \theta^{qt} + \theta^{qt^2} - \ldots - \theta^{qt^{p-2}}) + q.\ \mathrm{F}(\theta),$$

où $\mathrm{F}(\theta)$ désigne une fonction entière de θ dont tous le coefficients sont entiers.

Désignons par i l'indice du nombre q relativement au module p et à la base t, en sorte qu'on ait $t^i \equiv q \pmod{p}$; nous pouvont écrire

$$\theta^q - \theta^{qt} + \theta^{qt^2} - \ldots - \theta^{qt^{p-2}} = \theta^{t^i} - \theta^{t^{i+1}} + \theta^{t^{i+2}} - \ldots \theta^{t^{i+p-2}};$$

or le dernier polynôme est égal à Δ ou à $-\Delta$ suivant que l'indice i est pair ou impair, c'est-à-dire suivant que l'on a $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$ ou $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$;

$$\theta^q - \theta^{qt} + \theta^{qt^2} - \ldots - \theta^{qt^{p-2}} = \left(\frac{q}{p}\right)\Delta,$$

et l'équation (2) multipliée par Δ peut se mettre sous la forme suivante:

$$(3) \qquad \Delta^2 \left[\Delta^{p-1} - \left(\tfrac{q}{p}\right)\right] = q.\ \mathrm{F}(\theta).\ \Delta.$$

Le produit $\mathrm{F}(\theta).\ \Delta$ est une fonction entière de θ dont tous les coefficients sont des nombres entiers; en le désignant par $f(\theta)$ et en remplaçant Δ^2 par sa valeur (1) nous donnous à l'équation (3) la forme suivante:

$$(4) \qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \left[(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)\right] = q.\ f(\theta).$$

Cette équation donne pour $f(\theta)$ une valeur rationnelle indépendante de la racine θ; du reste il est évident que si, remplaçant θ par une autre racine θ' de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1} = o$, on répétait les calculs qui nous ent donné l'équation (4), on retrouverait cette équation, avec la seule différence que θ serait remplacé par θ'. On a donc $f(\theta') = f(\theta)$, et l'on déduit du théorème II (2) que $f(\theta)$ est un nombre entier. Le premier membre de l'équation (4) est donc multiple de q; comme q est premier avec le facteur $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$, il divise l'autre facteur et l'on a

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{p}\right) (\text{mod } q);$$

car la congruence $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{q}\right)$ (mod q) définit le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ On a donc

$$(5) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right).$$

Cette dernière équation exprime la loi de réciprocité de Legendre; on peut l'énoncer de la manière suivante :

« *Si l'on désigne par* p *et* q *deux nombres premier impairs, le nombre* q *est résidu quadratique ou non résidu quadratique de* p, *suivant que le produit* $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ p *est lui-même résidu quadratique ou non résidu quadratique de* q. »

Nous voyons déjà ici que la réciprocité proprement dite n'a pas lieu entre les deux nombres premiers p et q, mais entre l'un des deux nombres et une fonction de l'autre. Cette fonction est ici très-simple. Nous la verrons se compliquer de plus en plus à mesure que l'ordre de la loi de réciprocité deviendra plus élevé.

§. *III. Résidus cubiques.*

12. Conservant toujours les notations du n° 9 faisons $n = 3$, $h = 1$. Les formules I et II nous donneront les équations suivantes :

$$(1) \qquad \Theta_1 \Theta_2 = \Theta_1 \Theta_{-1} = p$$

$$(2) \qquad \Theta_1^3 = R_{1,1} \Theta_1 \Theta_2 = p R_{1,1}$$

$$(3) \qquad R_{1,1} = \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2} = \sum \rho^{ind S} (\rho^2)^{-ind(S+1)} = \sum \rho^{ind S(S+1)},$$

$$(S = 1, 2, 3, \ldots p-2).$$

Si l'on désigne par a_0 le nombre des termes de la suite

$$\text{I} \qquad 1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ \ldots\ S(S+1),\ \ldots\ (p-2)\ (p-1),$$

dont les indices relativement à la base t sont multiples de 3, par a_1, ou par a_2 le nombre de ceux dont les indices sont de la forme $3x+1$ ou $3x+2$, on a

$$(4) \qquad R_{1,1} = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_2)\rho$$

$$R_{2,2} = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_2)\rho^2$$

$$R_{1,1} R_{2,2} = p = (a_0 - a_2)^2 - (a_0 - a_2)(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)^2$$

$$(5) \qquad 4p = (2a_0 - a_1 - a_2)^2 + 3(a_1 - a_2)^2.$$

Soit q un nombre premier différent de p et de 3; désignons par i son indice relativement au module p et à la base t, en sorte que l'on ait $t^i \equiv q$ (*mod* p); et formons la puissance q^e de Θ_1 Nous décomposerons le développement de cette puissance en deux parties, dont l'une renfermera les puissances $q^{\text{ièmes}}$ des termes de Θ_1 et l'autre sera une fonction entière de θ et de ρ dont tous les coefficients seront des nombres entiers multiples de q; on aura de cette manière

$$(6) \qquad \Theta_1^q = \theta^q + \rho^q \theta^{qt} + \rho^{2q} \theta^{qt^2} + \ldots + \rho^{(p-2)q} \theta^{qt^{p-2}} + q\, F(\theta, \rho).$$

13. Supposons d'abord $q = 2$ et remplaçons θ^2 par θ^{t^i} dans le second membre de l'équation (6), qui deviendra

$$\Theta_1^2 = \rho^{-2i}\, \Theta_2 + 2\, F(\theta, \rho),$$

car $\theta^{t^i} + \rho^2 \theta^{t^{i+1}} + \rho^4 \theta^{t^{i+2}} \ldots = \rho^{-2i} (\rho^{2i} \theta^{t^i} + \rho^{2i+2} \theta^{t^{i+1}} + \rho^{2(i+2)} \theta^{t^{i+2}} +) = \rho^{-2i}\, \Theta_2$

L'équation obtenue peut aussi se mettre sous la forme suivante:

$$(A) \quad p\, [R_{1,1} - \rho^i] = {}_2 f \theta, \rho),$$

où $f(\theta, \rho)$ désigne une fonction entière de θ et de ρ dont tous les coefficients sont entiers, à savoir le produit $F(\theta, \rho) . \Theta_1$; il suffit pour effectuer cette transformation de multiplier par Θ_1, et de remplacer Θ_1^2, $\Theta_2 \Theta_1$ par leurs valeurs $p\, R_{1,1}$ et p. Comme θ désigne l'une quelconque des racines primitives de l'équation $x^p = 1$, il est évident qu'en répétant avec une autre racine primite θ' de la même équation les calculs qui ont conduit à la formule (A), on obtiendrait un résultat qui ne différerait de l'équation (A) que par la substitution de θ' à θ. On à donc $f(\theta', \rho) = f(\theta, \rho)$, et, comme les coefficients de $f(\theta, \rho)$ sont des nombres entiers, nous déduisons du théorème auxiliaise I (2) que cette fonction se réduit à une fonction entière de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers, en sorte que nous pouvons poser

$$(B) \quad p\, [(a_0 - a_2) + (a_1 - a_2)\rho - \rho^i] = 2\, A + 2\, B\, \rho,$$

en désignant par A et B deux nombres entiers. Quel que soit l'indice i de 2, on reduira le premier membre de cette équation au premier degré par rapport à p, au moyen des relations $\rho^3 = 1$, $\rho^2 = -1 - \rho$; l'équation (B) sera

identique par rapport à ρ, qui est racine de l'équation irreductible du second degré $x^2 + x + 1 = 0$, et l'on aura

1° Si $i = 3l$, $a_0 - a_2 - 1 \equiv 0$, $a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod 2$,

2° Si $i = 3l + 1$, $a_0 - a_2 \equiv 0$, $a_1 - a_2 - 1 \equiv 0 \pmod 2$.

3° Si $i = 3l + 2$, $a_0 - a_2 + 1 \equiv 0$, $a_1 - a_2 + 1 \equiv 0 \pmod 2$.

D'ailleurs on déduit de l'équation $a_0 + a_1 + a_2 = p-2$ que les trois coefficients a_0, a_1, a_2 sont, ou tous impairs, ou bien l'un impair et les deux autres pairs. La première alternative doit être exclue, par ce qu'elle rendrait impossibles les congruences

$$a_0 - a_2 \pm 1 \equiv o,\ a_1 - a_2 \pm 1 \equiv o \ (mod.\ 2),$$

dont l'une, au moins, doit être vérifiée dans chaque cas. Ainsi des trois coefficients a_0, a_1, a_2 deux sont pairs et un seul est impair;

Si $i = 2l$, c'est-à-dire si 2 est résidu cubique de p, la congruence $a_1 - a_2 \equiv o$ (*mod* 2) montre que a_1 et a_2 sont les deux coefficients pairs; a_0 est donc le coefficient impair;

Si $i = 3l + 1$, la congruence $a_0 - a_2 \equiv o \pmod 2$ nous apprend que a_0 et a_2 sont pairs et qu'ainsi a_1 est le coefficient impair;

Si $i \equiv 3l + 2$ la congruence $a_0 - a_1 \equiv o \pmod 2$, que l'on déduit par soustration des deux congruences correspondantes à ce cas, montre que a_2 est est le coefficient impair. Donc

Théorème I.

Si l'on désigne por e l'indice o, 1 *ou* 2 *de celui des trois coefficients* a_0, a_1, a_2 *de* $R_{1,1}$ *qui est impair, et par* i *l'indice du nombre* 2 *par rapport au module* p *et à la base* t, *on aura.*

$$i \equiv e \ (mod\ 3).$$

Notre théorème exprime en particulier que le nombre 2 est résidu cubique on non résidu cubique de p suivant que le nombre des résidus cubiques de p renfermés dans la suite 1, obtenue en doublaut les $p-2$ premiers nombres triangulaires, est impair ou pair. Nous verrons plus loin que le même théorème donne aussi le *critérium* de Jacobi.

14. Soit q un nombre premier de la forme $3\rho' + 1$. On a, en désignant par i l'indice du nombre q relativement au module p et à la base t,

$$\rho^q = \rho\ ,\ \theta^2 = \theta^{t^i}$$

$$\theta^q + \rho\,\theta^{qt} + \rho^2\,\theta^{qt^2} + \ldots\ldots = \rho^{-i}\,(\rho^i\,\theta^{t^i} + \rho^{i+1}\,\theta^{i+1} + \ldots) = \rho^{-i}\,\Theta_1$$

et l'équation (6) devient

$$(c) \quad \Theta_1 \left[\Theta_1^3 \rho' - \rho^{2i} \right] = q\, F(\theta, \rho).$$

D'ailleurs en élevant à la puissance ρ'^{e} les deux membres de l'équation (1) on trouve

$$\Theta_1^{3q'} = p^{q'} R^{q'}{}_{1,1} = p^{\frac{q-1}{3}} R_{1,1}{}^{\frac{q-1}{3}};$$

en substituant cette valeur dans l'équation (c) et multipliant par θ_2, on obtient

$$(D) \quad p.\left[p^{\frac{q-1}{3}} R_{1,1}{}^{\frac{q-1}{3}} - \rho^{2i}\right] = q.\ \Theta_2\, F(\theta, \rho).$$

Comme dans cette équation ρ désigne l'une quelconque des deox racines primitives de l'équation $x^3 = 1$, nons pouvons y remplacer ρ par ρ^2, ce qui change Θ_2 en Θ_1 et $R_{1,1}$ en $R_{2,2}$. On a donc aussi

$$(E) \quad p\ \left[p^{\frac{q-1}{3}} R_{2,2}{}^{\frac{q-1}{3}} - \rho^{i}\right] = q.\ \Theta_1\, F(\theta, \rho^2).$$

Enfin si l'on retranche de l'équation (D) l'équation (E) multipliée par ρ^i, on trouve

$$(F) \quad p^{q'+1}\left[R^{q'}{}_{1,1} - \rho^i R^{q'}{}_{2,2}\right] = q\left[\Theta_2\, F(\theta, \rho) - \rho^i\, \Theta_1\, F(\theta, \rho^2)\right] = q.\, f(\theta, \rho).$$

Dans cette équation θ désigne l'une quelconque des racines primitives de l'équation $x^p = 1$, en sorte qu'elle ne cesse pas d'être vérifiée lorsq' on y remplace θ par une autre racine primitive θ'. On a donc $f(\theta', \rho) = f(\theta, \rho)$, quelles que soient les racines primitives de l'équation $x^p = 1$, désignées ici par θ et θ'. D'ailleurs $f(\theta, \rho)$ désigne une fonction entière de θ et de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers. Les conditions du théorème auxiliaire I sont donc remplies et nous en déduisons que

$$f(\theta, \rho) = A + B\rho,$$

A et B désignant deux nombres entiers. Ces deux nombres sont multiples de $p^{q'+1}$, car en effectuant les calculs indiqués dans le premier membre de l'équation (F) et réduisant les puissances de ρ au moyen des relations $\rho^3 = 1\ \rho^2 = -1 - \rho$, on pourra mettre cette équation sous la forme

$$p^{q'+1}\left[P + Q\rho\right] = q\left[A + B\rho\right),$$

P et Q désignant deux nombres entiers. Cette équation n'étant que du premier degré en ρ doit être identique, en sorte que l'on a

$$p^{q'+1}\, Q = q\ A,\ p^{q'+1}\ q\ B;$$

et comme p est premier avec q on conclut de ces formules que A et B sont divisibles par p^{q+1}. Posant donc

$$A = p^{q'+1} M, \; B = p^{q'+1} N,$$

$$R_{1,1} = \varphi(\rho) = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2,$$

on mettra l'équation (F) sous la forme

$$(7) \quad \varphi\overline{(\rho)}^{q'} - \rho^i \, \varphi\overline{(\rho^2)}^{q'} - q\,(M + N\rho) = o$$

Désignons par $F(x)$ ce que devient cette équation quand on y remplace ρ par x; $F(x)$ sera un polynôme entier à coefficients entiers. Comme l'équation $F(x) = o$ est vérifiée, en vertu de la formule (7), par une racine ρ de l'équation irréductible $x^2 + x + 1 = 0$, nous déduisons du théorème VII (8) que si l'on désigne par r une racine de la congruence $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, on aura $F(r) \equiv 0 \pmod{q}$; donc

$$(8) \quad \overline{\varphi(r)}^{q'} - r^i \, \varphi\overline{(r^2)}^{q'} \equiv 0 \pmod{q}.$$

D'ailleurs en appliquant le même théorème à l'équation

$$\varphi(\rho)\,\varphi(\rho^2) - p = o$$

on en déduit la congruence $\varphi(r)\,\varphi(r^2) - p \equiv o \pmod{q}$, d'où l'on conclut qu'aucun des deux nombres $\varphi(r)$, n'est divisible par q, en sort que, désignant par t_1 la base d'un système d'indices pour le module q, on pourra trouver un indice j tel que l'on ait

$$\varphi(r) \equiv t_1^{\,i}\,\varphi(r^2) \pmod{q}.$$

Les deux racines de la congruence $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{q}$ sont $t_1^{q'}$ et $t_1^{2q'}$; nous prendrons $r \equiv t_1^{q'} \pmod{q}$, et la formule (8) divisée par $\varphi(r^2)$ deviendra

$$t_1^{jq'} - t_1^{iq'} \equiv o, \quad t_1^{(j-i)q'} \equiv 1 \pmod{q}.$$

L'exposant $(j-i)\,q'$ doit donc être un multiple de $3\,q'$, en sorte qu'on a

$$(9). \quad j \equiv i \pmod{3}.$$

On voit par cette congruence que les indices j et i sont en même temps multiples de 3 ou non multiples de 3; en d'autres termes:

Théorème II.

« *Le nombre* q *est résidu cubique ou non résidu cubique de* p, *suivant que le rapport* $\frac{\varphi(r)}{\varphi(r^2)}$ *est lui-même résidu cubique ou non résidu cubique de* q ».

Plus généralement

THÉORÈME III.

« *La classe du nombre* q, *relativement au module* p *et à la base* t *est la même que celle du rapport* $\varphi(r) : \varphi(r^2)$ *relativement au module* q *et à la base* t_1 ».

15. Ces théorèmes déterminent les caractères cubiques d'un nombre premier $3q' + 1 = q$, relativement aux nombres premiers $p = 3\varpi + 1$, au moyen de congruences linéaires vérifiées, suivant le module q, par les coefficients a_0, a_1, a_2 des facteurs complexes $R_{1,1}$ de ces nombres p. Soit $q = 7$; les résidus cubiques du nombre 7 sont $+1$ et -1; pour que 7 soit résidu cubique d'un nombre premier p dont $a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2$ est le facteur complexe désigné par $R_{1,1}$ il faut et il suffit que le rapport $\frac{a_0+2a_1+4a_2}{a_0+5a_1+2a_2}$ soit congru à $+1$ ou à -1, suivant le module 7, ce qui exige la vérification de l'une des deux congruences $a_1 \equiv a_2$, ou $2a_0 \equiv a_1 + a_2$ (mod 7). Le caractère cubique du nombre 7 relativement à tous les nombres premiers $3\varpi + 1$ dont les facteurs complexes $R_{1,1} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2$ vérifient l'une des congruences $a_1 \equiv a_2$, $2a_0 \equiv a_1 + a_2$ (*mod* 7), est 0.

Nous nous contenterons de cet exemple, par ce qu'il est plus simple de déterminer les caractères cubiques des nombres premiers relativement à un module premier $p = 3\varpi + 1$ par des congruences entre le deux nombres L et M qui vérifient l'équation

$$4p = L^2 + 27M^2.$$

16. Afin d'exprimer le rapport $\varphi(r) : \varphi(r^2)$ au moyen des nombres L et M, nous désignerons par β la somme $2r + 1 \equiv 2t_1^{q'} + 1$ (mod q), en sorte que β sera l'une des deux racines de la congruence $\beta^2 + 3 \equiv 0$ (mod q). On aura donc $r = \frac{-1+\beta}{2}$, $r^2 \equiv \frac{-1-\beta}{2}$ (mod q); en substituant ces valeurs dans le rapport $\varphi(r) : \varphi(r^2)$, que nous désignons par K, nous trouvons

$$K \equiv \frac{(2a_0 - a_1 - a_2) + \beta(a_1 - a_2)}{(2a_0 + a_1 - a_2) - \beta(a_1 - a_2)} \pmod{q}$$

D'un autre côté l'équation $4p = L^2 + 27M^2$ n'admet qu'une seule solution en nombres entiers et positifs, et nous avons démontré dans une note présentée à l'Académie des sciences (*Comptes-rendus*, t. 79, p. 1403) que si l'on

désigne par L celle des deux racines du carré L^2 qui, divisée par 3, donne 1 pour reste, on a

$$2a_0 - a_1 - a_2 = L, \quad a_1 - a_2 = 3M;$$

notre rapport K devient donc

$$(10) \quad K \equiv \frac{L + 3\beta M}{L - 3\beta M} \pmod{q}.$$

Le signe de la différence $a_1 - a_2$ dépend du choix de la base t, adoptée pour le calcul du facteur complexe $R_{1,1}$ de p; si l'on prend pour nouvelle base une racine primitive de p, dont le caractère cubique soit 2 relativement à t, les classes 1 et 2 s'échangent entre elles, ainsi que les deux coefficients a_1, E, en sorte que $a_1 - a_2$ et M changent de signe. Les deux nombres a_0 et e sont indépendants du choix de la base t. Quand la base t est connue, on peut déterminer le signe de M au moyen de la congruence

$$a_0 + a_1 t^{\varpi} + a_2 t^{2\varpi} \equiv 0 \pmod{p},$$

qui se déduit du théorème développé par Cauchy dans la note V de son Mémoire sur la théorie des nombres (Mem. de l'Ac. des Sciences, t. XVII, p. 455). En combinant cette congruence avec celle-ci $t^{2\varpi} + t^{\varpi} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ on lui donne la forme suivante :

$$(2a_0 - a_1 - a_2) + (2t^{\varpi} + 1)(a_1 - a_0) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le signe du nombre M est donc déterminé par la congruence

$$(11) \qquad L + (2t^{\varpi} + 1)\, 3M \equiv 0 \pmod{p}.$$

Les théorèmes du n° 14 pourront donc être remplacés par les suivants, dûs à Jacobi :

Théorème IV.

« *Le nombre premier* q *sera résidu ou non résidu cubique de* p, *suivant que le rapport* $\frac{L + 3\beta M}{L - 3\beta M}$ *sera lui-même résidu où non résidu cubique de* q ».

Théorème V.

« *Le nombre* q *appartiendra à la classe* 1 *ou* 2 *relativement au mo-*

dule p *et à la base* t, *suivant que le rapport* $\frac{L + 3\beta M}{L - 3\beta M}$ *sera lui-même de la classe* 1 *ou* 2 *relativement au module* q *et à la base* t_1 ».

17. On déduit aisément de ces thèorèmes les critériums donnés par Jacobi pour décider à quelle classe de résidus appartient un nombre premier q donné relativement à un nombre premier $p = \frac{L^2 + 27 M^2}{4}$.

Soit donné $q = 7$. Prenant $t_1 = 3$ nous partageons les six résidus du nombre 7 en 3 groupes 1, 6 ; 3, 4 ; 2, 5, dont les caractères cubiques sont respectivement 0, 1 et 2. D'ailleurs $\beta \equiv 1 + 2.\ 3^2 \equiv -2$, $3\beta \equiv 1$ (*mod* 7). Le rapport K est donc équivalent au rapport $\frac{L + M}{L - M}$. Le nombre 7 sera résidu cubique de p, si ce rapport est résidu cubique de 7, c'est-à-dire s'il est congru à $+1$ ou à -1, suivant le module 7 ; or les congruences

$$\frac{L + M}{L - M} \equiv +1 \text{ ou } \equiv -1 \ (mod.\ 7.)$$

donnent respectivement $M \equiv 0$ (mod. 7), et $L \equiv 0$ (mod. 7). Donc les nombres premiers $3\varpi + 1$ dont 7 est résidu cubique sont tous les nombres premiers compris dans les deux formules quadratiques

$$p = \frac{x^2 + 27.49 y^2}{4}, \quad p = \frac{49 x^2 + 27 y^2}{4};$$

de même que les nombres premiers dont 7 est résidu quadratique sont les nombres premiers compris dans les formes linéaires $28x + (1, 3, 9, 19, 25, 27)$. Les critériums qui expriment que le nombre 7 est de la classe 1 relativement au nombre premier $\frac{L^2 + 27 M^2}{4}$ s'obtiendront de même en égalant la valeur de l'expression $\frac{L + M}{L - M}$ (*mod.* q.) à l'un des nombres 3 ou 4 dont se compose la classe 1 pour le module 7 ; on obtient ainsi les critériums $L \equiv 2M$ et $L \equiv 4M$ (mod 7). En changeant le signe de M on obtient les critériums qui caractérisent la classe 2, savoir $L \equiv 5M$, $L \equiv 3M$ (mod 7.)

Ainsi le nombre 7 relativement au module premier $p = \frac{L^2 + 27 M^2}{4}$ appartient à la classe

0	Si $M \equiv 0$ ou $L \equiv 0 \pmod 7$
1	$L \equiv 2M, 4M,$
2	$L \equiv 5M, 3M.$

Pour compléter les critérions des classes 1 et 2 il faut ajouter que la base t du système d'indices relativement au module p doit verifier la congruence

$$(11) \qquad L + (1 + 2t^{\varpi})\, 3M \equiv 0 \pmod p.$$

18. Nous avons trouvé 6 critériums cubiques, pour le nombre 7, également partagés entre les trois classes 0, 1 et 2. Il en est de même pour tout nombre premier q de la forme $3q' + 1$, le nombre des critériums, cubiques est toujours $q - 1$ et ces critériums sont toujours également partagés entre les classes 0, 1 et 2, en sorte que le nombre des critériums distincts est toujours $\frac{q-1}{3}$ pour chaque classe.

En effet, les racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ sont au nombre de $q - 1$, et à deux racines différentes correspondent toujours deux critériums non équivalents. D'abord aux deux racines $+1$ et -1 correspondent les critériums $M \equiv 0$, $L \equiv 0 \pmod q$; et ce sont les seules racines qui puissent donner ces critériums, puisqu'en supposant $M \equiv 0$ dans le rapport $K \equiv \frac{L + 3\beta M}{L - 3\beta M}$ on trouve $K \equiv 1 \pmod q$ et en supposant $L \equiv 0$, on trouve $K \equiv -1 \pmod q$. Pour les autres racines, comme aucun des deux nombres L ou M n'est multiple de q, on pourra poser

$$\frac{L}{3M} \equiv z \pmod q, \text{ et } K \equiv \frac{z + \beta}{z - \beta} \pmod q,$$

d'où $$(12) \qquad z \equiv -\beta . \frac{1 + K}{1 - K} \pmod q.$$

Les seules valeurs de K qui déterminent pour z une valeur infinie ou une valeur nulle sont $K = 1$ et $K = -1$. En égalant K aux autres racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ on obtient pour z des valeurs congrues à des racines de la même congruence; de plus les valeurs de z, qui correpondent à des valeurs non congrues entre elles de K, sont elles mêmes non congrues entre elles, car si deux racines distinctes α et α' substituées à K dans la formule (12) déterminaient pour z deux valeurs équivalentes suivant le module q, ou aurait

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \equiv \frac{1+\alpha'}{1-\alpha'} \pmod{q},$$

$$\text{ou } 2(\alpha' - \alpha) \equiv 0 \pmod{q};$$

Les deux racines α et α' seraient donc équivalentes, contrairement à l'hypothèse. Donc les $q-1$ racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ déterminent $q-1$ critériums distincts, dont chacun consiste en une congruence linéaire de la forme $a\,\mathrm{L} + b\,\mathrm{M} \equiv 0 \pmod{q}$; les $\frac{q-1}{3}$ résidus cubiques de q dont les indices relativement à la base t_1 sont de la forme $3x+1$ donnent $\frac{q-1}{3}$ critériums cubiques de la classe 1, et les autres, $\frac{q-1}{3}$ critériums de la classe 2.

Désignons par m la valeur de l'expression $-3\beta\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \pmod{q}$, et supposons que la racine α soit de la classe i relativement au nombre q et à la base t_1; le critérium $\mathrm{L} \equiv m\,\mathrm{M}$, apprendra que le nombre q appartient à la classe i relativement au module premier $p = \frac{\mathrm{L}^2 + 27\,\mathrm{M}^2}{4}$ et à l'une quelque des racines primitives t de p, qui vérifient la formule (11).

Comme le nombre des valeurs de m, différentes de 0 et de ∞, est $q-3$, et que toutes ces valeurs sont renfermés dans la suite.

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ q-1,$$

tous les termes de cette suite, à l'exclusion de deux, sont des valeurs de m, et correspondent à des critériums cubiques de q. Il est facile de déterminer à priori quels sont les deux termes exclus : ce sont les racines de la congruence

$$x^2 + 27 \equiv 0 \pmod{q};$$

car si l'on avait simultanément

$$\mathrm{L} \equiv m\,\mathrm{M} \text{ et } m^2 \equiv -27 \pmod{q},$$

on en conclurait

$$\mathrm{L}^2 \equiv m^2\,\mathrm{M}^2 \equiv -27\,\mathrm{M}^2,\ \mathrm{L}^2 + 27\,\mathrm{M}^2 = 4p \equiv 0 \pmod{q}$$

ce qui est évidement impossible.

19. Comme les critériums de la classe 0 sont indépendants du signe de M, dans leur ensemble, il est nécessaire qu'ils soient déterminés par des valeurs de m liées entre elles deux à deux par la relation $m' = q - m$. Au contraire les criteriums des classes 1 et 2 passent d'une classe à l'autre par

le changement du signe de M. Ainsi quand on connaît les critériums de la classe 1, on en déduit ceux de la classe 2 au moyen de la relation $m' = q - m$.

On démontre aisément ces propriétés des critériums cubiques au moyen de la formule qui sert au calcul de m

$$m \equiv -3\beta \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \pmod{q}.$$

Si deux racines α el α' donnent respectivement m et $m' = q - m$, on a

$$3\beta \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \equiv -3\beta \frac{1+\alpha'}{1-\alpha'}, \pmod{q}$$

$$-\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \equiv \frac{1+\alpha'}{1-\alpha'}, \quad \alpha\alpha' \equiv 1 \pmod{q}.$$

si donc α est de la classe i, α' est de la classe $2i \pmod 3$. Le critérium $L \equiv m M$ sera de la classe i et le critérium $L \equiv m' M \pmod q$, de la classe $2i \pmod 3$. Dans le cas où $i = 0$ les deux classes i et $2i$ sont identiques ; les deux critériums $L \equiv m M$ et $L \equiv m' M$ appartiennent en même temps à la classe 0. Mais quand le nombre i est égal à 1 ou à 2, les deux critériums appartiennent l'un à la classe 1 et l'autre à la classe 2.

On peut aussi abreger le calcul des critériums cubiques d'un nombre q en remarquant que les critériums d'une même classe peuvent se distribuer deux à deux en différents groupes tels que les deux critériums d'un même groupe, $L \equiv m M$, $L \equiv m' M \pmod q$, vérifient la congruence

$$m m' + 27 \equiv 0 \pmod{q};$$

les valeurs m et m', qui correspondent à chacun de ces groupes, sont déterminées par des racines α et $q - \alpha$, lesquelles appartiennent à une même classe.

20. Soit $q = 13$ et prenons $t_1 = 2$, ce qui donne $\beta \equiv 1 + 2.\ 2^4 \equiv 7$, $3\beta \equiv -5$. Les valeurs de m seront déterminées par la formule

$$m \equiv 5 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \equiv 8 \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \pmod{13}.$$

Les résidus cubiques du nombre 13 sont 1, 5, 8, 12 ; aux deux racines 1 et 12 correspondent les critériums $M \equiv 0$, $L \equiv 0 \pmod{13}$; si l'on prend $\alpha = 5$, la formule précedente donne $m = 12$. Les critériums cubiques de la classe 0 sont donc

$$0,\ L \equiv 0,\ M \equiv 0,\ L \equiv M,\ 12\,M \pmod{13}.$$

Il résulte de là que les nombres premiers p dont 13 est résidu cubique sont les nombres premiers compris dans les formules quadratiques.

$$p = \frac{x^2 + 27.\,169\,y^2}{4}, \quad p = \frac{169\,x^2 + 27\,y^2}{4},$$

$$p = \frac{(13\,x \pm y)^2 + 27\,y^2}{4}.$$

Les racines de la classe 1, pour le module 13 et la base 2, sont 2, 10, 3, 11; en les substituant successivement à α dans la formule $m \equiv 8\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \pmod{13}$ on trouve les quatre critériums cubiques de la classe 1,

$$1,\ \mathrm{L} \equiv 3\,\mathrm{M},\ 4\,\mathrm{M},\ 7\,\mathrm{M} \text{ ou } 11\,\mathrm{M} \pmod{13},$$

et l'on en déduit ceux de la classe 2 par le changement du signe de M, ce qui donne

$$2,\ \mathrm{L} \equiv 2\,\mathrm{M},\ 6\,\mathrm{M},\ 9\,\mathrm{M},\ 10\,\mathrm{M} \pmod{13}.$$

21. Soient $q = 19$, $t_1 = 2$. On aura $\beta \equiv 1 + 2.\ 2^6 \equiv -4 \pmod{19}$,

$$m \equiv 12\,\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \equiv 7\,\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \pmod{19}.$$

Les résidus cubiques de 19 sont ± 1, ± 7, ± 8, auxqnels correspondent les critériums cubiques de la classe 0,

$$\mathrm{L} \equiv 0,\ \mathrm{M} \equiv 0,\ \mathrm{L} \equiv \pm 3\,\mathrm{M},\ \pm 9\,\mathrm{M} \pmod{19}.$$

Les nombres premiers p dont 19 est résidu cubique sont donc les nombres premiers renfermés dans les formules quadratiques

$$p = \frac{x^2 + 27.\,(19\,y)^2}{4}, \quad p = \frac{(19\,x)^2 + 27\,y^2}{4},$$

$$p = \frac{(19\,x \pm 3\,y)^2 + 27\,y^2}{4}, \quad p = \frac{(19\,x + 9\,y)^2 + 27\,y^2}{4}.$$

Les racines de la classe 1, pour le module 19 et pour la base 2, sont ± 2, ± 5, auxquelles correspondent les critériums de la classe 1

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} \equiv 1, 2, 11, 13, 14, 15 \pmod{19};$$

les critériums de la classe 2 sont donc

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} \equiv 4, 5, 6, 8, 17, 18 \pmod{19}.$$

22. Pour $q = 31$, on prendra $t_1 = 3$; d'où $\beta \equiv 1 + 2.3^{10} \equiv 20 \pmod{31}$;

$$m \equiv 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \pmod{31}.$$

Un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire dans les numéros précédents donnera, pour les trois classes de critériums cubiques du nombre premier 31, les formules suivantes

0	$M \equiv 0, \frac{L}{M} \equiv 0, 5, 6, 7, 11, 20, 24, 25, 26 \pmod{31}.$
1	$\frac{L}{M} \equiv 3, 8, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 27, 30.$
2	$\frac{L}{M} \equiv 28, 23, 19, 17, 15, 13, 10, 9, 4, 1.$

Comme les deux classes 1 et 2 s'échangent entre elles, quand le nombre M change de signe, il faut se rappeler que le signe auquel se rapporte notre tableau est déterminé par la formule

$$(11) \quad L + (1 + 2t^{\frac{p-1}{3}})\, 3M \equiv 0 \pmod{p},$$

où t désigne la racine primitive de p choisie comme base de classification. Quand au signe de L, nous avons vu qu'il est déterminé indépendamment de t au moyen de la congreence $L \equiv 1 \pmod{3}$. Les valeurs numériques des deux nombres L et M sont connues par la formule

$$4p = L^2 + 27M^2.$$

23. On peut établir pour les nombres premiers $3q' - 1$, relativement aux nombres premiers $3\varpi + 1$, des théorèmes analogues aux précédents, en recourant aux racines complexes de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, dont nous avons donné plus haut (5 et 6) la théorie.

Comme -3 est non résidu quadratiqe du nombre premier $q = 3q' - 1$, les racines de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$ peuvent se mettre sous la forme $\alpha + 6\sqrt{-3}$ et sont déterminés par la congruence

$$a^2 + 36^2 \equiv 1 \pmod{q}.$$

soit $r = \alpha + 6\sqrt{-3}$ une racine primitive de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$. Nous la prendrons comme base d'un système d'indices et nous partagerons toutes les racines de notre congruence binôme en trois classes 0, 1 et 2, en rapportant à la classe 0 celles dont les indices sont multiples de 3, à la classe 1 ou à la classe 2, celles dont les indices divisés par 3 donnent le reste 1 ou le reste 2.

Le théorème de Jacobi, que nous allons démontrer, est fondé sur la considération du rapport $K = \frac{L - 3\sqrt{-3}\,M}{L + 3\sqrt{-3}\,M}$. Ce rapport est racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$; si l'on désigne par j son indice relativement au module q et à la base r, et par i l'indice de q relativement au module premier $p = \frac{L^2 + 27\,M^2}{4}$ et à l'une des bases t qui vérifient la formule (11), ces deux indices satisfont toujours à la congruence $j \equiv i \pmod{3}$, en sorte que le nombre q est résidu cubique ou non résidu cubique de p, suivant que le rapport K est lui-même résidu cubique ou non résidu cubique de q.

D'abord le rapport K vérifie la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$. En effet, on peut mettre la puissance q^e du binôme $L + 3\sqrt{-3}\,M$ sous la forme.

$$(L + 3\sqrt{-3}\,M)^q = L^q + 3^q\,M^q\,(-3)^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{-3} + q\,(P + Q\sqrt{-3}).$$

Comme -3 est non résidu quadratique de q, on a $(-3)^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$; ayant donc égard au théorème de Fermat nous déduisons de la formule précédente

$$(L + 3\sqrt{-3}\,M)^q \equiv L - 3\sqrt{-3}\,M \pmod{q}.$$

De même $$(L - 3\sqrt{-3}\,M)^q \equiv L + 3\sqrt{-3}\,M \pmod{q}.$$

Donc $$\left(\frac{L + 3\sqrt{-3}\,M}{L - 3\sqrt{-3}\,M}\right)^q \equiv \frac{L - 3\sqrt{-3}\,M}{L + 3\sqrt{-3}\,M},$$

$$\left(\frac{L - 3\sqrt{-3}\,M}{L + 3\sqrt{-3}\,M}\right)^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Le rapport K est donc bien racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, de sorte qu'il peut être représenté, suivant le module q, par une puissance r^j de la racine primitive r.

21. Dans la formule (6) du N° 12 remplaçons ρ^q, θ^q par leurs valeurs ρ^2, θ^{t^i} où $t^i \equiv q \pmod{p}$; la première partie du second membre deviendra

$$\theta^{t^i} + \rho^2\,\theta^{t^{i+1}} + \rho^4\,\theta^{t^{i+2}} + \ldots = \rho^i\,(\rho^{2i}\,\theta^{t^i} + \rho^{2(i+1)}\,\theta^{t^{i+1}} + \ldots) = \rho^i\,\Theta_2,$$

et nous aurons

$$\Theta_1^q = \rho^i\,\Theta_2 + q\,F(\theta, \rho), \quad \Theta_1^{q+1} = \rho^i\,p + q\,\Theta_1\,F(\theta, \rho).$$

D'un autre côté la formule $\Theta_1^2 = R_{1,1}\,p$ donne $\Theta_1^{q+1} = R_{1,q'}\,p^{q'}$, en sorte que la dernière équation devient

$$(A)\ R_{1,q'}\,p^{q'} = \rho^i\,p + q\,\Theta_1\,F(\theta, \rho).$$

Le changement de ρ en ρ^2 dans cette équation n'empêche pas qu'elle soit

vérifiée puisque ρ y désigne l'une quelconque des racines cubiques imaginaires de l'unité; on obtient par ce changement

$$\text{(B)} \quad R_{2,}{}^{q'}{}_{2}\, p^{q'} = \rho^{2i} p + q\, \Theta_2\, F(\theta, \rho^2).$$

En combinant par soustration les équations (A) et (B), après avoir multiplié la première par ρ^i, on obtient l'équation

$$\text{(C)} \quad p^{q'} [R_{2,}{}^{q'}{}_{2} - \rho^i R_{1,}{}^{q'}{}_{1}] = q\, [\Theta_2\, F(\theta, \rho^2) - \rho^i\, \Theta_1\, F(\theta, \rho)] = q\, f(\theta, \rho).$$

où $f(\theta, \rho)$ désigne une fonction entière de θ et de ρ dont tous les coefficients sont entiers. De là et de ce que cette équation ne cesserait pas d'être vérifiée si l'on y remplaçait θ par tout autre racine primitive de l'équation $x^p = 1$, nous déduisons, en appliquant le théorème auxiliaire I, que $f(\theta, \rho)$ est une fonction entière de ρ que nous pouvons mettre sous la forme $A + B\rho$, A et B désignant deux nombres entiers. D'ailleurs le premier membre de l'équation (c) pouvant se mettre sous une forme semblable $p^{q'}(P + Q\rho)$, on conclura de cette équation, identique alors par rapport à ρ, que les deux nombres A et B sont divisibles par $p^{q'}$; en désignant les deux quotients par a et b, nous pourrons remplacer la formule (c) par l'équation

$$(13) \quad R_{2,}{}^{q'}{}_{2} - \rho^i R_{1,}{}^{q'}{}_{1} - q\,(a + b\rho) = 0.$$

25. Désignons par $F(x)$ le polynôme qu'on obtient en remplaçant ρ par x dans le premier membre de la dernière équation. Comme l'équation $F(x) = o$ est vérifiée, en vertu de la formule (13), par une racine de l'équation irréductible $x^2 + x + 1 = 0$, on conclut du théorème VII (8) qu'elle se change en congruence quand on y remplace x par une racine de la congruence $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, c'est-à-dire par $r^{q'}$ ou par $r^{2q'}$. Désignant donc $R_{1,1}$ par $\varphi(\rho)$ on a la congruence

$$\varphi(r^{2q'})^{q'} \equiv r^{iq'}\, \varphi(r^{q'})^{q'} \pmod{q}.$$

D'ailleurs $\varphi(r^{2q'}) : \varphi(r^{q'}) - (L + 3(1 + 2r^{2q'})M) : (L + 3(1 + 2r^{q'})M)$; de plus $1 + 2r^{q'}$, et $1 + 2r^{2q'}$ sont les deux racines de la congruence $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{q}$; si donc la racine primitive r a été choisie de manière à vérifier la congruence

$$(14) \quad 1 + 2r^{q'} \equiv \sqrt{-3} \pmod{q},$$

le rapport $\varphi(r^{2q'}) : \varphi(r^{q'})$ est équivalent au rapport K, suivant le module q, et l'on a $K^{q'} \equiv r^{iq'} \pmod{q}$. En désignant par j l'indice de K, c'est-à-dire l'exposant entier et positif qui vérifié la congruence

$$(15) \quad K = \frac{L - 3\sqrt{-3}\,M}{L + 3\sqrt{-3}\,M} \equiv r^i \pmod{q},$$

on conclut du résultat obtenu que les deux indices j et i vérifient la congruence $j q' \equiv i q'$ (mod $3 q'$), d'où l'on déduit $j \equiv i$ (mod 3). Donc

THÉORÈME VI.

Soit q *un nombre premier* $3 q' - 1$. *Le nombre premier* q *est résidu cubique du nombre premier* $p = \frac{L^2 + 27 M^2}{4}$ *si le rapport* $\frac{L - 3\sqrt{-3}\, M}{L + 3\sqrt{-3}\, M}$ *est lui-même résidu cubique de* q ; *il est non résidu cubique dans le cas contraire.*

THÉORÈME VII.

Le caractère cubique 0, 1 *ou* 2 *du nombre* q *relativement au module* p *et à l'une des bases* t, *qui vérifient la congruence*

$$(11) \quad L + 3(1 + 2 t_\varpi) M \equiv 0 \pmod{p}.$$

est le même que celui du rapport $\frac{L - 3\sqrt{-3}\, M}{L + 3\sqrt{-3}\, M}$ *relativement au module* q *et à l'une des bases* r *propres à vérifier la congruence.*

$$(14) \quad 1 + 2 r^{q'} \equiv \sqrt{-3} \pmod{p}.$$

26. Soit $q = 5$. Les racines de la congruence $x^6 \equiv 1$ (mod 5) rangées suivant l'ordre croissant de leurs indices, relativement à la base $r = 3(1 + \sqrt{-3})$, sont

$$1,\ 3(1 + \sqrt{-3}),\ 2(1 - \sqrt{-3}),\ -1,\ 2(1 + \sqrt{-3}),\ 3(1 - \sqrt{-3});$$

d'ailleurs $r^{q'} = r^2 \equiv 2(1 - \sqrt{-3})$, $1 + 2r^2 \equiv -4\sqrt{-3} \equiv \sqrt{-3})$ en sorte que, la base choisie r vérifiant la condition (14), le caractère cubique de 5, relativement au module p et à la base t, est le même que celui du rapport K, relativement à 5 et à la base $r = 3(1 + \sqrt{-3})$. Les critériums propres à distinguer les nombres premiers p dont 5 est résidu cubique s'obtiennent en égalant le rapport K aux résidus cubiques de 5, à savoir $+1$ et -1. On obtient ainsi les deux critériums de la classe o

$$M \equiv 0,\ L \equiv 0 \pmod{5}.$$

Ainsi les nombres premiers $3\varpi + 1$ dont 5 est résidu cubique sont les nombres premiers refermés dans les deux formules

$$p = \frac{x^2 + 25 . 27 y^2}{4},\quad p = \frac{25 x^2 + 27 y^2}{4}.$$

Du reste quel que soit le nombre $q = 3q' - 1$, les deux nombres 1 et -1 appartiennent toujours à la classe 0 parmi les racines de la congruence $x^{3q'} \equiv 1 \pmod{q}$; les deux critériums $M \equiv 0$, $L \equiv 0 \pmod{q}$, qui leur correspondent toujours, appartiennent donc aussi à la classe 0. Nous avons déjà trouvé ce résultat pour les nombres premiers q compris dans la formule $3q' + 1$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Un nombre premier impair quelconque q, autre que 3, est résidu cubique de tous les nombres premiers p renfermés dans les formules

$$p = \frac{x^2 + 27q^2y^2}{4}, \quad p = \frac{q^2x^2 + 27y^2}{4}.$$

Pour calculer le critérium cubique qui correspond à une racine complexe $r' = \sigma + \tau\sqrt{-3}$. Nous emploierons la formule

$$(16) \quad \frac{L}{M} \equiv \frac{9\tau}{\sigma - 1} \pmod{q},$$

que l'on obtient en exprimant que le rapport K est congru à r', suivant le module q, ce qui donne

$$L - 3\sqrt{-3}\,M \equiv L\sigma - 9M\tau + \sqrt{-3}\,(3M\sigma + L\tau) \pmod{q};$$

$$L \equiv \frac{9\tau}{\sigma - 1}M \equiv \frac{-3(\sigma + 1)}{\tau}M \pmod{q}.$$

On trouve une condition $3\tau^2 \equiv -\sigma^2 + 1 \pmod{q}$, que doivent remplir les deux nombres σ et τ; mais elle ne diffère pas de celle qui exprime que le nombre complexe $\sigma + \tau\sqrt{-3}$ est racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$.

En appliquant la formule (16) au nombre 5 on trouve qu'aux deux racines de la classe 1 correspondent les valeurs 1, 3 du rapport $\frac{L}{M}$, et les valeurs 4, 2, aux deux autres racines. Ainsi les trois classes de critériums cubiques du nombre 5 relativement aux nombres premiers $\frac{L^2 + 27M^2}{4}$ sont

0	$N \equiv 0$, ou $L \equiv 0 \pmod{5}$
1	$L \equiv M$, ou $3M$,
2	$L \equiv 4M$ ou $2M$.

27. Soit $q = 11$. $q' = 4$, $r = 3 + \sqrt{-3}$. Les douze racines de la congruence $x^{12} \equiv 1 \pmod{11}$, rangées suivant l'ordre croissant de leurs indices, sont

$$1,\ 3+\sqrt{-3},\ 6(1+\sqrt{-3}),\ 2\sqrt{-3},\ 6(-1+\sqrt{-3}),\ -3+\sqrt{-3},$$
$$-1,\ -(3+\sqrt{-3}),\ -6(1+\sqrt{-3}),\ -2\sqrt{-3},\ -6(-1+\sqrt{-3}),\ 3-\sqrt{-3}.$$

Les résidus cubiques sont ± 1, $\pm 2\sqrt{-3}$, auxquelles correspondent les critériums

$$L \equiv 0,\ M \equiv 0,\ L \equiv \pm 4\,M \pmod{11}.$$

Ainsi 11 est résidu cubique de tous les nombres premiers p compris dans les trois formules

$$p = \frac{x^2 + 27.\,121\,y^2}{4},\ p = \frac{121\,x^2 + 27\,y^2}{4},\ p = \frac{(11\,x \pm 4\,y)^2 + 27\,y^2}{4}.$$

Les racines d'indices $3x+1$ sont $\pm(3+\sqrt{-3})$, $\pm 6(-1+\sqrt{-3})$, auxquels correspondent les critériums de la classe 1,

$$L \equiv 2\,M,\ 3\,M,\ 5\,M \text{ ou } 10\,M \pmod{11};$$

Les autres racines donnent pour la classe 2

$$L \equiv 9\,M,\ 8\,M,\ 6\,M \text{ ou } M \pmod{11}.$$

Soit encore $q = 17$. En appliquant la méthode du n° 7 à la congruence $x^{18} \equiv 1 \pmod{17}$ nous trouvons $5 \pm 3\sqrt{-3}$ comme racines primitives; nous prendrons pour base $r = 5 - 3\sqrt{-3}$, afin de vérifier la condition (14) $1 + 2\,r^6 \equiv \sqrt{-3} \pmod{17}$. Les 18 racines, rangées suivant l'ordre croissant de leurs indices, sont

$$1,\ 5-3\sqrt{-3},\ -2+4\sqrt{-3},\ -8(1+\sqrt{-3}),\ 7+\sqrt{-3},\ -7+\sqrt{-3},\ 8(1-\sqrt{-3}),$$
$$2+4\sqrt{-3},\ -5-3\sqrt{-3},\ -1,\ -(5-3\sqrt{-3}),\ -(-2+4\sqrt{-3}),\ 8(1+\sqrt{-3}),$$
$$-(7+\sqrt{-3}),\ \text{etc.}$$

Les résidus cubiques sont ± 1, $\pm 8 \pm 8\sqrt{-2}$; les racines de la classe 1 sont $\pm(5-3\sqrt{-3})$, $\pm(7+\sqrt{-3})$, $\pm(2+4\sqrt{-3})$. La formule (16) donne en conséquence comme critériums cubiques du nombre 17,

0	$M \equiv 0,\ L \equiv 0,\ L \equiv 3\,M,\ 8\,M,\ 9\,M,\ 14\,M \pmod{17}$,
1	$L \equiv M,\ 2\,M,\ 4\,M,\ 6\,M,\ 7\,M,\ 12\,M$,
2	$L \equiv 16\,M;\ 15\,M,\ 13\,M,\ 11\,M,\ 10\,M,\ 5\,M$.

La classe du nombre q déterminée par ces formules correspond à l'une des bases t qui, conformément aux conditions du théorème VII, vérifient la congruence (11).

28. Les exemples qui précèdent nous donnent lieu de remarquer un fait semblable à celui que nous avons observé (19) pour les nombres premiers $3q'+1$, à savoir que les critériums de la classe 0 s'échangent entre eux deux à deux quand on change le signe de M, tandis que le même changement de signe fait passer des critériums de la classe 1 à ceux de la classe 2. De plus le nombre des critériums distincts est égal au nombre $q+1$ des racines de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, et ces critériums sont partagés en nombre égal $\frac{q+1}{3}$ entre les trois classes 0, 1, 2. On démontre aisément, au moyen de la formule (16), que la même chose a lieu quel que soit le nombre $q = 3q' - 1$.

D'abord chaque racine $\sigma + \tau\sqrt{-3}$ donne un critérium différent de tous ceux qui correspondent aux autres racines. En effet si une même valeur de $\frac{L}{M}$ correspondait à deux racines différentes, $\sigma + \tau\sqrt{-3}$ et $\sigma' + \tau'\sqrt{-3}$, on aurait en même temps

$$\frac{9\tau}{\sigma - 1} \equiv \frac{9\tau'}{\sigma' - 1}, \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \equiv 1, \quad \sigma'^2 + 3\tau'^2 \equiv 1 \pmod{q}.$$

On déduit de là

$$\frac{\sigma^2 - 2\sigma + 1}{\sigma'^2 - 2\sigma' + 1} \equiv \frac{3\tau^2}{3\tau'^2} \equiv \frac{\sigma^2 + 3\tau^2 - 2\sigma + 1}{\sigma'^2 + 3\tau'^2 - 2\sigma' + 1} \equiv \frac{2(1-\sigma)}{2(1-\sigma')} \pmod{q};$$

D'ailleurs $\frac{1-\sigma}{1-\sigma'}, \equiv \frac{\tau'}{\tau} \pmod{q}$;

On a donc $\frac{\tau^2}{\tau'^2} \equiv \frac{\tau'}{\tau}, \tau \equiv \tau', \sigma \equiv \sigma' \pmod{q}$.

Donc pour que deux racines $\sigma + \tau\sqrt{-3}$ donnent des critériums congrus entre eux suivant le module, il faut qu'elles soient elles-mêmes équivalentes entre elles suivant le même module. Il résulte de là que les q' racines de la classe 0 donneront q' critériums cubiques distincts, et ainsi des deux autres classes.

Considérons deux racines conjuguées $r^i = \sigma + \tau\sqrt{-3}$, $r^{3q'-i} \equiv \sigma - \tau\sqrt{-3}$. Elles appartiennent à la même classe 0 si l'indice i est multiple de 3, tandis qu'elles appartiennent l'une à la classe 1 et l'autre à la classe 2 quand i n'est pas divisible par 3. Or, comme la formule (16) ne cesse pas d'être vérifiée quand on change en même temps les signes de M et de τ, on reconnaît immédiatement que les deux critériums qui correspondent aux deux

racines considérées peuvent se déduire l'un de l'autre par le changement du signe de M. Donc le changement du signe de M échange entre eux les critériums de la classe 0; et il fait passer des critériums de la classe 1 à ceux de la classe 2.

29. Nous ajouterons encore deux exemples, $q = 23$ et $q = 29$.

Soit d'abord $q = 23$; $q' = 8$. Les nombres complexes $10 \pm 6\sqrt{-3}$ sont des racines primitives dont les puissances 8es sont congrues a $11\,(1 \pm \sqrt{-3})$. Afin de vérifier la condition (14) $1 + 2r^8 \equiv \sqrt{-3}$ (mod 23) nous prendons $r = 10 - 6\sqrt{-3}$ comme base de notre système d'indices. Les trois classes de racines sont alors

0	± 1 , $\pm 10\sqrt{-3}$, $\pm 9 \pm 2\sqrt{-3}$;
1	$\pm(10 - 6\sqrt{-3})$, $\pm(11 - 11\sqrt{-3})$, $\pm(4 - 8\sqrt{-3})$, $\pm(8 - 5\sqrt{-3})$,
2	$\pm(10 + 6\sqrt{-3})$, $\pm(11 + 11\sqrt{-3})$, $\pm(4 + 8\sqrt{-3})$, $(\pm 8 + 5\sqrt{-3})$.

Les critériums cubiques pour le nombre 23, relativement aux nombres premiers $\frac{L^2 + 27M^2}{4}$, sont

0	$M \equiv 0$, $L \equiv 0$, $\frac{L}{M} \equiv 2, 8 . 11, 12, 15, 21$ (mod 23)
1	$\frac{L}{M} \equiv 4, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 22$,
2	$\frac{L}{M} \equiv 1, 3, 5, 6, 7, 13, 14, 19$.

Pour le nombre premier $q = 29$, nous trouvous $-2 - 12\sqrt{-3}$ comme racine primitive, $q' = 10$, et $(2 + 12\sqrt{-3})^{10} \equiv 14 - 14\sqrt{-3}$ (mod 29) ; la condition $1 + 2r^{10} \equiv \sqrt{-3}$ (mod 29) est donc remplie par la base $r = -2 - 12\sqrt{-3}$. Les trois classes de racines de la congruence $x^{30} \equiv 1$ (mod 29) sont renfermées dans le tableau suivant :

0	± 1 , $\pm 3 \pm 6\sqrt{-3}$, $\pm 12 \pm 17\sqrt{-3}$,
1	$\pm(2 + 12\sqrt{-3})$, $\pm(10 + 5\sqrt{-3})$, $\pm(4 + 13\sqrt{-3})$, $\pm(14 - 14\sqrt{-3})$, $\pm(7 + 10\sqrt{-3})$
2	$\pm(2 - 12\sqrt{-3})$, $\pm(10 - 5\sqrt{-3})$, $\pm(4 - 13\sqrt{-3})$, $\pm(14 + 14)\sqrt{-3})$, $\pm(7 - 10\sqrt{-3})$.

Les critériums cubiques de 29 sont donc

0	$M \equiv 0$, $L \equiv 0$, $\frac{L}{M} \equiv 1, 2, 11, 13, 16, 18, 27, 28 \pmod{29}$
1	$\frac{L}{M} \equiv 4, 5, 7, 9, 12, 15, 19, 23, 26,$
2	$\frac{L}{M} \equiv 25, 24, 22, 20, 17, 14, 10, 8, 6, 3.$

Il faut se rappeler que dans ces formules le signe de L est déterminé par la congruence $L \equiv 1 \pmod{3}$, et celui de M, par la congruence (11)

$$L + (1 + 2\,t^{\varpi})\,3\,M \equiv 0 \pmod{p = 3\,\varpi + 1}.$$

§ IV. *Résidus biquadratiques.*

30. De même que la loi de réciprocité relative aux résidus cubiques est fondée sur la considération du rapport $\frac{L - 3\sqrt{-3}\,M}{L + 3\sqrt{-3}\,M}$ formé au moyen des facteurs complexes du nombre premier $p = \frac{L^2 + 27\,M^2}{4}$, celle qui concerne les résidus biquadratiques est basée sur le rapport $\frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ de deux facteurs complexes du nombre premier $p = a^2 + b^2$. Nous trouverons relativement à ce dernier rapport des théorèmes semblables à ceux que nous avons donnés pour les résidus cubiques, d'après Jacobi, et nous en déduirons la démonstration des diverses inductions de Gauss relatives à la théorie des résidus biquadratiques. Nous démontrerons qu'entre un nombre premier impair q et la fonction $\frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ du nombre premier $p = a^2 + b^2$, il existe une réciprocité telle, que le caractère biquadratique du nombre q relativement au module p peut se déduire de celui du rapport $\frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ relativement au module q. Les théorèmes qui exprimeront cette réciprocité ont l'avantage de donner une démonstration très-simple de plusieurs inductions de Gauss relatives au nombre et à diverses propriétés des critériums biquadratiques,

démonstration qui n'a été obtenue jusqu'ici par aucune autre méthode. Lebesgue dans ses *Recherches sur les nombres*, a bien donné des formules d'où il déduit les critériums de la forme $a \equiv mb$ (mod q) qui permettent de décider à priori à quelle classe biquadratique appartient le nombre premier q relativement au nombre premier $p = a^2 + b^2$; mais, après avoir vérifié dans les cas particuliers dont il s'est occupé la première et la plus simple des inductions dont nous parlons, celle qui concerne le nombre des critériums distincts, il avoue que la méthode suivie dans son Mémoire ne saurait en donner la démonstration; à plus forte raison ne pourrait-elle pas servir à démontrer les autres inductions qui expriment des propriétés plus cachées de ces critériums.

Ne pourrait-on pas déduire ces propriétés du théorème général de Gauss relatif aux résidus biquadratiques des modules complexes? Gauss espérait sans doute faire cette déduction; car, dans son second mémoire sur les résidus biquadratiques, parlant d'un théorème relatif aux résidus biquadratiques des modules complexes, il dit qu'il en omet la démonstration parce que ce n'est qu'un cas particulier d'un théoréme général qui épuise, en quelque sorte, en la résumant, la théorie des résidus biquadratiques « summam theoriae residuorum biquadraticorum quasi exhaurientis ». (Werke II, p. 130). Ce théorème fondamental est énoncé plus loin (p. 138):

Si l'on désigne par $a + bi$, $a' + b'i$, deux nombres complexes premiers, principaux entre leurs associés, c'est-à-dire congrus à 1 suivant le module $2 + 2i$, le caractère biquadratique du nombre $a + bi$ relativement au module $a' + b'i$ est identique avec celui du nombre $a' + b'i$ relativement au module $a + bi$, si l'un au moins des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$ est congru à l'unité suivant le module 4: au contraire ces deux caractères diffèrent entre eux de deux unités, si aucun des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$ ne remplit cette condition, c'est-à-dire s'ils sont congrus l'un et l'autre au nombre $3 + 2i$ suivant le module 4.

La démonstration de ce théorème n'a été publiée qu'après la mort de Gauss, dans le 2e volume de ses œuvres complètes (p. 313 à 367). Elle est fondée sur la représentation géométrique des imaginaires. Gauss a-t-il déduit de son théorème fondamental les théorèmes énoncés dans ses deux mémoires sur les résidus biquadratiques? Comme il n'a rien laissé à cet égard on ne peut faire que des conjectures. Du reste il n'est pas aussi facile qu'on pourrait le croire d'abord de passer des théorèmes relatifs aux nombres complexes aux théorèmes qui concernent les normes de ces nombres; cette difficulté

pourrait bien être la raison pour laquelle Gaus n'a pas justifié l'assertion citée plus haut, que toute la théorie des résidus biduadratiques est renfermie dans ce théorème.

31. Les formules qui serviront de point de départ à nos recherches sur les résidus biquadratiques se déduisent de celles que nous avons données au n° 9, en y faisant $n = 4$. Nous trouvons ainsi.

$$(1)\quad \Theta_h = \sum \rho^{lh}\, \theta^{tl},\ (\rho = \pm\sqrt{-1},\ l = 0, 1, 2, \ldots p-2);$$

$$(2)\quad \Theta_1\, \Theta_3 = \Theta_1\, \Theta_{-1} = (-1)^{\frac{p-1}{4}} p\ ;$$

$$(3)\quad \Theta_2^2 = (\theta - \theta^t + \theta^{t2} - \theta^{t3} + \ldots)^2 = p.$$

$$(4)\quad \Theta_1^2 = R_{1,1}\, \Theta_2\,,\ \Theta_1^4 = R^2_{1,1}\, p = R_{1,1}\, R_{1,2}\, \Theta_1\, \Theta_3 = R_{1,1}\, R_{1,2}\, (-1)^{\frac{p-1}{4}} p.$$

On déduit de la dernière équation

$$(5)\quad R_{1,1} = (-1)^{\frac{p-1}{4}} R_{1,2};$$

d'ailleurs la valeur de $R_{1,2}$ est donnée par la formule

$$R_{1,2} = \sum \rho^{indt\,(s+1)}\ (s = 1, 2, 3 \ldots p-2),$$

qu'on obtient en faisant $h = 1$, $k = 2$, $\rho^3 = \rho^{-1}$, dans la formule (II) du n° 9.

Si donc nous désignons par a_i le nombre des termes de la suite

$$1 \,.\, 2\,,\ 2 \,.\, 3\,,\ \ldots\ s\,(s+1) \ldots (p-2)\,(p-1)$$

dont les indices relativement au module p et à la base t sont de la forme $4x + i$, nous aurons

$$(6)\quad R_{1,1} = R_{1,2}\,(-1)^{\frac{p-1}{4}} = (a_0 - a_2)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}} + (a_1 - a_3)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}}\sqrt{-1}$$

$$R_{3,3} = (a_0 - a_2)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}} - (a_1 - a_3)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}}\sqrt{-1}$$

$$(7)\quad p = R_{1,1}\, R_{3,3} = (a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2.$$

Le théorème exprimé par cette dernière équation, eu égard à la définition des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, est dû à Eisenstein; c'est, on le voit, une conséquence immédiate des formules données antérieurement par Cauchy dans le Bulletin de Férussac.

Comme le nombre premier p ne peut se décomposer que d'une seule manière en une somme de deux carrés, les deux carrés a^2, b^2 qui vérifient l'équation $p = a^2 + b^2$ sont déterminés, ce qui fait connaître les valeurs nu-

mériques des deux différences $a_0 - a_2$ et $a_1 - a_3$. De plus nous allons démontrer que la première de ces différences est impaire et que la seconde est paire. Pour cela élevons au carré le polynôme Θ_1 et désignos par $2\,F(\theta, \rho)$ la somme des doubles produits ; nous trouvons

$$\Theta_1^2 = \theta^2 + \rho^2\,\theta^{2t} + \rho^4\,\theta^{2^{t^2}} + \ldots + 2\,F(\theta, \rho).$$

D'ailleurs si l'on désigne par i l'indice du nombre 2 relativement au module p et à la base t, on aura $t^i \equiv 2 \pmod p$, $\theta^2 = \theta^{t^i}$.

$$\theta_1 + \rho_2\,\theta^{2t} + \rho^4\,\theta^{2t^2} + \ldots = \rho^{-2i}\,(\rho^{2i}\,\theta^{t^i} + \rho^{2(1+1)}\,\theta^{t^{i+1}} + \rho^{2(1+2)}\,\theta^{t^{i+2}} + \ldots) = \rho^{-2i}\,\Theta_2$$

en sorte que l'équation précédente devient

$$\Theta_1^2 = \rho^{-2i}\,\Theta_2 + 2\,F(\theta, \rho);$$

la comparaison de cette équation avec l'équation (4) donne

$$\Theta_2^{-}\,[R_{1,1} - \rho^{-2i}] = 2\,F(\theta, \rho)\,,\; p\,[R_{1,1} - \rho^{-2i}] = 2\,\Theta_1\,F(\theta, \rho).$$

Le produit $\Theta_1\,F(\theta, \rho)$ remplit les conditions du théorème auxiliare I, d'où nous concluons qu'on peut le mettre sous la forme $A + B\,\rho$, A et B désignant deux nombres entiers. On a donc, en remplaçant ρ^2 par -1,

$$p\,(-1)^{\frac{p-1}{4}}\,[(a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)\sqrt{-1}] - p\,(-1)^i = 2\,A + 2\,B\sqrt{-1},$$

$$p\,(-1)^{\frac{p-1}{4}}\,(a_0 - a_2) - p\,(-1)^i = 2\,A\,,\; p\,(-1)^{\frac{p-1}{4}}\,(a_1 - a_3) = 2\,B.$$

On conclut de là que la différence $a_0 - a_2$ est impaire, et que la différence $a_1 - a_3$ est paire, ainsi que nous l'avons annoncé. Nous poserons

$$(8)\quad (a_0 - a_2)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}} = a\,,\; (a_1 - a_3)\,(-1)^{\frac{p-1}{4}} = b\,,\; \sqrt{-1} = \rho,$$

en sorte que l'on aura

$$R_{1,1} = a + b\,\rho\,,\; p = a^2 + b^2\,,$$

et b^2 désignera le carré pair.

32. Considérons un second nombre premier impair q dont nous désignerons par i l'indice relativement au module p et à la base t, en sorte que le nombre i vérifiera la congruence $t^i \equiv q \pmod p$. En désignant par σ l'unité positive ou négative nous pourrons poser $q = 4\,q' \pm 1 = 4\,q' + \sigma$. La puissance Θ_1^q du polynôme Θ_1 pourra se mettre sous la forme

$$\Theta_1^q = \theta^q + \rho^\sigma\,\rho^{qt} + \ldots + q\,F(\theta, \rho),$$

où $F(\theta, \rho)$ désigne une fonction entière de θ et de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers. Comme $\theta^q = \theta^{li}$, on a

$$\theta^q + \rho^\sigma \theta^{qi} + \rho^{2\sigma} \theta^{qi^2} + \ldots = \rho^{-\sigma i} (\rho^{\sigma i} \theta^{li} + \rho^{\sigma(i+1)} \theta^{li+1} + \ldots) = \rho^{-\sigma i} \Theta_\sigma,$$

$$\Theta_1{}^q = \rho^{-\sigma i} \Theta_\sigma + q\, F(\theta, \rho).$$

En combinant cette équation avec la formule $\Theta_1{}^4 = R^2{}_{1,1}\, p$, et posant $\Theta_1{}^\sigma = S\,\Theta_\sigma$, on a successivement

$$\Theta_1{}^q = \Theta_1{}^{4q'} S\,\Theta_\sigma = R^{2q'}_{1,1}\, p^{q'} S\,\Theta_\sigma = \rho^{-\sigma i}\,\Theta_\sigma + q\, F(\theta, \rho),$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}} p\,[R^{2q'}_{1,1}\, p^{q'} S - \rho^{-\sigma i}] = q\, F(\theta, \rho)\,\Theta_{-\sigma} = q\, f(\theta, \rho);$$

$f(\theta, \rho)$ est une fonction entière de θ et de p dont tous les coefficients sont des nombres entiers, et S, un nombre rationnel $+1$ ou $\frac{(-1)^{\frac{p-1}{4}}}{p}$ suivant que $\sigma = 1$ ou -1. Les conditions du théorème auxiliaire I sont ici remplies, car on arriverait à la même équation si l'on remplaçait θ par toute autre racine primitive de l'équation $x^p = 1$, et comme le premier membre est indépendant de θ, on en déduirait $f(\theta', \rho) = f(\theta, \rho)$; cette fonction $f(\theta, \rho)$ est donc une fonction entière de ρ que nous pouvons réduire au binôme $A + B\rho$, en désignant par A et B deux nombres entiers. On a donc

$$(-1)^\varpi p\,[R^{2q'}_{1,1}\, p^{q'} S - \rho^{-\sigma i}] = q\,(A + B\rho), \rho = \pm\sqrt{-1}.$$

Enfin multipliant toute cette équation par $R^{q'}_{3,3}$, remplaçant le produit $R^{q'}_{1,1}$ $R^{q'}_{3,3}$ par sa valeur $p^{q'}$ et posant $R^{q'}_{1,1}(A + B\rho) = A_1 + B_1\rho$, nous avons

$$(9) \qquad (-1)^\varpi p\,[R^{q'}_{1,1}\, p^{2q'} S - \rho^{-\sigma i} R^{q'}_{3,3}] = q\,(A_1 + B_1\rho).$$

33. Supposons d'abord $\sigma = 1$. Nous avons $S = 1$ et notre équation devient

$$(-1)^\varpi p\,[R^{q'}_{1,1}\, p^{\frac{q-1}{2}} - \rho^{-i} R^{q'}_{3,3}] = q\,(A_1 + B_1\rho).$$

Si nous remplaçons dans cette équation la racine ρ de l'équation irréductible $x^2 + 1 = 0$ par la racine β de la congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod q$, nous la changeons en congruence suivant le module q (Théoreme VII du n° 8); et divisant la congruence par le facteur $(-1)^\varpi p$, qui est premier avec le module, nous trouvons

$$(a + b\beta)^{q'} p^{\frac{q-1}{2}} - \beta^{-i}(a - b\beta)^{q'} \equiv 0 \pmod q,$$

ou encore $$(a + b\beta)^{q'} = \beta^i (a - b\beta)^{q'} \equiv 0 \pmod q,$$

puisque, par la loi de réciprocité relative aux résidus quadratiques,

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^i \equiv \beta^{2i} \pmod{q}.$$

Soit t_1 une racine primitive du nombre q, prise comme base d'un système d'indices; $t_1^{q'}$ et $t_1^{3q'}$ seront les deux racines de la congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}$; nous prendrons $\beta \equiv t_1^{q'} \pmod{q}$. Soit K la valeur de l'expression $\frac{a + b\beta}{a - b\beta} \pmod{q}$, et j son indice relativement à la base t_1; K ne se réduit ni à zero, ni à l'infini suivant le module q, puisque

$$(a + b\beta)\ (a - b\beta) = a^2 - b^2\beta^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv p \pmod{q}.$$

On déduira donc de notre congruence divisée par $(a - b\beta)^{q'}$,

$$K^{q'} \equiv \beta^i, \text{ ou } t_1^{q'j} \equiv t_1^{q'i} \pmod{q},$$

et, par conséquent,

$$(10)\quad j = i + 4\,l;$$

Les résidus des deux indices i et j, suivant le module 4, sont donc égaux, et, conséquemment, le caractère biquadratique du nombre q relativement au module p et à la base t est le même que celui du rapport $\frac{a + b\beta}{a - b\beta}$ relativement au module q et à la base t_1.

Nous remarquerons que le caractère biquadratique d'un nombre est indépendant du choix de la base quand il est pair, et que les deux caractères biquadratiques 1 et 3 s'échangent entre eux quand on remplace la base par une racine primitive de la classe 3. Faisant donc successivement $i \equiv o$, $i \equiv 2 \pmod{4}$, nous déduisons de la formule (10) les deux théorèmes suivants;

Théorème I.

Soient p *et* q *deux nombres premiers* $4\varpi + 1$, $4q' + 1$, *dont le premier est décomposé en une somme de deux carrés,* $p = a^2 + b^2$; *désignons par* β *l'une des racines de la congruence* $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}$; *le nombre* q *sera résidu biquadratique ou non résidu biquadratique de* p, *suivant que le rapport* $\frac{a + b\beta}{a - b\beta}$ *sera lui-même résidu biquadratique de* q.

Théorème II.

Le nombre q *sera résidu quadratique ou non résidu quadratique de* p, *suivant que le rapport* $\frac{a + b\beta}{a - b\beta}$ *sera lui-même résidu quadratique ou non résidu quadratique de* q.

34. Pour des valeurs impaires de l'indice i il faut avoir égard aux bases t et t_1; la formule (10), lorsqu'on introduit la considération de ces bases, exprime un théorème général qui comprend comme cas particuliers les deux théoremes du n.° précédent:

Théorème III.

Le caractère biquadratique du nombre q *relativement au module* p *et à la base* t *qui vérifie la condition*

$$(11)\quad a + b\, t^{\varpi} \equiv o \pmod{p = 4\varpi + 1},$$

est le même que celui du rapport $K = \frac{a + b\beta}{a - b\beta}$, *relativement au module* q *et à la base* t_1, *liée au nombre* β *par la congruence* $t_1^{q'} \equiv \beta$ (*mod* $q = 4q_1 + 1$).

Ce théorème est une conséquence immédiate de la formule (10) et des définitions dounées, excepté en ce qui concerne la condition (11) dont nous devons rendre compte. Cette condition serait inutile si les nombres a et b étaient calculés au moyen des formules (8), ainsi que nous l'avons supposé précédemment; mais nous voulons rendre notre théorème indépendant du calcul des nombres a_0, a_1, a_2, a_3, de telle sorte que le rapport K soit onnu au moyen de la base t et de la décomposition du nombre p en une somme de deux carrés. Or le nombre k ne dépend que de la valeur du rapport $\frac{a}{b}$; si ce rapport change de signe en conservant la même valeur numérique, k est remplacé par son inverse $\frac{1}{k}$; et son indice j, par $4q' - j$; le résidu de l'indice, relativement au module 4, n'est pas changé, quand j est pair; mais si ce nombre est impair les deux résidus 1 et 3 se substituent l'un à l'autre, quand le rapport $\frac{a}{b}$ change de signe. Ainsi le théorème III ne peut conduire à la détermi-

nation des caractères biquadratiques 1 et 3 qu'à la condition de prendre convenablement le signe du rapport $\frac{a}{b}$, dont la valeur numérique seule est connue par la décomposition du nombre p.

Or la formule (11) détermine le signe convenable du rapport $a:b$, c'est-à-dire le signe qu'on obtiendrait en calculant les deux nombres a et b par les formules (8), et, conséquemment le rapport $a:b$ par la formule

$$\frac{a}{b}=\frac{a_0-a_2}{a_1-a_3}.$$

En effet, en appliquant la méthode exposée par Cauchy, dans la Note V de son Mémoire sur la théorie des nombres, pour calculer les coefficients de la fonction $R_{h,k}$, sans recourir aux tables d'indices, nous trouvons qu'en posant

$$R_{1,2}=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)\sqrt{-1},$$

On a entre les quatre coefficients inconnus les quatre formules

$$a_0+a_1+a_2+a_3=p-2,$$
$$a_0-a_2+(a_1-a_3)\,t^{\varpi}\equiv 0 \pmod{p}$$
$$(a_0-a_2)-(a_1-a_3)\,t^{\varpi}\equiv-\frac{(\varpi+1)(\varpi+2)\ldots 2\varpi}{1.2.3..\varpi} \pmod{p=4\varpi 1},$$
$$(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2=p.$$

La somme des deux formules intermédiaires détermine la racine du carré impair au moyen de la congruence

$$a_0-a_2\equiv-\tfrac{1}{2}\frac{(\varpi+1)(\varpi+2)\ldots 2\varpi}{1.2.3\ldots\varpi} \pmod{p};$$

c'est le théorème da Gauss. La seconde formule nous apprend que le rapport $a:b$ aura le signe convenable pour l'application du théorème III, si les deux nombres a et b vérifient la congruence

$$(11)\quad a+b\,t^{\varpi}\equiv 0 \pmod{p=4\varpi+1}.$$

35. D'après ce théorème la valeur de l'expression $\frac{a}{b}$ (mod q) fait connaître le caractère biquadratique d'un nombre premier $q=4q'+1$ relativement au module premier $p=a^2+b^2$ et à l'une des bases t qui vérifient la con-

gruence (11); ce caractère est 0, 1, 2 ou 3 suivant que la valeur de cette expression rend le rapport K ou $\frac{1+\frac{a}{b}\beta}{1-\frac{a}{b}\beta}$ congru à un résidu de classe 0, 1, 2 ou 3. Les caractères biquadratiques de q relativement aux différents nombres premiers $p = a^2 + b^2$ sont donc déterminés par des congruences de la forme $a \equiv 0$, $b \equiv m\,a \pmod{q}$. Nous donnerons à ces congruences le nom de critériums biquadratiques, et nous les partagerons en quatre classes, distinguées entre elles par les indices 0, 1, 2 et 3, en attribuant à la classe 0 les critériums d'où l'on conclut que q est résidu biquadratique de p, et à la classe i ceux qui expriment que i est le caractère biquadratique de q relativement au module p et à l'une des bases t qui vérifient la congruence (11).

Le critérium $b \equiv 0 \pmod{q}$ appartient toujours à la classe 0, c'est-à-dire que le nombre q est toujours résidu biquadratique des nombres premiers compris dans la formole $p = x^2 + 4q^2y^2$; en effet on obtient ce critérium en posant $\frac{a+b\beta}{a-b\beta} \equiv 1 \pmod{q}$; or l'unité positive appartient à la classe 0 dans toute classification. De même le critérium $a \equiv 0 \pmod{q}$ appartient toujours à l'une des deux classes 0 où 2, à savoir à la classe 0 si $q = 8l+1$, et à la classe 2 si $q = 8l+5$. En effet, ce critérium se déduit de la congruence $\frac{a+b\beta}{a-b\beta} \equiv -1 \pmod{q}$; or -1 appartient à la classe 0, si $q = 8l+1$, et à la classe 2, si $q = 8l+5$. On conclut de là qu'un nombre premier q compris dans la formule $4q'+1$ est résidu biquadratique, ou simplement résidu quadratique sans être résidu biquadratique, de tout nombre premier $p = q^2x^2 + 4y^2$, suivant qu'il est lui-même de la forme $8l+1$ ou de la forme $8l+5$.

Pour calculer le critérium qui correspond à une racine α de la congruence $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ en supposant α différent de ± 1, on emploira la formule

$$(12) \qquad \frac{b}{a} \equiv f\,\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \pmod{q},$$

qu'on obtient en résolvant par rapport à $\frac{a}{b}$ la congruence

$$K \equiv \frac{a+b\beta}{a-b\beta} \equiv \alpha \pmod{q},$$

et en posant $f\beta \equiv 1 \pmod{q}$.

1° Soit $q = 5$. En prenant $t_1 = 2$, on a $\beta \equiv t_1^{\frac{q-1}{4}} \equiv 2$, et $f = 3$. Les quatre résidus 1, 2, 4, 3 représentent respectivement les quatre classes. Les critériums des classes 0 et 2 sont déjà connus; les deux autres se déduisent de la formule (2) en faisant $\alpha = 2$, $\alpha = 3$; ce sont $b \equiv a$, $b \equiv 4a$ (mod 5.) Ainsi le nombre 5, relativement au module premier $p = a^2 + b^2$ et à l'une des bases t qui vérifient la congruence $a + b\,t^{\frac{p-1}{4}} \equiv 0 \pmod{p}$, appartient à la classe

0	Si	$b \equiv 0 \pmod 5$
1		$b \equiv a$
2		$a \equiv 0$
3		$a \equiv 4a$

THÉORÈME IV.

« *Le nombre 5 est résidu biquadratique de tous les nombres premiers compris dans la formule*

$$p = x^2 + 100\,y^2,$$

il est résidu quadratique des nombres premiers

$$p = 25\,x^2 + 4\,y^2,$$

enfin il est non résidu quadratique des nombres premiers

$$p = (5\,x - 2\,y)^2 + 4\,y^2 \text{ ».}$$

2° Soit $q = 13$; $q' = 3$, et si nous prenons pour base $t_1 = 2$, les résidus du module 13, rangés dans leurs classes respectives, seront

0	1, 3, 9
1	2, 6, 5
2	4, 10, 12
3	11, 7, 8.

On a ici $\beta \equiv 2^3 = 8$, et $f = 5$, en sorte que la formule (12) devient

$$\frac{b}{a} \equiv 5\,\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \pmod{13}.$$

En faisant $\alpha = 3$, 9, on obtient $\frac{b}{a} \equiv 6, 8, 12 \pmod{13}$; 4, 10 et 12 donnent

$\frac{b}{a} \equiv 3, 10$ et $a \equiv 0$; enfin les résidus de la classe 3 donnent $\frac{b}{a} \equiv 1, 5, 7$ (mod 13). Les critériums qui déterminent le caractère biquadratique de 13 relativement au module premier $p = a^2 + b^2$ et à l'une des bases qui vérifient la congruence (11), distribués dans leurs classes respectives, sont

0	$b \equiv 0$, $b \equiv 4a$, $9a$ (mod 13)
1	$b \equiv 6$, a $11a$, $12a$,
2	$a \equiv 0$, $b \equiv 3a$, $10a$,
3	$b = a$, $2a$, $7a$.

Nous pouvons observer ici une propriété, dont nous demontrerons la généralité, à savoir que le changement du signe de b ne fait pas varier la classe des critériums des deux classes 0 et 2, et qu'il échange entre eux les critériums de la classe 1 et ceux de la classe 3. Cette propriété peut servir à simplifier le calcul des critériums ; des qu'on aura obtenu ceux de la classe 1, on en déduira ceux de la classe 3 en changeant le signe de b ou de a. Les critériums renfermés dans le tableau précédent nous donnent ce théoreme

Théorème V.

« *Le nombre* 13 *est résidu biquadratique des nombres premiers compris dans les formules*

$$p = x^2 + 676\,y^2, \quad p = (13\,x \pm 6y)^2 + 4\,y^2,$$

il est résidu quadratique et non résidu biquadratique des nombres premiers

$$p = 169\,x^2 + 4\,y^2, \quad p = (13\,x \pm 8\,y)^2 + 4\,y^2,$$

enfin il est non résidu quadratique des nombres premiers

$$p = (13\,x \pm 2\,y)^2 + 4\,y^2, \quad p = (13\,x \pm 12\,y)^2 + 4\,y^2, \quad p = (13\,x \pm 4\,y)^2 + 4\,y^2 \text{ ».}$$

3.° Soit $q = 17$; $q' = 4$. En prenant pour base $t_1 = 3$, on a $\beta = -4$, $f = 4$, et les résidus du module 17, distribués dans leurs classes respectives, sont

0	1, 4, 13, 16,
1	3, 5, 12, 14,
2	2, 9, 8, 15,
3	6, 7. 10, 11.

La formule (12) devient ici

$$\frac{b}{a} \equiv 4 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \pmod{17},$$

et l'on en déduit, au moyen des quatre classes de résidus α, les quatre classes correspondantes de critériums biquadratiques du nombre 17 relativement aux divers modules $p = a^2 + b^2$, savoir

0	$a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $b \equiv \pm a \pmod{17}$
1	$b \equiv 2a$, $6a$, $8a$, $14a$,
2	$b \equiv \pm 5a$, $\pm 7a$
3	$b \equiv 3a$, $9a$, $11a$, $15a$.

Des critériums des deux classes 0 et 2 on déduit les théorèmes suivants :

Théorème VI.

La condition nécessaire et suffisante pour que 17 *soit résidu biquadratique du nombre premier* $p = a^2 + b^2$ *est qu' il divise l'un des carrés* a^2, b^2, *ou la différence,* $a^2 - b^2$, *de ces carrés.*

Théorème VII.

La condition nécessaire et suffisante pour que 17 *soit résidu quadratique du nombre premier* $p = a^2 + b^2$, *sans en être résidu biquadratique, est qu' il divise l'une des deux différences* $a^2 - 8b^2$, $a^2 - 15b^2$.

4° Soit $q = 29$; $q' = 7$. Les résidus de 29 distribués dans leurs classes respectives, relativement à la base $t_1 = 2$, sont

0	1, 7, 16, 20, 23, 24, 25 ;
1	2, 3, 11, 14, 17, 19, 21 ;
2	4, 5, 6, 9, 13, 22, 28 ;
3	8, 10, 12, 15, 18, 26, 27 .

Comme ici $\beta \equiv 2^7 \equiv 12 \pmod{29}$ et $f = -12$, la formule (12) devient

$$\frac{b}{a} \equiv -12 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \pmod{29}$$

et l'on en déduit pour le nombre 29, relativement aux divers modules premiers $p = a^2 + b^2$, les critériums suivants, rangés dans leurs classes respectives :

0	$b \equiv 0$, $b \equiv 9a$, $11a$, $14a$, $15a$, $18a$, $20a$ (mod 29)
1	$b \equiv 7a$, $19a$, $23a$, $24a$, $25a$, $26a$, $28a$,
2	$a \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $8a$, $13a$, $16a$, $21a$, $27a$,
3	$b \equiv a$, $3a$, $4a$, $5a$, $6a$, $10a$, $22a$.

Le nombre 29 sera résidu biquadratique du nombre premier $p = a^2 + b^2$, si les deux nombres a et b vérifient l'une des congruences 0 ; il en est résidu quadratique et non résidu biquadratique si a et b vérifient l'une des congruences 2. Dans le cas où les nombres a et b vérifient l'une des congruences 1 ou 3, 29 est non résidu quadratique; son caractère biquadratique 1 ou 3 est le même que l'indice de la classe à laquelle appartient le critérium vérifié, et la base t satisfait à la congruence $a + b\,t^{\varpi} \equiv 0$ (mod $p = 4\varpi + 1$), et il en diffère de deux unités si la base t vérifie la congruence $a - b\,t^{\varpi} \equiv 0$ (mod p).

36. Les nombres premiers $4.\,q' - 1$ donnent lieu à des théorèmes analogues aux précédents, pourvu que l'on ait recours aux racines complexes de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod $q = 4q' - 1$), ainsi que nous l'avons fait dans le paragraphe précédent relativement aux résidus cubiques. Dans les cas où $q = 4q' - 1$ nous avons vu (32) qu'il faut faire $\sigma = -1$ et $S = \frac{(-1)^{\varpi}}{p}$, en sorte que la formule (9) devient

$$(-1)^{\varpi} \cdot p \left[(-1)^{\varpi} \cdot p^{2q'-1} \cdot R_{1,1}^{q'} - \rho^{i} R_{3,3}^{q'}\right] \equiv q\,(A + B\rho).$$

or $p^{2q'-1} = p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{i}$ (mod q), à cause de la réciprocité demontrée (§ II) relativement aux résidus quadratiques. Comme le facteur compris dans la parenthèse du premier membre peut se mettre sous la forme $P + 2Q$, P et Q désignant des nombres entiers, on voit que A et B sont divisibles par p; effectuant la division, remplaçant $p^{2q'-1}$ par $\rho^{2i} + M\,q$, et faisant passer tous les multiples de q dans le second membre, on trouve l'équation

$$(13) \qquad R_{33}^{q'} - \rho^{i+2\varpi} \cdot R_{1,1}^{q'} = q\,(A_1 + B_1\rho),$$

où A_1 et B_1 désignent des nombres entiers. Or le rapport $\frac{R_{3,3}}{R_{1,1}} = \frac{a - b\rho}{a + b\rho}$ est racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q). En effet

$$(a - b\rho)^{q} = a^{q} - b^{q}\,\rho^{2\frac{q-1}{2}}\,\rho + q\,(F + G\rho).$$

D'ailleurs $\rho^2 = -1$, $\rho^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{2q'-1} = -1$, $a^q \equiv a$, et $b^q \equiv b \pmod q$; on a donc

$$(a - b\rho)^q \equiv a + b\rho \pmod q$$

$$(a + b\rho)^q \equiv a - b\rho,$$

$$\text{d'où } \left(\frac{a - b\rho}{a + b\rho}\right)^q \equiv \left(\frac{a + b\rho}{a - b\rho}\right) \text{ et } \left(\frac{a - b\rho}{a + b\rho}\right)^{q+1} \equiv 1 \pmod q.$$

Soit donc $f + g\sqrt{-1} = r$ une racine primitive de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod q$, qui vérifie la condition $r^{q'} \equiv \rho \pmod q$; ce qui est toujours possible, puisque parmi les racines primitives de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod q$ une moitié verifie la condition $r^{q'} \equiv -\rho \pmod q$ et l'autre moitié, la condition ci-dessus énoncée. De plus prenons $\rho = \sqrt{-1}$, et désignons par j l'indice dela racine $\frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ relativement au module q et à la base r, en sorte qu'on ait

$$(14) \qquad \frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} \equiv r^j,\ r^{q'} \equiv \sqrt{-1} \pmod q\ ;$$

on déduira de la formule (13), divisée par $R_{1,1}$ et réduite en congruence suivante le module q,

$$r^{q'} \equiv r^{q'(i+2\varpi)} \pmod{q = 4q' - 1},$$

ce qui exige qu'on ait

$$(15) \qquad j = i + 2\varpi + 4l.$$

Il faut remarquer que dans la formule (14), comme dans les formules du n.° 34 le signe du rapport $\frac{a}{b}$ doit être le même que si les deux nombres a et b étaient calculés par les formules (8). L'indice i du nombre q doit donc être rapporté à l'une des bases t qui vérifient la congruence

$$(11) \qquad a + b\,t^{\varpi} \equiv 0 \pmod{p = 4\varpi + 1}.$$

D'ailleurs i étant l'indice de q, $i + 2\varpi$ est l'indice de $-q$; car $t^{\frac{q-1}{2}} = t^{2\varpi} \equiv -1 \pmod p$, en sorte que 2ϖ est l'indice de $-$; la somme $i + 2\varpi$ est donc l'indice du produit $(-1)\,q$. La formule (15) exprime donc ce théorème fondamental :

Théorème VIII.

« *Soient* $a^2 + b^2 = p$ *un nombre premier*, t *une racine primitive de* p *prise comme base d'un système d'indices et vérifiant la congruence*

$$(11) \qquad a + b\,t^{\varpi} \equiv 0 \pmod{p = 4\varpi + 1};$$

Soient $q = 4q' - 1$ *un nombre premier et* r *une racine primitive de la congrueuce* $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, *qui vérifie la condition* $r^{q'} \equiv \sqrt{-1} \pmod{q}$; *la classe du nombre* $-q$, *relativement au module* p *et à la base* t, *a le même indice* 0, 1, 2 *ou* 3 *que la classe du rapport* $\dfrac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ *relativement au module* q *et à la base* r ».

La considération des bases t et r n'est nécessaire que dans les cas où le caractère biquadratique de q est impair. Lorsqu'il est pair ou peut énoncer plus simplement le résultat exprimé par le théorème qui précède :

Théorème IX.

« *Soient* $a^2 + b^2 = p$ *et* $q = 4q' - 1$ *deux nombres premiers*; $-q$ *est résidu biquadratique ou non résidu biquadratique de* p, *suivant que le rapport* $\dfrac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ *est résidu biquadratique de* q, *ou non* ».

Théorème X.

Le nombre $-q$ *est résidu quadratique ou non résidu quadratique de* p *suivant que le rapport* $\dfrac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$ *est résidu quadratique ou non résidu quadratique de* q ».

37. On déduit de ces théorèmes des critériums qui déterminent le caractère biquadratique du nombre $-q$ relativement au nombre premier $p = a^2 + b^2$ et à l'une des bases t qui vérifient la congruence (11) $a + b\,t^{\varpi} \equiv 0 \pmod{p = 4\varpi + 1}$. Ces critériums consistent, comme dans le cas précédent où $q = 4q' + 1$, en des congruences de l'une des formes $a \equiv 0$, $b \equiv m\,a \pmod{q}$; nous les partageons en quatre classes distinguées entre elles par

les indices 0, 1, 2 et 3, en attribuant à la classe 0 les critériums d'où l'on conclut que $-q$ est résidu biquadratique de p, et à la classe i les critériums qui expriment que le nombre i est le caractère biquadratique de $-q$ relativement au module $a^2+b^2=p$. Il est facile d'obtenir ensuite le caractère biquadratique du nombre q lui-même, sachant que le caractère biquadratique de -1 est 0 ou 2, suivant que $p=8l+1$ ou $8l+5$; le caractère de q est le même que celui de $-q$, dans le premier cas; il en diffère de 2 unités dans le second. Voici comment on obtient le critérium qui correspond, à l'une des racines de la congruence $x^{q+1}\equiv 1$ (mod q). Si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est cette racine, on posera

$$\frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}\equiv\alpha+\beta\sqrt{-1}\ (\text{mod } q),$$

et, comme (-1) est non résidu quadratique de q, $\sqrt{-1}$ ne peut pas être congru à un nombre rationnel suivant le module q, en sorte que notre formule équivaut aux deux suivantes

$$a\equiv a\alpha-b\beta,\quad -b\equiv b\alpha+a\beta,$$

d'où l'on déduit $$\frac{b}{a}\equiv\frac{\alpha-1}{\beta}\equiv\frac{-\beta}{\alpha+1},$$

ce qui exige que les deux éléments de la racine $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ vérifient la condition $\alpha^2+\beta^2\equiv 1$ (mod q), condition nécessairement remplie (6) si, comme nous le supposons $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est racine de la congruence $x^{q+1}\equiv 1$ (mod q). Les deux racines réelles $+1$ et -1 donnent respectivement les deux critériums $b\equiv 0$, $a\equiv 0$ (mod q); comme 1 est toujours de la classe 0, et -1 de la classe 0 ou de la classe 2 suivant que $q+1$ est de la forme $8l$ ou $8l+4$, le critérium $b\equiv 0$ (mod q) fait toujours partie de la classe 0; le critérium $a\equiv 0$ (mod q) fait partie de la classe 0 ou de la classe 2 suivant que le nombre q est de la forme $8l+7$ ou de la forme $8l+3$. En réunissant ce résultat au résultat analogue, obtenu au commencement du n.° 35 pour les nombres premiers $4q+1$, nous pouvons énoncer ce théorème :

Théorème XI.

Soit q *un nombre premier impair quelconque ; ce nombre* q *est résidu biquadratique de tous les nombres premiers compris dans la formule*

$p = x^2 + 4 q^2 y^2$; *quand aux nombres premiers* $p = q^2 x^2 + 4 y^2$, q *en est résidu biquadratique s'il est de l'une des deux formes* $8 l \pm 1$, *mais il en est résidu quadratique et non résidu biquadratique s'il est de l'une des deux formes* $8 l \pm 3$.

38- Les critériums biquadratiques de $-q$, qui correspondent aux racines $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, où β est différent de o, se calculeront au moyen de la congruence

$$(16)\ \frac{b}{a} \equiv \frac{\alpha - 1}{\beta} \pmod{q}$$

et l'on rapportera à la classe o les critériums qui correspondent aux racines de la classe o, c'est-à-dire aux résidus biquadratiques, et à la classe i ceux qui correspondent aux résidus de la classe i. Les exemples suivants feront comprendre la manière de calculer et de classer ces critériums.

1° Soit $q = 3$. Les quatre racines de la congruence $x^4 \equiv 1 \pmod 3$ sont 1, $\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$. Les classes 0 et 2 sont représentées par 1 et -1; nous devons attribuer $\sqrt{-1}$, à la classe 1, en sorte que la classe 3 est réprésenté par $-\sqrt{-1}$. Les racines 1 et -1 donnent les critériums $b \equiv o$, $a \equiv o \pmod q$, ainsi que nous venons de le voir; la racine $\sqrt{-1}$ donne $b \equiv -a$, et la racine $-\sqrt{-1}$, $b \equiv a$. Ainsi les critériums biquadratiques de -3 relativement aux nombres premiers $p = a^2 + b^2$, sont

0	$b \equiv 0 \pmod 3$.
1	$b \equiv 2a$,
2	$a \equiv 0$,
4	$b \equiv a$.

Il faut se rappeler, pour les classes 1 et 3, que les signes de a et de b doivent vérifier les congruence $a + b t^{\varpi} \equiv 0 \pmod{p = 4\varpi + 1}$.

2° Soit $q = 7$. Les racines de la congruence $x^8 \equiv 1 \pmod 7$, rangées suivant l'ordre croissant de leurs indices, sont

$$1,\ 2(1+\sqrt{-1}),\ \sqrt{-1},\ 2(-1+\sqrt{-1}),\ -1,\ -2(1+\sqrt{-1}),\ -\sqrt{-1},\ 2(1-\sqrt{-1})$$

Les résidus biquadratiques sont 1 et -1, auxquels correspondent pour -7 les critériums de la classe 0, $b \equiv o$, $a \equiv o \pmod 7$. Les racines de la classe 2 sont $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$; les valeurs correspondantes de α et de β sont $\alpha = o$, $\beta = 1$ et -1, en sorte que la formule (16) donne comme critériums de la

classe 2, pour -7, les deux congruences $b \equiv -a$, $b \equiv a$, (mod 7). Les racines de la classe 1, a savoir $2(1+\sqrt{-1})$ et $-2(1+\sqrt{-1})$ donnent les critériums $b \equiv 4a, 5a$ (mod 7), et les deux autres racines, les critériums $b \equiv 3a$, $2a$ (mod 7). Ainsi le caractère biquadratique de -7, relativement au nombre premier $p = a^2 + b^2$, est

0	Si $a \equiv o$, ou $b \equiv o$ (mod 7)
1	$b \equiv 4a, 5a$,
2	$b \equiv a\,6, a$,
3	$b \equiv 2a, 3a$.

Les caractères biquadratiques impairs se rapportent à l'une des bases t qui vérifient la congruence $a + bt^{\omega} \equiv o$ (mod p). Les autres nous donnent le théorème suivant :

Théorème XII.

Le nombre -7 *est résidu biquadratique du nombre premier* $p = a^2 + b^2$ *si l'un des deux nombres* a *ou* b *est multiple de* 7, *il en est résidu quadratique et non résidu biquadratique s'il divise la différence* $a^2 - b^2$, *enfin il en est non résidu quadratique si le produit* $ab(a^2 - b^2)$ *n'est pas divisible par* 7.

3° Soit $q = 11$. Les racines de la congruence $x^{11^2} \equiv 1$ (mod 11), rangées dans leurs classes respectives relativement à la base $r = 3 - 5\sqrt{-1}$, sont

0	$1, 5+3\sqrt{-1}, 5-3\sqrt{-1}$
1	$3-5\sqrt{-1}, -3-5\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$,
2	$-1, -5+3\sqrt{-1}, -5-3\sqrt{-1}$,
3	$\sqrt{-1}, 3+5\sqrt{-1}, -3+5\sqrt{-1}$.

Nous avons ici $r^3 = (3-5\sqrt{-1})^3 \equiv \sqrt{-1}$ (mod 11), ce qui est la condition du théorème VIII. Le résidu biquadratique 1 donne $b \equiv o$ (mod 11), et les deux autres, $5 \pm 3\sqrt{-1}$,

$$(16)\quad \frac{b}{a} \equiv \frac{5-1}{\pm 3} \equiv \mp 3 \pmod{11};$$

les critériums biquadratiques de la classe 0 sont donc pour -11, $b \equiv o$, $5a, 6a$ (mod 11). Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème XIII.

Pour que -11 *soit résidu biquadratique du module premier* $p = a^2 + 3b^2$, *il faut et il suffit que le carré pair* b^2, *ou la différence* $b^2 - a^2$ *soit divisible par* 11.

Les résidus quadratiques -1 et $-5 \pm 3\sqrt{-1}$ donnent les critériums $a \equiv o$, $b \equiv \pm 2a \pmod{11}$, et l'on conclut de là que:

Théoreme XIV.

La condition nécessaire et suffisante pour que -11 *soit résidu quadratique et non résidu biquadratique du nombre premier* $p = a^2 + b^2$, *est que le carré impair, ou la différence* $b^2 - 4a^2$, *soit multiple de* 11.

Les racines des classes 1 et 3 donnent de même les critériums des classes 1 et 3; en réunissant ces resultats nous trouvons que, relativement au module premier $p = a^2 + b^2$, -11 a pour caractère biquadratique.

0	Si $b \equiv 0$, $5a$ *ou* $6a \pmod{11}$
1	$b \equiv a$, $3a$, $4a$,
2	$a \equiv o$, $b \equiv 2a$, $9a$,
3	$b \equiv 7a$, $8a$, $10a$,

4° $q = 19$, $q' = 5$. La racine primitive $r = 3 + 7\sqrt{-1}$ vérifie la condition $r^5 \equiv \sqrt{-1} \pmod{19}$; en la prenant comme base d'un système d'indices, pour la congruence $x^{20} \equiv 1 \pmod{19}$, nous trouvons que les racines de cette congruence, rapportées à leurs classes respectives, sont

0	1, $7 \pm 3\sqrt{-1}$, $2 \pm 4\sqrt{-1}$,
1	$\pm 3 + 7\sqrt{-1}$, $\pm 4 + 2\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$,
2	-1, $-7 \pm 3\sqrt{-1}$, $-2 \pm 4\sqrt{-1}$,
3	$\pm 3 - 7\sqrt{-1}$, $\pm 4 - 2\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Les racines 1 et -1 donneut les critériums $b \equiv o$, $a \equiv o \pmod{19}$, ainsi que que nous le savons, et, en représentant l'une quelconque des autres racines par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, on calcule le critérium, qui correspond à cette racine, au moyen de la formule (16),

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{\alpha - 1}{\beta} \pmod{11}$$

On trouve ainsi que le caractère biquadratique de -19 relativement au module premier $p = a^2 + b^2$, est

0	Si $b \equiv 0$, $2a$, $5a$, $14a$, $17a$ (mod 19),
1	$b \equiv 3a$, $7a$, $11a$, $13a$, $18a$,
2	$a \equiv 0$, $b \equiv 4a$, $9a$, $10a$, $15a$,
3	$b \equiv a$, $6a$, $8a$, $12a$, $16a$.

Les critériums des classes 0 et 2 nous donnent les théorèmes suivants :

Théorème XV.

La condition nécessaire et suffisante pour que -19 *soit résidu biquadratique du module premier* $a^2 + b^2$ *est que le carré pair* b^2, *ou l'un des nombres* $b \pm 2a$, $b \pm 5a$, *soit divisible par* 19.

Théorème XVI.

La condition nécessaire et suffisante pour que -19 *soit résidu quadratique du module premier* $a^2 + b^2$, *sans en être résidu biquadratique, est que l'un des nombres* a, $b \pm 4a$, $b \pm 9a$, *soit multiple de* 19.

Les critériums 1 et 3 se rapportent à l'une des bases t qui vérifient la congruence (11).

5.° Prenons comme dernier exemple $q = 23$. On aura $q' = 6$; comme la racine primitive $-10 + 4\sqrt{-1}$ vérifie la condition $r^6 \equiv \sqrt{-1}$ (mod 23), nous la prenons pour base et nous trouvons que les racines de la congruence $x^{24} \equiv 1$ (mod 23), rangées dans leurs classes respectives sont

0	$1, -11 - 8\sqrt{-1}, 11 - 8\sqrt{-1}, -1, 11 + 8\sqrt{-1}, -11 + 8\sqrt{-1}$
1	$-10 + 4\sqrt{-1}, 4 - 10\sqrt{-1}, 10 - 4\sqrt{-1}, -4 + 10\sqrt{-1}, -9 + 9\sqrt{-1}, 9 - 9\sqrt{-1},$
2	$-8 - 11\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, -8 + 11\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, 8 + 11\sqrt{-1}, 8 - 11\sqrt{-1}$
3	$-10 - 4\sqrt{-1}, 4 + 10\sqrt{-1}, 10 + 4\sqrt{-1}, -4 - 10\sqrt{-1}, -9 - 9\sqrt{-1}, 9 + 9\sqrt{-1}.$

En calculant au moyen de la formule (16) le critérinm biquadratique de -23, qui correspond à chacune des racines $\alpha + 6\sqrt{-1}$ autres que $+1$ et -1, on trouve que le caractère biquadratique de -23, relativement au module premier $p = a^2 + b^2$, est

0	Si $b \equiv 0$, $a \equiv 0$, $b \equiv 7a$, $10a$, $13a$, $16a$ (mod 23),
1	$b \equiv 2a$, $3a$, $4a$, $11a$, $15a$, $17a$,
2	$b \equiv a$, $5a$, $9a$, $14a$, $18a$, $22a$,
3	$b \equiv 6a$, $8a$, $12a$, $19a$, $20a$, $21a$.

Il faut se rappeler que les signes les nombres a et b doivent, pour les classes 1 et 3, satisfaire à la congruence (11), $a + b\,t_{\sigma} \equiv 0$ (mod p).

39. Gauss, après avoir obtenu par induction les caractères biquadratiques des nombres -3, 5, -7, -11, 13, 17, -19, 23, ajoute les remarques suivantns (N° 28 du 2° Mémoire sur les résidus biquadratiques):

« Les critériums qui font reconnaître à quelle classe on doit rapporter le nombre premier $\pm q$ (en prenant le signe + ou le signe − suivant que q est de la forme $4x+1$ ou $4x+3$, dependent des formes des nombres a et b comparés entre eux relativement au module q. Savoir:

I. Quand a est divisible par q, $\pm q$ appartient à une classe déterminée dont le caractère est 0 pour les valeurs $q = 7, 17, 23$, et 2 pour $q = 3, 5, 11, 13, 19$: on est conduit par induction à penser que le premier cas aura toujours lieu lorsque q sera de la forme $8l \pm 1$, et la second, lorsque q est de la forme $8l \pm 3$. Du reste il ne peut être question des classes 1 et 3, puisque la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques nous apprend que $\pm q$ est toujours résidu quadratique de $p = a^2 + b^2$, quaud l'un des deux nombres a ou b est divisible par q.

II. Toutes les fois que a n'est pas divisible par q, le critérium dépend de la valeur de l'expression $\frac{b}{a}$ (mod q). Cette expression admet, il est vrai, q valeurs diverses $0, 1, 2, \ldots q-1$; mais lorsque q est de la forme $4n+1$, il faut exclure les deux valeurs de l'expression $\sqrt{-1}$ (mod q) qui ne peuvent être prises comme valeur de $\frac{b}{a}$ (mod q), puisque l'on suppose que $p = a^2 + b^2$ est un nombre premier différent de q. C'est pourquoi le nombre des valeurs admissibles pour l'expression $\frac{b}{a}$ (mod q) est $q-2$ si q est de la forme $4n+1$, tandis qu'il est égal à q, si q est de la forme $4n+3$. Si l'on ajoute le critérium $a \equiv o$ (mod q) le nombre total des critériums sera $q - (-1)^{\frac{q-1}{2}}$. Ces critériums se partagent également entre les

quatre classes, dont chacune en renferme un nombre $\frac{1}{4}\left(q-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right)$, et ils se réduisent à des congruences homogènes du premier degré entre les nombres a at b, relativement au module q. »

Gauss ajoute encore d'autres propriétés de ces critériums. Nous les énoncerons plus loin, en donnant la démonstration. Occupons-nous d'abord des inductions que nous venons de citer. La prèmière a été démontrée plus haut (37) et nous en avons déduit la seconde partie de notre théoréme XI. Pour démontrer la seconde nous devons distinguer deux cas suivant que le nombre premier q est de la forme $4n+1$ ou $4n+3$.

Considérons d'abord le cas où q est de l'une des deux formes $8l+1$, $8l-3$. A part le critérium $a \equiv 0 \pmod{q}$ qui correspond à la racine -1, les critériums qui correspondent aux diverses racines α de la congruence $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ se déduisent de la formule

$$(12)\quad \frac{b}{a} \equiv f\,\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \pmod{q},\ f \equiv t_1^{3q'} \equiv \frac{1}{\beta} \pmod{q}.$$

En égalant successivement α aux $q-2$ nombres $1, 2, \ldots q-2$ on obtient $q-2$ critériums de la forme $b \equiv ma$. Or tous ces critériums sont distincts; car si les deux critériums qui correspondent à deux racines α et α' étaient égaux entre eux on aurait

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \equiv \frac{\alpha'-1}{\alpha'+1} \pmod{q},\ \text{d'où}\ \frac{2\alpha}{2} \equiv \frac{2\alpha'}{2}$$

$$\alpha \equiv \alpha'\ ;\ \pmod{q}\ ;$$

Si donc α et α' sont deux nombres différents de la suite $1, 2, 3, \ldots q$, il est impossible que les deux critériums correspondants soient équivalents suivant le module q. Il y a donc $q-2$ critériums distincts de la forme $b \equiv ma \pmod{q}$, qui correspondent à $q-2$ valeurs de m prises dans la suite $0, 1, 2, \ldots p-1$. Comme cette suite renferme q termes, il en reste deux qus ne sont jamais des valeurs de l'expression $\frac{b}{a} \pmod{q}$ savoir les deux valeurs de l'expression $\sqrt{-1} \pmod{q}$; en effet β désignant l'une de ces valeurs si l'on avait $\frac{b}{a} \equiv \beta \pmod{q}$ on en deduirait

$$b^2 - a^2\beta^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv p \equiv o \pmod{q},$$

ce qui est évidemment impossible, puisque p et q sont supposés deux nom-

bres premiers différents. En ajoutant à ces $q-2$ critériums le critérium $a \equiv o$ (mod q) on a en tout $q-1$ critériums distincts; ainsi que nous l'avons annoncé.

Puisque toute les racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1$ (mod q) donnent des critériums distincts, les $\frac{q-1}{4}$ racines de la classe 0 donneront $\frac{q-1}{4}$ critériums de la classe 0, et ainsi des autres classes. Les $q-1$ critériums biquadratiques sont donc également partagés entre les quatre classes, et le nombre des critériums de chaque classe est $\frac{1}{4}(q-1)$.

Si q est de l'une des deux formes $8l-1$, $8l+3$, les critériums biquadratiques de $-q$ seront $a \equiv o$, $b \equiv o$ (mod q), et les divers critériums $b \equiv ma$ qui correspondent aux diverses valeurs de m que l'un peut déduire de la formule

$$(16)\ m \equiv \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

en substituant pour α et β la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ des racines de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q) mises sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Or cette congruence a $q+1$ racines; nous avons vu (37) qu'aux deux racines réelles $\alpha = 1$, $\beta =$; $\alpha = -1$, $\beta = 0$, correspondent les deux critériums $b \equiv 0$, $a \equiv 0$ (mod q). Il reste donc $q-1$ racines de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, où β n'est pas nul, et auxquelles correspondent des critériums déterminés par la formule (16). Or tous ces critériums sont distincts et correspondent à des valeurs de m prises dans la suite $1, 2, 3 \ldots q-1$. D'abord comme la racine $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ doit vérifier la condision $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 1$ (mod q), il n'est pas possible que α soit égal à $+1$ sans que $\beta = 0$; donc dans les $q-1$ racines imaginaires que nous avons à considérer α est différent de 1; aucune des valeurs correspondantes de m n'est donc égale à 0. De plus une même valeur de m ne peut correspondre à deux racines différentes $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, car alors on aurait les trois congruences

$$\frac{\alpha - 1}{\beta} \equiv \frac{\alpha' - 1}{\beta}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \equiv 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 \equiv 1 \ (\text{mod } q);$$

d'où $$\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\beta^2} \equiv \frac{\alpha'^2 - 2\alpha' + 1}{\beta'^2}, \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1}{\beta^2} \equiv \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha' + 1}{\beta'^2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)}{\beta^2} \equiv \frac{2(1-\alpha')}{\beta'^2} \ (\text{mod } q);$$

D'ailleurs la première congruence peut se mettre sous la forme

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta^2} \equiv \frac{\beta'(1-\alpha')}{\beta'^2} \pmod{q};$$

En comparant cette congruence avec la précédente on trouve $\beta \equiv \beta'$ (mod q), puis, de ce résultat et de la première congruence, $\alpha \equiv \alpha'$. Les deux racines ne seraient donc pas distinctes, contrairement à l'hypothèse. Ainsi les $q-1$ racines imaginaires de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q) donnent $q-1$ critériums $b \equiv ma$ (mod q), où les valeurs de m sont les $q-1$ nombres $1, 2, 3, \ldots q-1$; ajoutez les deux critériums $a \equiv o$, $b \equiv o$ (mod q), vous aurez $q+1$ critériums différents. Du reste ces critériums seront également partagés entre les quatre classes, car puisque deux racines différentes ne peuvent pas correspondre à un même critérium, aux $\frac{q+1}{4}$ racines de la classe 0 correspondront $\frac{q+1}{4}$ critériums de la classe 0, et ainsi des autres classes; le nombre des critériums de chaque classe est donc $\frac{1}{4}\left(q-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right)$.

L'induction de Gauss sur le nombre des critériums et sur leur distribution en quatre classes est ainsi complètemeut demontrée.

40. Les formules (12) et (16) donnent immédiatement la raison des quelques autres propriétés des criteriums biquadratiques, que Gauss a signalées à la fin du n° 28 de son second mémoire.

Si le critérium $b \equiv m\,a$ (mod q) fait partie de l'une des deux classes 0, 2, le critérium opposé $b \equiv (q-m)\,a$ (mod q) fait partie de la même classe; si au contraire le critérium $b \equiv m\,a$ (mod q) fait partie de l'une des classes 1 ou 3, le critérium opposé fait partie de la classe 3 ou 1, de telle sorte que les deux critériums appartiennent à deux classes différentes dont les indices différent antre eux de 2 unités.

Cette propriété résulte de ce que deux critériums opposés $b \equiv ma$, $b \equiv (q-m)\,a$ (mod q) correspondent à deux racines réciproques. Considérons d'abord le cas où $q = 4q' + 1$; alors les critériums se calculent au moyen de la formule (12) $\frac{b}{a} \equiv f\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. Considérons les deux critérinms qui correspondent aux deux racine réciproques α et $\alpha' \equiv \frac{1}{\alpha}$ (mod q); le critérium qui correspond

à la seconde racine est $\frac{b}{a} \equiv m' \equiv f \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\frac{1}{\alpha} + 1} \equiv - f \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \equiv - m \pmod q$; les deux critériums sont donc opposés, $b \equiv ma$, $b \equiv (q - m)\, a \pmod q$. De même si $q = 4\, q' - 1$ les deux critériums qui correspondent à deux racines réciproques $\alpha + 6\sqrt{-1}$, $\alpha - 6\sqrt{-1}$ sont, d'après la formule (16), $\frac{b}{a} \equiv \frac{\alpha - 1}{6}$ et $\frac{b}{a} \equiv \frac{\alpha - 1}{-6} \pmod q$. Ils sont donc opposés ; si l'on désigne l'un par $b \equiv ma \pmod q$, l'autre est $b \equiv (q - m)\, a \pmod q$. Ainsi dans tous les cas deux critériums opposés correspondent à deux racines réciproques. Or si l'indice de l'une des deux racines est i, l'indice de la racine réciproque est $4\, q' - i$; ces deux indices sont l'un et l'autre $\equiv 0 \pmod 4$ ou $\equiv 2 \pmod 4$ si i est pair; par conséquent les deux critériums opposés qui leur correspondent sont tous deux de la même classe 0 ou 2; mais si i est impair, les deux indices sont l'un de la forme $4\, x + 1$, l'autre de la forme $4\, x + 3$, de sorte que les deux critériums opposés qui correspondent à ces racines appartiennent, l'un à la classe 1 et l'autre a la classe 3.

41. Si dans le cas où $q = 4\, q' + 1$ nous considerons deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv m'\, a \pmod q$ qui correspondent à deux racines de signes contraires α et $-\alpha$, la formule (12) donne $m \equiv f \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $m' \equiv f \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$, d'où $mm' \equiv f^2 \equiv -1 \pmod q$. Dans ce cas les indices des deux racines ne diffèrent entre eux que par l'indice $\frac{q - 1}{2}$ de -1; les deux critériums sont donc de la même classe si q est de la forme $8\, l + 1$, ils appartiennent à deux classes dont les indices diffèrent entre eux de deux nuités, si $q = 8\, l + 5$.

Supposant toujours $q = 4\, q' + 1$, considérons deux critériums qui correspondent à deux racines α et $-\frac{1}{\alpha}$. On aura $m \equiv f \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $m' = - f \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$, $mm' \equiv - f^2 \equiv 1 \pmod q$, Or dans ce cas, si l'on désigne par i l'indice de la racine α, celui de la racine $-\frac{1}{\alpha}$ est $(q - 1) - i + \frac{q - 1}{2}$; la différence des deux indices est $3 \frac{q - 1}{2} - 2\, i \equiv \frac{q - 1}{2} - 2\, i \pmod 4$.) Cette différences et de la forme $4\, l$ ou $4\, l + 2$, suivant que les deux le nombres $\frac{q - 1}{4}$ et i sont de même

parité ou de parité différente. On conclut de là que deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv m' a$ (mod q) liés entre eux par la relation $mm' \equiv 1$ (mod q) appartiennent à la même classe si, q étant de la forme $8l + 1$, l'un de ces critériums appartient à l'une des classes 0 ou 2, ou encore si, q étant de la forme $8l + 5$, l'un de ces critériums appartient à l'une des classes 1 ou 3; dans les autres cas les deux critériums appartiennent à deux classes différentes dont les indices diffèrent entre eux de 2 unités.

Les critériums calculés par la formule (16), dans le cas où $q = 4q' - 1$, offrent des propriétés analogues à celles que nous venons de demontrer. Considérons deux racines $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $-\alpha + \beta\sqrt{-1}$, auxquelles correspondent les deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv m' a$ (mod q). On aura :

$$m \equiv \frac{\alpha - 1}{\beta}, \quad m' \equiv -\frac{\alpha + 1}{\beta}, \quad mm' \equiv -\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2} \text{ (mod } q).$$

D'ailleurs la congruence $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 1$ (mod q), donne $\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2} \equiv -1$ (mod q); les deux critériums vérifient donc la condition $mm' \equiv -1$ (mod q). D'un autre côté les indices des deux racines sont i et $(q + 1) - i + \frac{q + 1}{2}$; leur différence $3\frac{q + 1}{2} - 2i$ est donc de la forme $4l$ ou $4l + 2$, suivant que la différence $\frac{q + 1}{4} - i$ est paire ou impaire. On déduit de là que

Deux critériums liés entre eux par la relation $mm' \equiv 1$ (mod q) appartiennent à la même classe soit quand le nombre q étant de la forme $8l - 1$, l'un des critériums appartient à la classe 0 ou 2, soit lorsque le nombre q étant de la forme $8l + 3$, l'un des critériums appartient à l'une des classes 1 ou 3; au contraire les deux critériums appartiennent dans les autres cas, à deux classes dont les indices diffèrent entre eux de deux unités.

En combinant ce théorème avec celui du n° précédent, relatif au changement du signe de m, on obtient la relation qui existe entre les classes auxquelles appartiennent deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv m' a$ (mod q). Désignons par i l'indice de la classe du premier critérium $b \equiv ma$ (mod q). Si le nombre i est pair les deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv (q - m) a$ (mod q), sont de la même classe i (40); comme les deux critériums $b \equiv m' a$, $b \equiv (q - m) a$ (mod q) vérifient la condition du dernier théorème $m' (q - m)$

$\equiv 1 \pmod q$), ces deux critériums sont de même classe si $\frac{q+1}{4}$ est pair, ils appartiennent à deux classes dont les indices diffèrent entre eux de deux unités, si $\frac{q+1}{4}$ est impair.

Si le nombre i est impair, la classe du critérium $b \equiv (q-m)\,a \pmod q$ a pour indice $i \pm 2$; la classe du critérium $b \equiv m'\,a \pmod q$ est donc $i \pm 2$ si la différence $\frac{q+1}{4} - (i \pm 2)$ est paire, c'est-à-dire si q est de la forme $8\,l + 3$; cette classe est i lorsque $\frac{q+1}{4}$ est pair, c'est-à-dire lorsque q est de la forme $8\,l - 1$. En réunissant les deux résultats obtenus nous avons ce théorème :

Deux critériums $b \equiv ma$, $b \equiv m'\,a \pmod q$ liés entre eux par la relation $mm' \equiv -1 \pmod q$ appartiennent à la même classe lorsque, le nombre q étant de la forme $8\,l - 1$, l'un d'eux appartient à la classe 0 ou à la classe 2, ou encore lorsque, q étant de la forme $8\,l + 3$, l'un d'eux est de l'une des classes 1 ou 3 : dans les autres cas, au contraire, les d'eux critériums appartiennent à deux classes dont les indices diffèrent entre eux de deux unités.

Les propriétés des critériums biquadratiques démontrées dans ce n° et dans le précédent sont celles que Gauss a énoncées, avec des notations différentes, au n° 28 de son second Mémoire sur les résidus biquadratiques.

42. Pour compléter la théorie des résidus biquadratiques nous démontrerons les théorèmes de Gauss relatifs à la classification du nombre 2. Ils échappent à la méthode précédente ; mais on y parvient d'une manière p. 367), aux deux comme l'a fait Dirichlet (Journal de M. Liouville 1859, simple en recourant, équations

$$p = a^2 + b^2,\ 2\,p = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

D'abord puisque p est résidu quadratique de tous les diviseurs de a, tous ces diviseurs sont réciproquement résidus quadratiques de p, et l'on a $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod p$. De même $2\,p$ est résidu quadratique de $a+b$; le nombre premier p est donc lui-même résidu quadratique des diviseurs de $(a+b)$ dont 2 est résidu quadratique, c'est-à-dire des diviseurs premiers $8\,l \pm 1$, et il est non résidu quadratique des diviseurs premiers $8\,l \pm 3$; réciproquement les diviseurs premiers $8\,l \pm 1$ de $a+b$ sont ré-

sidus quadratiques de p, et les autres sont non résidus quadratiques. Leur produit $a+b$ sera donc résidu quadratique ou non résidu quadratique de p suivant que le nombre des diversus premiers $8l \pm 3$ sera pair ou impair, c'est-à-dire suivant que $a+b$ sera de l'une des deux formes $8l \pm 1$ ou de l'une des deux formes $8l \pm 3$. On a donc dans tous les cas

$$\text{(A)} \quad \left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}[(a+b)^2-1]} \equiv (a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}.$$

Or
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \equiv 2ab \pmod{p},$$

$$(a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} a^{\frac{1}{4}(p-1)} b^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}.$$

Supposons que, t désignant toujours la base de classification, les signes des nombres a et b vérifient la formule $a + b\,t^{\varpi} \equiv o \pmod{p}$; si l'on pose $t^{\varpi} \equiv f \pmod{p}$ on aura $b \equiv af \pmod{p}$ et la formule précédente, eu égard à la congruence $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ devient

$$\text{(B)} \quad (a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} f^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}.$$

D'ailleurs on déduit de la congruence $-1 \equiv f^2 \pmod{p}$.

$$(-1)^{\frac{1}{8}[(a+b)^2-1]} \equiv f^{\frac{1}{4}[(a+b)^2-1]} \equiv f^{\frac{1}{4}(p-1+2ab)} \equiv f^{\frac{1}{4}(p-1)} f^{\frac{1}{2}ab} \pmod{p};$$

La comparaison des congruences (A) et (B) donnera donc

$$2^{\frac{1}{4}(p-1)} f^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv (a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv f^{\frac{1}{4}(p-1)} f^{\frac{1}{2}ab} \pmod{p}$$

$$(1) \quad 2^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv f^{\frac{1}{2}ab} \equiv t^{\frac{1}{2}ab\varpi} \pmod{p}.$$

$$(2) \quad a^{\frac{1}{2}ab}\, 2^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv (af)^{\frac{1}{2}ab} \equiv b^{\frac{1}{2}ab} \pmod{p},$$

ce qui est la formule de Gauss (Werke II, p. 96).

La congruence (1) donne immédiatement la règle énoncée par Gauss au n° 21 du premier mémoire (ibid. p. 89). En effet le caractère biquadratique de 2 est 0, 1, 2 ou 3 suivant que $2^{\frac{1}{4}(p-1)}$ se réduit, relativement au module p, à 1, t^{ϖ}, -1, $t^{3\varpi}$, et, conséquemment, suivant que $\frac{ab}{2} \equiv 0, 1, 2$ ou 3, (mod 4). Donc

Le caractère biquadratique de 2 est 0, 1, 2 ou 3, suivant que l'on a $ab = 8l$, $8l+2$. $8l+4$, ou $8l+6$.

Prenons le signe de a de manière à vérifier la congruence $a \equiv 1$ (mod 4). Pour que la congruence (11) soit toujours vérifiée il faudra déterminer le signe de b au moyen de la congruence $b \equiv a\, t^{\varpi}$ (mod p). Comme $a - 1$ est multiple de 4, $b\,(a-1)$ est multiple de 8, $ab \equiv b$ (mod 8); la règle de Gauss peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Les signes des deux nombres a et b étant déterminés par les deux congruences $a \equiv 1$ (mod 4), $b \equiv at^{\varpi}$ (mod $p = 4\varpi + 1 = a^2 + b^2$), le caractère biquadratique de 2, relativement au module p et à la base t, est 0, 1, 2 ou 3, suivant que $\frac{1}{2}\, b$ est de la forme $4l$, $4l+1$, $4l+2$ ou $4l+3$.

§ *V. Loi générale de réciprocité pour les résidus de* N^ièmes^ *puissances.*

43 Quel que soit le nombre premier n, la méthode suivie pour les résidus cubiques permet de former, au moyen des facteurs complexes $R_{h,k}$ des nombres premiers, renfermés dans la formule $p = n\varpi + 1$, une fonction $\psi(\rho)$ qui donne lieu à une loi de réciprocité d'ordre N^ième^ analogue à celle du troisième ordre que nous avons exposée plus haut. Cette loi de réciprocité est renfermée dans les deux formules génerales suivantes :

1° La fonction $\psi(\rho)$ étant formée au moyen des facteurs complexes du nombre premier $n\varpi + 1$, de la manière exposée plus loin, si l'on considère un second nombre premier $q = nq' + 1$ et que l'on distribue en n classes les $q - 1$ racines de la congruence $x^{q-1} \equiv 1$ (mod q), en attribuant à la classe 0 celles dont les indices relativement à la base t_1 sont multiples de n et à la classe i celles dont les indices sont de la forme $nx + i$; enfin, si l'on pose $t_1^{\frac{q-1}{2}} \equiv \beta$ (mod q), la valeur de l'expression $\psi(\beta)$ (mod q) détermine la classe du nombre q relativement au module p; le nombre q est résidu ou non résidu de puissance n^ième^ pour le module p, suivant que la valeur de l'expression $\psi(\beta)$ (mod q) est elle même un résidu ou un non residu de puissance n^ième^ pour le module q; de plus le caractère d'ordre n^ième^ du nombre q relativement au module p et à la base t est le même que celui de $\psi(\beta)$ relativement au module q et à la base t_1.

2° Si, conjointement avec le nombre premier $p = n\varpi + 1$, on considère un nombre premier $nq' - 1 = q$ et qu'on distribue en n classes les nq' racines complexes de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q), en attribuant à une même classe i celles dont les indices relativement à la base r sont de la forme $nx + i$; si l'on pose en outre $r^{q'} \equiv \beta$ (mod q), les espressions $\psi(\beta)$,

$\psi(\beta^{-1})$ se réduiront suivant le module q à des racines de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, et la classe j de l'expression $\psi(\beta^{-1})$ relativement au module q et à la base r a le même indice j que celle du nombre q relativement au module p et à la base t.

44. Quand le nombre n est supérieur à 4 on peut considérer des nombres premiers $nq' \pm 2$, $nq' \pm \sigma$, en désignant par σ un nombre entier compris entre 1 et $n-1$; peut-on établir des lois de réciprocité d'ordre $n^{\text{ième}}$ entre les nombres premiers de l'une de ces formes et les nombres premiers $p = n\varpi + 1$? La reponse à cette question dépend d'un problème qui n'a pas encore été résolu, celui de trouver les facteurs irréductibles en lesquels peut se décomposer la congruence

$$x^{nq'} \equiv 1 \pmod{q = nq' \pm \sigma},$$

dans le cas ou σ est > 1, et de décider si les racines de cette congruence peuvent s'exprimer par nq' puissances consécutives de l'une d'entre elles. Mais, à défaut de lois de réciprocité, on peut établir pour ces nombres premiers $nq' \pm \sigma$ des théorèmes analogues à ceux que l'on déduit des lois de réciprocité pour les nombres premiers $nq' \pm 1$; ces théorèmes consistent en des critériums propres à faire connaître, à priori, la classe à laquelle ils appartiennent relativement au module p et à la base t. Dans le cas où le nombre premier q est de la forme $nq' \pm \sigma$ comme dans celui où $q = nq' \pm 1$, ces critériums sont formés par des congruences relatives au module q, qui doivent être vérifiées par les coefficients de certains facteurs complexes $R_{h,k}$ de p, avec cette différence que le degré de ces congruences croît en même temps que le nombre q, tandis que les critériums déduits des lois de réciprocité pour les nombres premiers $nq' \pm 1$ consistent en des congruences dont le degré ne dépend que du nombre premier n. Nous avons vu qu'elles sont du premier degré pour $n = 3$; nous trouverons qu'elles sont du second degré quand $n = 5$, du troisième quand $n = 7$, du sixième degré pour $n = 11$, etc...

Avant d'aborder la démonstration de ces théorèmes, nous exposerons la théorie des résidus de puissances donnée par Cauchy dans le Bullettin de Férussac (t. 12, 1829), afin de nous servir de son théorème général pour établir notre théorie. D'ailleurs il n'est pas sans intérêt de développer d'une manière complète les démonstrations que l'auteur n'a fait qu'indiquer.

45. Nous supposerons d'abord que l'on désigne par n un nombre positif premier ou composé, par ρ une racine primitive de l'équation $x^n = 1$ et par t une racine primitive de p prise comme base d'un système d'indices ainsi que nous l'avons expliqué dans les préliminaires (9). Le theorème fondamental de Cauchy consiste en ce que:

Si l'on forme successivement les polynômes

$$R = R_{1,1}\ R_{1,2}\ R_{1,3} \ldots R_{1,n-2},\ S = R_{1,1}\ R_{1,2} \ldots R_{1,\sigma-1}$$

$$R^{\xi}\ S = b_0 + b_1\,\rho + b_1\,\rho^2 + \ldots + b_{n-1}\,\rho^{n-1}$$

au moyens des facteurs $R_{1,k}$ *définis par la formule*

$$R_{1,k} = \sum \rho^{\text{ind}\,s - (1+k)\,\text{ind}\,(s+1)}\ (s = 1, 2, 3, \ldots p-2)$$

où les indices se rapportent à la racine primitive t ; *si de plus on désigne par* q *un nombre premier* $n\,\xi + \sigma$ *dont* i *soit l'indice relativement au module* p *et à la base* t ; *on aura l'équation*

$$\text{(I)}\ p^{\xi}\ \left[b_0 + b_1\,\rho + b_2\,\rho^2 + \ldots + b_{n-1}\,\rho^{n-1}\right] = \rho^{(n-\sigma)i} + q\,f(\rho),$$

dans laquelle f (ρ) *désigne une fonction entière de* ρ *dont tous les coefficients sont des nombres entiers.*

De plus, quand on suppose que le nombre n *est premier, la classe du nombre* q *relativement au module* p *et à la base* t *est déterminée par la congruence.*

$$\text{(II)}\ i\ (n-\sigma) \equiv m\ (\text{mod}\ n),$$

où le nombre m *est déterminé par cette condition deduite de l'équation* (1), *que tous les coefficients* b^0, b_1, b_2, ... b_{n-1} *divisés par* q *donnent un même reste, à l'exception du coefficient* b_m *qui donne un reste différent.*

Notre formule (I) ne diffère de celle de Cauchy qu'en ce que le symbole

$\left[\frac{q}{p}\right]$ est remplacé par sa valeur ρ^i..

Démonstration. De la forme $n\,\xi + \sigma$ du nombre q et de ce que i est son indice relativemant au module p et à la base t on conclut que

$$\rho^q = \rho^{\sigma},\ t^i \equiv q\ (\text{mod}\ p),\ \theta^{t^i} = \theta^q,$$

en sorte que l'on a

$$(1)\quad \Theta_1^q = \theta^{ti} + \rho^\sigma \theta^{ti+1} + \rho^{2\sigma} \theta^{ti+2} + \ldots + q\,F(\theta, \rho) = \rho^{-\sigma i}\,\Theta_\sigma + q\,F(\theta, \rho).$$

D'ailleurs en appliquant la formule (n° 9)

$$\Theta_h\,\Theta_k = R_{h,k}\,\Theta_{h+k}$$

on obtient successivement

$$\Theta_1^2 = R_{1,1}\,\Theta_2\,,\ \Theta_1^3 = R_{1,1}\,R_{1,2}\,\Theta_3\,,\ldots\ \Theta_1^\sigma = R_{1,1}\,R_{1,2}\ldots R_{1,\sigma-1}\,\Theta_\sigma\,,$$

$$\Theta_1^n = R_{1,1}\,R_{1,2}\ldots R_{1,n-2}\,p.$$

Nous posons avec Cauchy

$$(2)\quad R = R_{1,1}\,R_{1,2}\ldots R_{1,n-2}\,,\ S = R_{1,1}\,R_{1,2}\ldots R_{1,\sigma-1}\,,$$

en sorte que nous avons

$$\Theta_1^n = R\,p\,,\ \Theta_1^\sigma = \Theta_1^{n\xi}\,\Theta_1^\sigma = R^\xi\,S.\,p^\xi.\,\Theta_\sigma\,,$$

et l'équation (I) devient

$$\Theta_\sigma\,[p^\xi\,R^\xi\,S - \rho^{-\sigma i}] = q\,F(\theta, \rho).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\Theta_{-\sigma}$ et posons $F(\theta, \rho)\,\Theta_{-\sigma} = F_1(\theta, \rho)$; nous trouvons

$$p\,[p^\xi\,R^\xi\,S - \rho^{-\sigma i}] = q\,F_1(\theta, \rho).$$

Comme le produit $F_1(\theta, \rho)$ est une fonction entière de ρ et de θ dont tous les coefficients sont des nombres entiers et que nous obtenons ici une valeur de cette fonction indépendante de θ, toutes les conditions du premier théorème auxiliaire (2) sont remplies; de sorte que nous devons en conclure que $F_1(\theta, \rho)$ se réduit à une fonction entière de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers. On peut aussi supposer cette fonction réduite au degré $\mu - 1$ au moyen de l'équation irréductible de degré μ verifiée par la racine ρ; on peut faire la même supposition pour le polynôme $p^\xi\,R^\xi\,S - \rho^{-\sigma i}$; cette double supposition reduit l'équation obtenue à une identité, d'où l'on conclut que la fonction entiere de ρ à laquele se réduit $F_1(\theta, \rho)$ a tous ses coefficients divisibles par p, en sorte que nous pouvons poser

$$F_1(\theta, \rho) = p\,f(\rho)\,,$$

$$(3)\quad p^\xi\,R^\xi\,S - \rho^{-\sigma i} = q\,f(\rho)\,,$$

en désignant par $f(\rho)$ une fonction entière de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers. Qu'on effectue les calculs indiqués dans la formule $R^{\xi} S$, en ayant soin de réduire les exposants de ρ au dessous de n, au moyen de l'équation $\rho^n = 1$, on trouvera

$$R^{\xi} S = b_0 + b_1 \rho + b_2 \rho^2 + \ldots + b_{n-1} \rho^{n-1},$$

et l'équation (3) pourra se mettre sous la forme

$$(4)\quad p^{\xi} [b_0 + b_1 \rho + b_2 \rho^2 + \ldots + b_{n-1} \rho^{n-1}] = \rho^{(n-\sigma)i} + q f(\rho),$$

ce qui constitue la première partie du théorème de Cauchy. Pour l'autre partie nous devons supposer que le nombre n est premier.

Désignos par m le résidu minimum positif du produit $(n-\sigma)i$ divisé par n; ce nombre m vérifie la congruence

$$(\text{II})\quad (n-\sigma)\, i \equiv m \pmod{n},$$

de sorte que $\rho^{(n-\sigma)i} = \rho^m$. Supposons d'abord $m < n-1$. En retranchant du premier mem bre de l' équation (4) l'expression nulle $p^{\xi} [1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}]$ b_{n-1} on obtient

$$p^{\xi} [b_0 - b_{n-1} + (b_1 - b_{n-1}) \rho + \ldots + (b_{n-2} - b_{n-1}) \rho^{n-2}] = \rho^m + q f(\rho).$$

Supposons en outre le polynôme $f(\rho)$ réduit au degré $n-2$, au moyen de l'équation $\rho^{n-1} + \rho^{n+2} + \ldots + \rho + 1 = 0$. L'équation obtenue n'étant que du degré $n-2$ par rapport à ρ doit être identique et l'on en conclut que les différences

$$b_0 - b_{n-1},\ b_1 - b_{n-1},\ \ldots\ b_{n-2} - b_{n-1}$$

sont toutes divisibles par q, à l'exception de la différence $b_m - b_{n-1}$, qui verifie la congruence

$$p^{\xi} (b_m - b_{n-1}) \equiv 1 \pmod{q}.$$

Donc tous les coefficients $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, divisés par q, donnent le même reste, à l'exception du coefficient b_m qui donne un reste différent. La même chose a lieu si $m = n-1$; mais pour réduire l'équation (4) au degré $n-2$ il faut alors retrancher l'expression nulle $(p^{\xi} b_{n-1} - 1)$ $(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1})$, ce qui donne

$$p^{\xi} (b_0 - b_{n-1}) + 1 + [p^{\xi} (b_1 - b_{n-1}) + 1] \rho + \ldots + [p^{\xi} (b_{n-2} - b_{n-1}) + 1] \rho^{n-2} = q f(\rho).$$

et l'on conclut de là que toutes les différences $b_0 - b_{n-1}$, $b_1 - b_{n-1}$, ... $b_{n-2} - b_{n-1}$ vérifient la même congruence

$$p^{\xi}(b_e - b_{n-1}) + 1 \equiv 0 \pmod{q}, \quad (e = 0, 1, 2, \ldots n-2).$$

Ainsi dans ce cas comme dans le précédent, tous les coeffieients b_0, b_1, b_2, ... b_{n-1}, divisés par q, donnent le même reste, à l'exception du coefficient $b_m = b_{n-1}$, qui donne un reste différent.

La classe du nombre q est donc facile à déterminer une fois que l'on connaît les coefficients $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$; il suffit de les diviser par q, de remarquer l'indice m de celui de ces coefficients qui ne donne pas le même reste que les autres, puis de résoudre la congruence (II) $(n-\sigma)\, i \equiv m \pmod{n}$; la classe i du nombre q est la racine représentée par un terme de la suite $1, 2, \ldots n-1$.

On peut aussi donner le caractère d'ordre $n^{\text{ième}}$ du nombre premier q et demander les conditions que doivent vérifier les coefficientes b_0, b_1, b_2, ... pour que ce caractère convienne au nombre q relativement au nombre premier p et à la base t. Tous ces coefficients doivent donner le même reste, quand on les divise par le nombre q, à l'exception d'un seul, qui donne un reste différent, et dont l'indice m est déterminé par la congruence (II). Toutes les différences $b_0 - b_m$, $b_1 - b_m$, $b_2 - b_m$, ... $b_{n-1} - b_m$ sont congrues entre elles relativement au module q, excepté la différence nulle $b_m - b_m$; elles vérifient la congruence

$$(5) \quad p^{\xi}(b_e - b_m) + 1 \equiv 0 \pmod{q},$$

d'où l'on déduit

$$b_m - b_e \equiv p^{q-1-\xi}, \quad (b_m - b_e)^n \equiv p^{n(q-1)-n\xi} \equiv p^{q-1-n\xi} \equiv p^{\sigma-1} \pmod{q};$$

nous obtenons ainsi le théorème de Cauchy, que toutes les différences $b_e - b_m$, en supposant e différent de m, sont congrues à une même racine de la congruence $x^n \equiv p^{\sigma-1} \pmod{q}$.

46 Remarques I. La présence du nombre p dans la formule (5) la rendrait impropre au but de déterminer à priori les conditions que doivent remplir certains facteurs complexes de p, pour que le nombre premier q soit de la classe donnée i, relativement au module p et à la base t d'après laquelle ont été calculés les coefficients de ces facteurs complexes. Mais on évite cette difficulté en remplaçant p par sa valeur exprimée au moyen de ces coefficients; on sait en effet que, quel que soit le facteur complexe $R_{h,k}$ de p, si l'on désigne pur a_0, a_1, ... a_{n-1} ses coefficients, on a

$$p = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + 2.$$

Quand $n=3$ on peut remplacer la congruence (5) par une congruence homogène. Veut-on exprimer que q est résidu cubique de p, les conditions nécessaires sont que la différence $b_1 - b_2 \equiv 0 \pmod{q}$, et que la valeur commune, relativement au module q, des deux différences $b_1 - b_0$, $b_2 - b_0$ vérifie la congruence (5) ; mais on peut négliger cette dernière condition, parce qu'elle est une conséquence nécessaire de la première. Ainsi dans le cas où $n=3$, le caractère cubique du nombre q relativement au nombre p est 0, si $b_1 - b_2$ est divisible par q; de même il est 1 ou 2 suivant que le nombre q divise $b_0 - b_2$ ou $b_0 - b_1$.

II. Pour former les polinômes R, S il n'est pas nécessaire de calculer au moyen de la formule $R_{1,k} = \sum \rho^{inds+kind(s+1)}$ tous les facteurs $R_{1,k}$ qui figurent dans les formules (2) ; d'abord on peut abréger de moitié cette partie du calcul au moyen de la relation

$$R_{1,k} = R_{1,-k-1},$$

qui se déduit comme cas particulier du théorème suivant de Cauchy.

Si la somme des trois nombres h, k, l est divisible par n, on a

$$(6) \quad R_{h,k} = R_{k,l} = R_{h,l}.$$

En effet, en changeant l'ordre des facteurs du produit $\Theta_h \Theta_k \Theta_l$ on trouve

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l = R_{h,k} \Theta_{h+k} \Theta_l = R_{h,k}\, p,$$

$$\Theta_k \Theta_l \Theta_h = R_{kl}\, p, \quad \Theta_h \Theta_l \Theta_k = R_{hl}\, p.$$

De plus, en suivant une méthode indiquée aussi par Cauchy dans le mémoire cité, on peut remplacer le plus grand nombre des facteurs $R_{1,k}$ par les résultats qu'on obtient en substituant à ρ dans $R_{1,1}$ les puissances ρ^2, ρ^4, etc.. Pour abréger nous désignerons avec Cauchy par R_1 le facteur complexe $R_{1,1}$ et par R_m ce qu'il devient quand on y remplace ρ par ρ^m ; puis, appliquant la formule $\Theta_m^2 = R_m \Theta_{2m}$, nous obtenons successivement

$$\Theta_1^2 = R_1 \Theta_2, \quad \Theta_1^4 = R_1^2 \Theta_2^2 = R_1^2 R_2 \Theta_4, \ldots$$

et enfin

$$(7) \quad \Theta_1^{2^m} = R_1^{2^{m-1}} R_2^{2^{m-2}} \ldots R_{2^{m-1}} \Theta_{2^m}$$

1° Si $n = 2^m + 1$, on déduira de la formule (7)

$$\Theta_1^n = \Theta_1^{2^m} \Theta_1 = R_1^{2^{m-1}} R_2^{2^{m-2}} \ldots R_{2^{m-1}}\, p,$$

en sorte que l'on a $R = R_1^{2^{m-1}} R_2^{2^{m-2}} \ldots R_{2^{m-1}}$. Ainsi quand n'est un nombre premier $2^m + 1$, comme 3, 5, 17, ... il suffit ds calculer un seul facteur complexe de p, $R_{1,1}$.

2.° Si $n = 2^m + 2^l + 1$, on aura

$$\Theta_1^n = \Theta_1^{2^m}\ \Theta_1^{2^l}\ \Theta_1 = R_1^{2^{m-1}}\ R_1^{2^{m-2}} \ldots R_{2^{m-1}}\ R_1^{2^{l-1}}\ R_2^{2^{l-2}} \ldots R_{2^{l-1}}\ \Theta_2\ m\ \Theta_2\ l\ \Theta_1$$

D'ailleurs $\Theta_{2^m}\ \Theta_{2^l}\ \Theta_1 = R_{1,2^l}\ p = R_{1,2^m}\, p$, on a donc

$$R = \Theta^n = R_1^{2^{m-1}}\ R_2^{2^{m-2}}\ \ldots\ R_{2^{m-1}}\ R_1^{2^{l-1}} \ldots R_{2^{l-1}}\ R_{1,2}\ l.$$

Ainsi pour les nombres premiers $n = 1 + 2^l + 2^m$, comme 7, 11, 13, 19, ... on doit calculer deux facteurs complexes de p, $R_{1,1}$ et $R_{1,2^l}$. Il y aurait un facteur complexe de plus à calculer pour les nombres premiers $1 + 2^h + 2^k + 2^l$, etc.; en un mot si le nombre n est écrit dans le système de numération binaire, on doit, pour former le polynôme R, calculer autant de facteurs complexes de p que le nombre n renferme de chiffres différents de zéro moins un.

47. Pour mieux faire comprende le théorème général de Cauchy nous allons l'appliquer à la théorie des résidus cubiques. Dans ce cas $n = 3$, $R = R_1$, $S = 1$ ou R_1 suivant que $\sigma = 1$ ou 2. Les coefficient b_0, b_1, b_2 sont déterminés par la formule

$$(8)\quad R_1^{\xi+\sigma-1} = (a_0 + a_1\,\rho + a_2\,\rho^2)^{\xi+\sigma-1} = b_0 + b_1\,\rho + b_2\,\rho^2,$$

dans laquelle les coefficients a_0, a_1, a_2 sont les mêmes qu'au n° 12, de sorte que si l'on continue à poser $4\,p = L^2 + 27\,M^2$ et à désigner par L et M celles des racines des deux carrés L^2, M^2, qui vérifient les congruences

$$L \equiv 1 \pmod 3,\ L + (2\,t^{\varpi} + 1)\,3\,M \equiv 0 \pmod p,$$

on a $$2\,a_0 - a_1 - a_2 = L,\ a_1 - a_2 = 3\,M.$$

1.° Soit $q = 5 = 3\,\xi + \sigma$. On a $\xi = 1$, $\sigma = 2$, en sorte que l'on déduit de la formule (8) $b_0 = a_0^2 + 2\,a_1\,a_2$, $b_1 = a_2^2 + 2\,a_0\,a_1$, $b_2 = a_1^2 + 2\,a_0\,a_2$. La condition nécessaire et suffisante pour que 5 soit résidu cubique de p est exprimée par la congruence

$$b_1 - b_2 = (a_2 - a_1)\,(a_2 + a_1 - 2\,a_0) = 3\,L\,M \equiv 0 \pmod 5;$$

nous trouvons ainsi, pour la classe 0, les deux critériums déjà obtenus

$$L \equiv 0,\ M \equiv 0 \pmod 5.$$

Les critériums des deux autres classes se déduiraient de même des deux congruences $b_0 - b_2$, $b_0 - b_1 \equiv 0 \pmod 5$.

2.° Soit $q = 7 = 3.\,2 + 1$. On a ici $\xi = 2$ et $\sigma = 1$. Les expressions de b_0, b_1, b_2, en fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, sont les mêmes que dans le

cas précédent, c'est pourquoi les critériums de la classe 0 sont les deux congruences

$$L \equiv 0\,,\ M \equiv 0 \pmod{7}.$$

3.° Soit $q = 11 = 3.\ 3 + 2$; $\xi = 3$, $\sigma = 2$. Les coefficients b_0 , b_1 , b_2 sont déterminés par l'équation

$$R_1^4 = [a_0^2 + 2\,a_1\,a_2 + (a_2^2 + 2\,a_1\,a_0)\,\rho + (a_1^2 + 2\,a_1\,a_0)\,\rho^2]^2 = b_0 + b_1\,\rho + b_2\,\rho^2.$$

$$b_0 = (a_0^2 + 2\,a_1\,a_2) + 2\,(a_1^2 + 2\,a_0\,a_2)\,(a_2^2 + 2\,a_1\,a_0)\,,$$

$$b_1 = (a_1^2 + 2\,a_0\,a_2)^2 + 2\,(a_0^2 + 2\,a_1\,a_2)\,(a_2^2 + 2\,a_0\,a_1)\,,$$

$$b_2 = (a_2^2 + 2\,a_0\,a_1)^2 + 2\,(a_0^2 + a_1\,a_2)\,(a_1^2 - 2\,a_0\,a_2).$$

Les critériums de la classe o se déduisent de la congruence

$$b_1 - b_2 = [a_1^2 - a_2^2 - 2\,a_2\,(a_1 - a_2)]\,[a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_0\,(a_1 + a_2)$$
$$- 2\,a_2^2 - 4\,a_1\,a_2] \equiv 0 \pmod{11}\ ;$$

or $a_1^2 - a_2^2 - 2\,a_0\,(a_1 - a_2) = -3\,L\,M$,

$$a_1^2 - a_0^2 + 2\,a_2\,(a_0 - a_1) + a_2^2 - a_0^2 + 2\,a_1\,(a_0 - a_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[27\,M^2 - L^2] \equiv \tfrac{1}{2}\,(16\,M^2 - L^2) \pmod{11}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que 11 soit résidu cubique du module premier $p = \dfrac{L^2 + 27\,M^2}{4}$ est exprimée par la congruence.

$$L\,M\,(4\,M + L)\ (4\,M - L) \equiv 0 \pmod{11}\,,$$

d'où l'on déduit que les critériums cubiques de la classe 0 pour 11 sont

$$L \equiv 0\,,\ M \equiv 0\,,\ L \equiv 4\,M\,,\ L \equiv 7\,M \pmod{11}\,,$$

ainsi que nous l'avons déjà trouvé par une autre méthode.

Jusqu'ici les calculs sont encore assez simples ; mais ils se compliquent de plus en plus à mesure que l'on donne à q des valeurs de plus en plus grandes.

48 Sans qu'il soit besoin d'un plus grand nombre d'exemples on voit assez que l'application du théorème général de Cauchy à la recherche des diverses ordres de critériums exigerait des calculs fort compliqués ; de plus ce théoreme ne manifeste aucune reciprocité proprement dite, excepté le cas où $n = 2$. Or il n'est pas sans intérêt de savoir que la loi de reciprocité trouvée par Jacobi pour les résidus cubiques n'est qu'un cas particulier

d'une loi plus générale ; qu'il existe pour un nombre premier n quelconque une fonction $\psi(\rho)$ formée par les facteurs complexes $R_{h,k}$ du nombre premier $p = n\sigma + 1$, telle qu'un nombre premier $n q' \pm 1 = q$ soit résidu ou non résidu de $n^{\text{ième}}$ puissance pour le module p, suivant que le fonction $\psi(\rho)$ est elle même résidu ou non résidu de $n^{\text{ième}}$ puissance pour le module q. C'est ce que nous allons démontrer au moyen de la formule

$$(3)\quad p^{\xi} R^{\xi} S - \rho^{\sigma i} = q f(\rho)$$

obtenue précédemment (45). Cette formule est vraie quelle qne soit la racine primitive ρ de l'équation $x^n = 1$, en sorte qu'elle ne cesse pas d'être vérifiée quand on y remplace ρ par toute autre racine primitive de la même équation. Si donc nous supposons n impair, nous pouvons remplacer ρ par ρ^2, ce qui nous donne

$$p^{\xi} R_2^{\xi} S_2 - \rho^{-\sigma i} = q f(\rho^2),$$

R_2 et S_2 désignant ce que deviennent R et S quand on y remplace ρ par ρ^2. En retranchant de l'équation (3) cette dernière équation multipliée par $\rho^{\sigma i}$ on obtient

$$p^{\xi} [R^{\xi} S - \rho^{\sigma i} R_2^{\xi} S_2] = q [f(\rho) - \rho^{\sigma i} f(\rho^2)].$$

Comme cette équation devient identique relativement à ρ lorsqu'on ramène ses deux membres au degré $n-2$ par le moyen de l'équation irréductible $\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots + 1 = 0$, comme aussi tous les coefficients du premier membre sont multiples de p^{ξ} après cette réduction, il faut que les coefficients du second membre le soient aussi; on peut donc poser

$$f(\rho) - \rho^{\sigma i} f(\rho^2) = p^{\xi} F(\rho),$$

en désignant par $F(\rho)$ une fonction entière de ρ du degré $n-2$ et dont tous les coefficients sont des nombres entiers. Par là l'équation obtenue se mettra sous la forme

$$(9)\quad R^{\xi} S - \rho^{\sigma i} R_2^{\xi} S_2 = q F(\rho).$$

49. Jusqu'ici σ désigne l'un quelconque des nombres $1, 2, 3 \ldots n-1$. Nous allons dès à présent considérer les deux cas pour lesquels il existe une réciprocité proprement dite ; ce sont les cas où σ a l'une des valeurs 1 ou $n-1$. Le polinôme S se réduisant à 1 ou à R suivant que $\sigma = 1$ ou $n-1$, si l'on pose $q = n q' + \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, on aura dans les deux cas

$$R^{q'} - \rho^{\sigma i} R_2^{q'} = q F(\rho).$$

Afin d'éviter la confusion qui pourrait résulter de ce que le facteur complexe $R_{2,2}$ a été désigné précédemment par R_2, nous poserons $R = \omega(\rho)$, en sorte que notre formule deviendra

$$(10)\quad \omega(\rho)^{q'} - \rho^{\varepsilon i}\,\omega(\rho^2)^{q'} = q\,F(\rho),$$

$$\omega(\rho) = R = R_{1,1}\,R_{1,2}\,R_{1,3}\ldots R_{1,n-2},\quad \varepsilon = \pm 1,\quad q = n\,q' + \varepsilon.$$

Supposons d'abord $\varepsilon = 1$, $q = n\,q' + 1$. Nous formerons pour le module q une classification d'ordre $n^{\text{ième}}$ ayant pour base une racine primitive t_1 du nombre q et nous poserons $t_1^{q'} \equiv \beta \pmod q$, en sorte que β sera une racine primitive de la congruence $x^n \equiv 1 \pmod q$. Or si nous remplaçons ρ par β dans l'équation (10), cette équation, en vertu du théorème auxiliaire VII, se changera en congruence suivant le module q, et l'on aura

$$(11)\quad \omega(\beta)^{q'} - \beta^i\,\omega(\beta^2)^{q'} \equiv 0 \pmod q.$$

Je remarque d'abord qu'aucun des deux nombres $\omega(\beta)$, $\omega(\beta^2)$ n'est divisible par q; on a, en effet,

$$\omega(\rho) = R = \frac{\Theta_1^n}{p},$$

$$\omega(\rho)\,\omega(\rho^{-1}) = \omega(\rho^2)\,\omega(\rho^{-2}) = p^{n-2};$$

quand on remplace ρ par β cette équation, en vertu du même théorème VII, se change en congruence suivant le module q, et l'on a

$$\omega(\beta)\,\omega(\beta^{m1}) \equiv \omega(\beta^2)\,\omega(\beta^{-2}) \equiv p^{n-2} \pmod p,$$

d'où l'on voit qu'aucun des deux nombres $\omega(\beta)$, $\omega(\beta^2)$ n'est multiple du nombre q. Si donc nous posons

$$\frac{\omega(\beta)}{\omega(\beta^2)} \equiv K \pmod q.$$

K aura une valeur finie et différente de zero; désignant donc par j sou indice relotivement an module q dt à la base t_1, nous déduisons de la formule (11)

$$K^{q'} \equiv t_1^{q'j} \equiv \beta^i \equiv t_1^{q'i} \pmod q$$

$$t_1^{q'(j-i)} \equiv 1 \pmod q.$$

L'exposant $q'(j-i)$ est donc multiple de l'exposant $q - 1 = n\,q'$, auquel appartient la racine primitive t_1; posant donc $q'(j-i) = n\,q'.h$ et divisant par q' nous trouvons la congruence

$$(12)\ j \equiv i \pmod{n},$$

qui, eu égard aux définitions des deux indices i et j, exprime notre loi de réciprocité :

THÉORÈME I.

« *Etant donnés deux nombres premiers* $p = n\varpi + 1$, $q = nq' + 1$, *on peut former avec les facteurs complexes* $R_{1,k}$ *de* p *une fonction* $\psi(\rho)$ *définie par les deux équations*

$$(13)\ \psi(\rho) = \frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho^2)},\ \omega(\rho) = R_{1,1} R_{1,2} \ldots R_{1,n-2}\ ;$$

si l'on désigne par t *la base du système d'indices employé pour le calcul des facteurs* $R_{1,k}$, *par* t_1 *la base d'un système d'indices pour le module* q, *et qu'on pose* $t_1^{q'} \equiv \beta \pmod{q}$, *le caractère d'ordre* $n^{ième}$ *du nombre* q *relativement au module* p *et à la base* t *est le même que celui de la fonction* $\psi(\beta)$ *relativement au module* q *et à la base* t_1. »

Nous rappellerons ici que le caractère d'ordre $n^{ième}$ d'un nombre m relativement à un module premier $nx + 1$ et à une base t est le reste $0, 1, 2, \ldots n - 1$ obtenu en divisant par n l'indice du nombre m' relativement au module $nx + 1$ et à la base t.

Dans le cas où le caractère d'ordre $n^{ième}$ est zéro il n'est plus nécessaire de considérer les bases t et t_1 ; la loi de réciprocité s'énonce alors de la manière suivante :

THÉORÈME II.

« *Etant donnés deux nombres premiers* $p = n\varpi + 1$, $q = nq' + 1$, *la fonction* $\psi(\rho)$ *étant définie par les équations* (13), *et* β *designant une racine primitive quelconque de la congruence* $x^n \equiv 1 \pmod{q}$, *le nombre* q *est résidu ou non résidu de puissance* $n^{ième}$ *pour le module* p, *suivant que* $\psi(\beta)$ *est résidu ou non résidu de puissance* $n^{ième}$ *pour le module* q. »

50. Supposons en second lieu $\varepsilon = -1$, $q = nq' - 1$. D'après la théorie exposée au commencement de ce mémoire (5 et 6), si l'on désigne par m un non résidu quadratique du nombre premier q, les nq' racines de la congruence

$$(A)\ x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q = nq' - 1}$$

peuvent se mettre sous la forme complexe $a + b\sqrt{m}$ et sont congrues aux

puissances successives d'une même racine primitive $r = f + g\sqrt{m}$. Nous distribuerons ces racines en n classes $0, 1, 2, \ldots n-1$, en attribuant à une même classe i celles de ces racines dont les indices, relativement à la base r, sont congrus à i suivant le module n. Enfin nous appellerons caractère d'ordre $n^{ième}$ d'une racine de la congruence (A) le reste $0, 1, 2, \ldots$ ou $n-1$ de son indice divisé par n. Cette classification d'ordre $n^{ième}$ des racines de la congruence (A) permet d'établir entre deux nombres premiers $p = n\varpi + 1$ et $q = n q' - 1$ une loi de réciprocité toute semblable è celle que nous venons de trouver entre deux nombres premiers $p = n\varpi + 1$ et $q = n q' + 1$; la fonction de p qui donne lieu à cette loi est la même que dans ce dernier cas.

Démontrons d'abord le fondement de cette réciprocité. Il consiste en ce que la fonction $\psi(\rho)$ définie par les formules (13) jouit de cette propriété que, si l'on remplace ρ par $\beta = a + b\sqrt{m}$, racine primitive quelconque de la congruence $x^n \equiv 1 \pmod{q = n q' - 1}$, $\psi(\rho)$ devient racine de la congruence (A). En effet, $\omega(\rho)$ étant un polynôme dont tous les coefficients sont des nombres entiers, on a

$$\omega(\beta) = \omega(a + b\sqrt{m}) = A + B\sqrt{m},$$

A et B désignant deux nombres entiers. On a donc

$$\omega(\beta)^q = A^q + B^q\sqrt{m}.\, m^{\frac{q-1}{2}} + q(M + N\sqrt{m}).$$

D'ailleurs, par le théorème de Fermat et par ce que m est non résidu quadratique de q, on a

$$A^q \equiv A,\ B^q \equiv B,\ m^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \pmod{q};$$

notre équation réduite en congruence pour le module q devient donc

$$\omega(\beta)^q \equiv A - B\sqrt{m} \pmod{q},$$

$$\omega(\beta)^{q+1} \equiv A^2 - m B^2 \pmod{q}.$$

D'un autre côté β étant supposé racine primitive de la congruence $x^n \equiv 1 \pmod{q}$ vérifie la congruence (A), et, par consequent, les deux nombres a et b vérifient la conditien $a^2 - m b^2 \equiv 1 \pmod{q}$, en sorte que la racine inverse de β est $a - b\sqrt{m} \equiv \beta^{-1}$. On a donc

$$\omega(\beta) = A + B\sqrt{m},\ \omega(\beta^{-1}) = A - B\sqrt{m}$$

$$\omega(\beta)\ \omega(\beta^{-1}) = A^2 - B^2 m.$$

Mais si dans l'équation

$$\omega(\rho)\ \omega(\rho^{-1}) = p^{n-2}$$

nous remplaçons la racine ρ de l'équation irréductible $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0$, par β, racine de la congruence $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 \equiv 0 \pmod{q}$, cette équation, en vrrtu du théorème auxiliare VII, se change en congruence suivant le module q et l'on a

$$\omega(\beta)\ \omega(\beta^{-1}) \equiv p^{n-2} \pmod{q}.$$

en sorte que la fonction $\omega(\rho)$ vérifie la congruence

$$\omega(\beta)^{q+1} \equiv p^{n-2} \pmod{q},$$

quelle que soit la racine de la congruence $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 \equiv 0 \pmod{q}$ que l'on désigne par β. On peut donc remplacer β par β^2, et l'on a

$$\omega(\beta^2)^{q+1} \equiv p^{n-2} \pmod{q}.$$

La comparaison des deux congruences obtenues donne la propriété annoncée

$$\text{(B)}\quad \left(\frac{\omega(\beta)}{\omega(\beta^2)}\right)^{q+1} = \psi(\beta)^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Pour préciser notre loi de réciprocité nous prendrons $\beta \equiv r^{q'} \pmod{q}$, et nous remarquerons qu'en vertu de la formule (B) $\psi(\beta^l)$ est racine de la congruence (A) pourvu que l soit premier avec n. Remplaçons ρ par β^{-1} dans l'équation (10), ce qui, d'après la théorème auxiliaire VII, la changera en la congruence

$$\omega(\beta^{-1})^{q'} - \beta^i\ \omega(\beta^{-2})^{q'} \equiv 0 \pmod{q}.$$

$$\left(\frac{\omega(\beta^{-1})}{\omega(\beta^{-2})}\right)^{q'} = \psi(\beta^{-1})^{q'} \equiv \beta^i \pmod{q}.$$

Désignons par j l'indice de $\psi(\beta^{-1})$ relativement au module q et à la base $r = f + g\sqrt{m}$, de sorte qu'on aura $\psi(\beta^{-1}) \equiv r^j \pmod{q}$, et notre dernière congruence deviendra

$$r^{iq'} \equiv r^{jq'} \pmod{q},\ r^{q'(j-i)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Comme la racine primitive r appartient à l'exposant nq', il faut que $q'(j-i)$ soit multiple de cet exposant; c'est pourquoi les indices i et j doivent vérifier la congruence

$$j \equiv i \pmod{n},$$

qui exprime notre loide réciprocité, savoir :

Théorème III.

Etant donnés deux nombres premiers impairs $p = n\varpi + 1$, $q = nq' - 1$, *et la fonction* $\psi(\rho)$ *de* p *étant définie par les équations* (13), *si l'on désigne par* t *la base du systéme d'indices dans lequel sont calculés les facteur* $R_{l,k}$, *par* r *la base du systéme d'indices employé pour la classification des racines de la congruence* $x^{q+1} \equiv 1$ (*mod* q), *et qu'on pose* $r^{q'} \equiv \beta$ (*mod* q); $\psi(\beta^{-1})$ *est racine de la congruence* $x^{q+1} \equiv 0$ (*mod* q) *et son caractère d'ordre* $n^{\text{ième}}$ *relativement au module* q *et à la base* r *est le même que celui du nombre* q *relativement au module* p *et à la base* t.

Quand le caractère commun de $\psi(\beta^{-1})$ et de q est 0 la considération des deux bases t et r devient inutile; on énonce de la manière suivante la loi de réciprocité relative à ce cas :

Théorème IV.

Etant donnés deux nombres premiers $p = n\varpi + 1$, $q = nq' - 1$, *la fonction* $\psi(\rho)$ *étant définie par les formules* (13) *et* β *désignant une racine primitive quelconque de la congruence* $x^n \equiv 1$ (*mod* q), *le nombre* q *est résidu ou non résidu de* $n^{\text{ième}}$ *puissance pour le module* p, *suivant que* $\psi(\beta)$ *est résidu ou non résidu de puissance* $n^{\text{ième}}$ *pour le module* q.

51. Occupons-nous maintenant de simplifier autant que possible la fonction $\psi(\rho)$. Il faut d'abord réduire au plus petit nombre possible les facteurs $R_{1,k}$ dont il faut calculer les coefficients. C'est ce qu'on obtiendra en recourant à la formule (7) du n° 46 et en supprimant dans le rapport $\frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho^2)}$ les facteurs communs ainsi que les facteurs de $\omega(\rho)$ qui pourraient être, en vertu des formules (6), égaux à des facteurs de $\omega(\rho^2)$. Nous éclaircirons cela par quelques exemples :

1° $n = 5 = 2^2 + 1$. En désignant $R_{1,1}$ par R_1 on a (46)

$$\omega(\rho) = R = R_1^2 R_2, \quad \psi(\rho) = \frac{R_1^2}{R_2 R_4}.$$

2° $n = 7 = 2^2 + 2 + 1$. Dans ce cas.

$$\omega(\rho) = R_1^2 R_2 . R_1 R_{1,2}, \quad \psi(\rho) = \frac{R_1^3}{R_2^2 R_4} \frac{R_{1,2}}{R_{2,4}}.$$

Comme les trois nombres 1, 2, 4 forment une somme égale à 7, on a d'après les formules (6) $R_{1,2} = R_{2,4}$; ainsi

$$\psi(\rho) = \frac{R_1^3}{R_2^2 R_4}$$

3° $n = 11 = 2^3 + 2 + 1$ $\omega(\rho) = R_1^4 R_2^2 R_4 \,.\, R_1 R_{1,8}$; $R_{1,8} = R_{1,2}$;

$$\psi(\rho) = \frac{R_1^5}{R_2^3 R_4 R_8} \frac{R_{1,2}}{R_{2,4}}$$

4° $n = 13 = 2^3 + 2^2 + 1$. $\omega(\rho) = R_1^4 R_2^2 R_4 . R_1^2 R_2 R_{1,4}$,

$$\psi(\rho) = \frac{R_1^6}{R_2^3 R_4^2 R_8} \cdot \frac{R_{1,4}}{R_{2,8}}.$$

5° $n = 17 = 2^4 + 1$. $\omega(\rho) = R_1^8 R_2^4 R_4^2 R_8$,

$$\psi(\rho) = \frac{R_1^8}{R_2^4 R_4^2 R_8 R_{16}}.$$

Les facteurs $R_{1,k}$ sont déterminés par la formule

$$(14) \quad R_{1,k} = \sum \rho^{inds + kind\,(s+1)} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots . p-2.)$$

La base t du système d'indices employé pour le calcul des facteurs $R_{1,k}$ est celle à laquelle se rapporte notre loi de réciprocité entre $\psi(\rho)$ et q : nous l'avons énoncée précédemment (49).

Ainsi quand n est égal à 3, 5, 7 ou 17 la fonction $\psi(\rho)$ est formée des diverses valeurs que prend le facteur complexe $R_{1,1}$ quand on y remplace ρ par les termes de la progression géométrique $\rho, \rho^2, \rho^4, \rho^8, \ldots$; quand $n = 11$ ou doit calculer deux facteurs par la formule (14), le facteur $R_{1,1}$ et le facteur $R_{1,2}$. De même quand $n = 13$ en doit calculer deux facteurs, $R_{1,1}$ et $R_{1,4}$.

52. Proposons-nous de déterminer le caractère d'ordre n^{ième} du nombre 2 relativement au nombre premier $p = n\varpi + 1$. Nous avons vu, dans le cas des résidus cubiques, que le caractère de 2 se détermine par la considéraration du seul coefficient impair renfermé dans $R_{1,1}$. La même chose a lieu pour toute autre ordre n^{ième} de résidus, tant que n désigne un nombre premier impair. En effet, le théorème de Cauchy (45) subsiste quand on suppose $q = 2$, et conséquemment $\xi = 0$, $\sigma = 2$, $S = R_{1,1}$. Les coefficients b_0, $b_1, \ldots b_{n-1}$, auxquels se rapportent le théorème de Cauchy, ne sont autres

que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ du complexe $R_{1,1}$, en sorte que l'équation (4) devient

$$a_0 + a_2 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_{n-1} \rho^{n-1} = \rho^{(n-2)i} + 2 f(\rho),$$

i désignant l'indice de 2 relativement au nombre premier p et à la base t du système d'indices enmployé pour le calcul de $R_{1,1}$. Si donc nous désignons par m le résidu minimum positif du produit $(n-2)\, i$ (mod a), tous les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, divisés par 2, donnent un même reste h à l'exception du coefficient a_m qui donne un reste différent $h + (-1)^h$; on a donc

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \equiv nh + (-1)^h \pmod 2.$$

D'ailleurs $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = p-2;$$

on a donc, puisque n et p sont impairs,

$$h + (-1)^h \equiv 1 \pmod 2,$$

ce qui exige que $h = 0$.

Ainsi tous les coefficients du facteur complexe

$$R_{1,1} = \sum \rho^{indx(x+1)} = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_{n-1} \rho^{n-1}$$

sont pairs à l'exception d'un seul qui est impair; si l'on désigne par m l'indice du coefficient impair, le caractère d'ordre n^ième^, i, du nombre 2, relativement au module p et à la base t du système d'indices employé dans le calcul de $R_{1,1}$, est déterminé par la congruence

$$(n-2)\, i \equiv m \pmod n.$$

D'ailleurs $(n\text{-}2) \dfrac{n-1}{2} \equiv 1 \pmod n$; multipliant donc par $\dfrac{n-1}{2}$ la congruence précédente, nous trouvons le caractère i du nombre 2 déterminé par la formule

$$(15) \quad i \equiv \frac{n-1}{2}\, m \pmod n.$$

Si l'on suppose $i = 0$, $m = 0$; la condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit résidu de puissance n^ième^ du nombre premier $p = n\varpi + 1$ est que le facteur complexe $R_{1,1}$ de p soit de la forme $1 + 2\,(c_0 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + \ldots + c_{n-1} \rho^{n-1})$.

§ VI. *Loi de réciprocité du cinquième ordre.*

53. Il suffit de supposer $n = 5$ dans le paragraphe précédent pour obtenir les principeux théorèmes de la réciprocité à laquelle donnée lieu la considération des résidus de 5mes puissances. Soient donc

p un nombre premier $5\varpi + 1$,
ρ une racine primitive de l'équation $x^5 = 1$,
t une racine primitive de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$,

prenons t comme base d'un système d'indices pour le module p et partageons en 5 classes les résidus de p, en groupant dans une même classe i tous ceux dont les indices sont de la forme $5x + i$. La classe o sera représentée par la suite

$$(0) \quad 1, g, g^2, g^3, \ldots g^{\varpi-1},$$

où $g \equiv t^5 \pmod{p}$; tous les résidus de cinquièmes puissances pour le module p sont congrus à des termes de cette suite. De même nous représenterons la classe i par la suite

$$(i) \quad t^i,\ gt^i,\ g^2t^i, g^3t^i, \ldots g^{\varpi-1}t^i,$$

et nous attribuerons à la classe i tous les nombres congrus aux différents termes de cette suite. Posons

$$R_{1,1} = \varphi(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4.$$

Il résulte de la formule

$$(1) \quad R_{1,1} = \sum \rho^{inds\,(s+1)} \quad (s = 1, 2, \ldots p-2),$$

que le coefficient a^i de $\varphi(\rho)$ est égal au nombre des termes de la suite

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4, \ldots s(s+1), \ldots (p-2)(p-1),$$

dont les indices relativement au module p et à la base t sont de la forme $5x + i$. La fonction $\psi(\rho)$ de p, qui donne lieu à la réciprocité du cinquième ordre, et qui est définie (51) par la formule

$$(2) \quad \psi(\rho) = \frac{R^2_{1,1}}{R_{2,2}\ R_{4,4}} = \frac{\varphi(\rho)\,\varphi(\rho)}{\varphi(\rho^2)\,\varphi(\rho^4)},$$

se trouve ainsi étroitement liée eux résidus des nombres doubles des nombres triangnlaires.

Si l'on considère un second nombre premier $q = 5q' + 1$, et qu'on forme un système d'indices pour le module q en prenant pour base une racine primitive t_1, on déduit du n° 49, en y faisant $n = 5$, la loi suivante de réciprocité entre les deux nombres premier p et q:

Théorème I.

Etant donnés deux nombres premiers $p = 5\varpi + 1$, $q = 5q' + 1$, *et la fonction* $\psi(\rho)$ *de* p *étant définie par les deux formules* (1) *et* (2), *l'indice* i *de la classe à laquelle appartient le nombre* q, *relativement au module* p *et à la base* t, *est le même que celui de la classe à laquelle appartient le nombre* $\psi(t_1^{q'})$ *relativement au module* q *et à la base* t_1.

La classe 0 donne lieu à un théorème indépendant des bases t et t_1:

Théorème II.

Les nombres premier p *et* q *et la fonction* $\psi(\rho)$ *étant les mêmes que dans le théorème précédent, si l'on désigne par* β *uue racine primitive de la congruence* $x^5 \equiv 1$ (*mod* q). *le nombre* q *est résidu ou non résidu de cinquième puissance pour le module* p, *suivant que* $\psi(\beta)$ *est réridu ou non résidu de cinquième puissance pour le module* q.

54. La réciprocite entre le nombre $p = 5\varpi + 1$ et un nombre premier $q = 5q' - 1$ exige la considératioa des racines complexes de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q). Soit r une racine primitive de cette congruence, et posons $r^{q'} \equiv \beta$ (mod $q = 5q' - 1$); β sera racine primitive de la congruence $x^5 \equiv 1$ (mod q), et $\psi(\beta^{-1})$ sera racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q), en sorte qu'on pourra poser

$$\psi(\beta^{-1}) \equiv r^j \pmod{q}.$$

Le reste de la division de l'indice j divisé par 5 est ce que nous appelons le caractère du cinqnième ordre de $\psi(\beta^{-1})$ relativement au module q et à la base r, de même que le caractère du cinquième ordre du nombre premier q relativement au module p et à la base t est le reste obtenu en divisant par 5 l'indice du nombre q relativement au module p et à la base t. La loi de réciprocité du cinquième ordre entre les deux nombres premiers p et q consiste en ce que :

Théorème III.

Le caractère du cinquième ordre du nombre premier $q = n q' - 1$, *relativement au module premier* p *et à la base* t, *est le même que celui de* $\psi(\beta^{-1})$ *relativement au module* q *et à la base* r.

Pour le caractère 0 la considération des bases t et r est inutile:

Théorème IV.

La condition nécessaire et suffisante pour que le nombre q *soit résidu de cinquième puissance relativement au module* p *est que l'expression complexe* $\psi(\beta)$ *soit congrue à un résidu de* 5ième *puissance pour le module* q.

55. Les théoremes précédents permettent d'établir des critériums propres à déterminer les nombres premiers p dont q est résidu de cinquième puissance ou résidu de classe i. Ces critériums sont exprimés par des congruences homogènes du second dégré entre les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 du facteur complexe $R_{1,1}$ de p. Le nombre de ces critériums est $q-1$ ou $q+1$ suivant que le module q est de la forme $5q'+1$ ou de la forme $5q'-1$. Ces critériums sont également partagées entre les cinq classes, en sorte que chaque classe en renferme un nombre $\frac{q \pm 1}{5} = q'$; car les critériums de la classe i s'obtiennent en égalant, suivant le module q, l'expression $\psi(t_1^{q'})$ ou $\psi(\beta^{-1})$ aux q' racines de la classe i de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$. On peut aussi remplacer les congruences du second degré par des congruences linéaires; mais alors chaque critérium est formé d'un plus grand nombre de congruences, et le nombre des critériums est multiplié par $q \pm 1$. Nous bornerons a développer cela pour les critériums de la classe 0.

1.° $q = 5q'+1$. Si l'on pose $t_1^{q'} \equiv \beta \pmod{q}$, on obtiendra les critériums de la classe 0 en égalant, suivant le module q, l'expression $\psi(\beta)$ aux q' résidus de cinquièmes puissances du module q. Si l'on pose $t_1^5 \equiv g \pmod{q}$, on déduira ces critériums de la formule

$$(3) \quad \varphi(\beta)\,\varphi(\beta) \equiv g^h\,\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4) \bmod q),$$

en faisant successivement $h = 0, 1, 2, \ldots q'-1$, ce qui donnera q' critériums. Mais il est évident que la condition exprimée par la formule (3) sera véri-

fiée si prenant dans la suite 0, 1, 2, . . . $q-2$ deux nombres m, n qui vérifient la congruence $m+n \equiv 5h \pmod{q-1}$, on pose simultanément

$$(4)\quad \varphi(\beta) \equiv t_1^m \varphi(\beta^2) \equiv t_1^n \varphi(\beta^4) \pmod{q}.$$

Comme la congruence $m+n \equiv 5h \pmod{q-1}$ admet $5q'$ solutions pour chaque valeur de h, il correspond à chacun des critériums définis par la formule (3) $5q'$ critériums formés chacun par le système de deux arguments linéaires. Le nombre des critériums de la classe 0 est donc q' ou $5q'.q'$, suivant qu'on les prend sous la forme (3) ou sous la forme (4). Pour que le nombre q soit résidu de cinquième puissance de p il est nécessaire et suffisant que l'un de ces critériums soit vérifié.

Soit $q=11$. Prenant pour base $t_1=2$, d'où résulte $\beta=4$, nous trouvons

$$\varphi(\beta) = a_0 + 4a_1 + 5a_2 - 2a_3 + 3a_4,$$
$$\varphi(\beta^2) = a_0 + 5a_1 + 3a_2 + 4a_3 - 2a_4,$$
$$\varphi(\beta^4) = a_0 + 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 + 4a_4.$$

Comme $+1$ et -1 sont les seuls résidus de cinquièmes puissances pour le module 11, les critériums de la classe 0 sont donnés par la formule $\varphi(\beta)^2 \equiv \pm\varphi(\beta^2)\varphi(\beta^4)$. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que 11 soit résidu de cinquième puissance du module premier $p=5\varpi+1$ ést que la facteur complexe $R_{1,1}$ de p vérifie l'une des deux congruences

$$(a_0 + 4a_1 + 5a_2 - 2a_3 + 3a_4)^2 \equiv \pm(a_0 + 5a_1 + 3a_2 + 4a_3 - 2a_2)$$
$$(a_0 + 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 + 4a_4) \pmod{11}.$$

En déterminant les critériums par la formule (4) on en trouverait 20 pour la classe 0 au lieu de deux. Ce sont les systèmes suivants de eongruences:

$$a_2 + a_3 \equiv 2a_4 \text{ et } a_1 + 3a_2 \equiv 4a_4 \pmod{11};$$
$$a_0 + a_1 \equiv 2a_2, \quad a_2 + a_4 \equiv 4a_1 - 2a_3;$$
$$a_3 + a_4 \equiv 2a_0, \quad a_1 - a_4 \equiv 4a_2 - 4a_3;$$
$$2a_0 + 4a_1 + 9a_2 \equiv 4a_3, \quad a_1 - 5a_4 \equiv 2a_2 + 5a_3; \text{etc} \ldots$$

Il resterait à examiner si les 20 critériums de cette forme sont tous distincts, ou bien si quelques uns sont une conséquence des autres, en vertu des relations qui existent entre les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. On a en effet

$$p = \varphi(\rho)\varphi(\rho^4) = A + B\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + C\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$$

A, B, C designant des fonctions homogènes quadratiques des coefficients a_0, a_1, a_2, ... Posons $\rho + \frac{1}{\rho} = z$; z sera racine de l'équation irréductible

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

et l'on aura $p = A - 2C + Bz + Cz^2$. Ces deux équations du second degré en z doivent être équivalentes; leurs coefficients sont donc proportionnels :

$$\frac{C}{1} = \frac{B}{1} = \frac{A - 2C - p}{-1}.$$

On a d'ailleurs la relation linéaire $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = p - 2$; il existe donc entre les coefficients a_0, a, ... deux relations indépendantes de p. Savoir

$$B = C, \quad A - C = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2.$$

En combinant ces deux relations avec les deux congruences qui forment pour le module 11 un critérium de la classe 0, telles que $a_2 + a_3 \equiv 2a_4$, et $a_1 + 3a_2 \equiv 4a_4$ (mod 11), on aura une série de valeurs de $R_{1,1}$ telles que si le produit $R_{1,1}\ R_{4,4} = p$ est un nombre premier, 11 sera résidu de cinquième puissance pour le module p.

2.° Si $q = 5q' - 1$, il faut d'abord résoudre la congruence

$$(A)\ x^{q+1} \equiv 1 \ (\text{mod } q = 5q' - 1).$$

Si l'on désigne par r une racine primitive de cette congruence prise comme base d'un système d'indices, la congruence

$$(B)\ \psi\ (\beta) \equiv r^{5h+i} \ (\text{mod } q)$$

où $\beta \equiv r^{q'}$ (mod q), exprimera que q appartient à la classe i relativement au module p et à la base t. Comme r^{5h+i} admet q' valeurs distinctes, qui correspondent aux q' valeurs $h = 0, 1, 2, \ldots q' - 1$, on déduira de la formule (B) q' critériums de classe i. Chacun de ces critériums consiste en deux congruences homogènes du second degré entre les coefficients de $\varphi\ (\rho) = R_{1,1}$; on peut aussi remplacer ces critériums par des systèmes de trois congruences homogènes du premier degré ; mais alors chaque critérium quadratique sera remplacé pas $q + 1$ de ces critériums, et l'on aura pour chaque classe un nombre de critériums égal à $5q' \cdot q'$. Nous nous contenterons d'un seul exemple, $q = 19$, et nous bornerons nos reches aux critériums de la classe 0.

En prenant $r = 3 + 7\sqrt{-1}$ comme base d'un système d'indices pour les racines de la congruence

$$(A)\ x^{20} \equiv 1 \ (\text{mod } 19),$$

on trouve pour résidus de cinquièmes puissances $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, 1; de plus $\beta \equiv r^4 \equiv 7 + 3\sqrt{-1}$ (mod 19). On aura $\varphi(\beta) \equiv P + Q\sqrt{-1}$, P et Q désignant deux fonctions linéaires et homogènes des coefficients a_0, a_1, ... Comme β^4 ne diffère de β que par le changement du signe de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\varphi(\beta^4) \equiv P - Q\sqrt{-1}, \text{ et } P^2 + Q^2 \equiv p \pmod{q}.$$

On aura de même

$$\varphi(\beta^2) \equiv P_1 + Q_1\sqrt{-1} \text{ et } P_1^2 + Q_1^2 \equiv \pmod{q}$$

P_1 et Q_1 designant comme P et Q des fonctions linéaires et homogènes des coefficients a_0, a_1, etc.

Les quatre critériums de la classe 0 pour le module 19 se déduisent des congruences $\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4) \equiv \pm\varphi\overline{(\beta)}^2$, $\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4) \equiv \pm\sqrt{-1}\,\varphi\overline{(\beta)}^2$ (mod 19) en égalant séparément, suivant le module 19, les termes indépendants de $\sqrt{-1}$ et les coefficients de $\sqrt{-1}$. Ce sont

$$P^2 - Q^2 \equiv PP_1 + QQ_1 \text{ et } 2PQ \equiv PQ_1 - QP_1; \pmod{19}.$$
$$P^2 - Q^2 \equiv -(PQ_1 - QP_1) \text{ et } 2PQ \equiv PP_1 + QQ_1;$$
$$P^2 - Q^2 \equiv -(PP_1 + QQ_1) \text{ et } 2PQ \equiv -(PQ_1 - QP_1)$$
$$P^2 - Q^2 \equiv PQ_1 - QP_1 \text{ et } 2PQ \equiv -(PP_1 + QQ_1).$$

Le premier critérium, qui correspond à la congruence $\varphi(\beta_1)\,\varphi(\beta^4) \equiv \varphi\overline{(\beta)}^2$, est équivalent à 20 critériums formés chacun de trois congruences linéaires entre les coefficients a_0, a_1, ... de $\varphi(\rho)$. En effet, l désignant l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... 19, on vérifie évidemment la congruence $\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4) \equiv \varphi\overline{(\beta)}^2$, si l'on prend en même temps $\varphi(\beta^2) \equiv r^l\,\varphi(\beta)$, $\varphi(\beta^4) \equiv r^{-l}\,\varphi(\beta)$ (mod 19).

Soit $r^l = m + n\sqrt{-1}$ et conséquemment $r^{-l} = m - n\sqrt{-1}$; on aura

$$P_1 + Q_1\sqrt{-1} \equiv (m + n\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1}),$$
$$P - Q\sqrt{-1} \equiv (m - n\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1}) \pmod{19};$$

ce système, à cause de la congruences $m^2 + n^2 \equiv 1$ (mod 19), revient à celui des trois congruences linéaires et homogènes

$$\text{(c)} \quad nP \equiv (1 + m)Q, \; P_1 \equiv mP - nQ, \; Q_1 \equiv mQ + nP, \pmod{19}.$$

Le premier critérium du second degré est donc remplacé par 20 critériums du premier degré, que l'on déduit des formules (c) en égalant successivement $m + n\sqrt{-1}$ aux vingt racines de la congruence (A). Chacun des trois

autres critériums quadratiques pourrait de même être remplacé par 20 critériums linéaires, en sorte qu'il y a, ponr la seule classe 0, 80 critériums formés chacun de trois congruences linéaires simultanées.

Nous n'entrerons pas dans de plus amples détails au sujet de ces critériums du cinquième ordre, parce qu' ils n'offrent qu'un intérêt purement théorique. En comparant ces résultats à ceux que nous avons obtenus pour les résidus cubiques, on aperçoit aisément combien les conséquences des lois de réciprocité se compliquent de plus en plus et deviennent de moins en moins pratiques, à mesure que l'ordre de la réciprocité devient plus élevé.

56. Comme application du théorème général de Cauchy nous chercherons le caractère du cinquième ordre du nombre 3 relativement au module $p = 5\varpi + 1$. Si l'on suppose $n = 5$ et $q = 3$, on a $\xi = 0$, $\sigma = 3$, $S = R_{1,1} R_{1,2}$ et la formule (3) du n° 45 devient

$$R_{1,1} R_{1,2} - \rho^{-3i} = 3 f(\rho),$$

i désignant l'indice du nombre 3 relativement au module p et à la base t. D'ailleurs, à cause de la relation identique $1 + 2 + 2 = 5$, les formules (6) du n° 46 donnent $R_{1,2} = R_{2,2}$, en sorte que, si l'on pose

$$R_{1,1} = \varphi(\rho) = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 + a_4 \rho^4,$$

on a (5)
$$\varphi(\rho)\varphi(\rho^2) - \rho^{2i} = 3 f(\rho)$$
$$\varphi(\rho^3)\varphi(\rho) - \rho^{i} = 3 f(\rho^3).$$

Or, en réduisant au moyen de l'équation $\rho^5 = 1$, on mettra le produit $\varphi(\rho)\varphi(\rho^3)$ sous la forme $A_0 + A_1 \rho + A_2 \rho^2 + A_3 \rho^3 + A_4 \rho^4$ et l'on aura

$$A_0 + A_1 \rho + A_2 \rho^2 + A_3 \rho^3 + A_4 \rho^4 - \rho^{i} = 3 f(\rho^3).$$

On conclut de là, par un raisonnement tout semblable à celui par lequel nous avons démontré la seconde partie du théorème de Cauchy (46), que les coefficients A_0, A_1, ... A_4 divisés par 3 donnent un même reste, à l'exception du coefficient A_i qui donne un reste différent et vérifie la congruence $A_i - A_l - 1 \equiv 0 \pmod 3$, l désignant l'un des indices 0, 1, 2, 3, 4, différents de i.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que 3 soit résidu de cinquième puissance de p. On doit avoir $i = 0$, et par conséquent $A_0 - A_l - 1 \equiv 0 \pmod 3$, l désignant l'un des nombtes 1, 2, 3 ou 4. Cette condition nécessaire est en même temps suffisante pour que l'on ait $i = 0$; car si i est différent de 0 on a parmi les conditions nécessaires, $A_i - A_0 - 1 \equiv 0 \pmod 3$; comme on peut dans la formule $A_0 - A_e - 1 \equiv 0 \pmod 3$ faire coincider la valeur

de l avec celle de i dans l'autre formule, il est évident que les deux congruences ne peuvent pas être vérifiées en même temps. L'une quelconque des congruences $A_0 - A_1 \equiv 1$, $A_0 - A_2 \equiv 1, \ldots$ (mod 3) exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que 3 soit résidu de cinquième puissance pour le module p. On déduit de là ce théorème :

Théorème V.

« *Le nombre* 3 *est résidu de cinquième puissance relativement au module* p, *si le nombre* $a_0(a_0 - a_2 - a_4) + (a_1 - a_3)(a_3 - a_4) + a_2 a_4 - 1$ *est divisible par* 3, *il est non résidu de cinquième puissance dans le cas contraire.* »

57. On obtient des critériums plus simples pour determiner le caractére du cinquième ordre du nombre 3 en combinant l'équation (5) avec celle qu'on en déduit en remplaçant ρ par ρ^2 on trouve ainsi

$$\varphi(\rho^2)\left[\varphi(\rho^4) - \rho^{2i}\varphi(\rho)\right] = 3\left[f(\rho^2) - \rho^{2i} f(\rho)\right]$$

$$p\left[\varphi(\rho^4) - \rho^{2i}\varphi(\rho)\right] = 3\varphi(\rho)\left[f(\rho^2) - \rho^{2i} f(\rho)\right] = 3F(\rho).$$

Cette équation devient identique par rapport à ρ quand on réduit les deux membres au troisième degré à l'aide de l'équation $\rho^4 + \rho^3 + \ldots + 1 = 0$; comme alors tous les coefficients du premier membre sont des multiples de p, il faut qu'il en soit de même pour le second membre ; en sorte que l'on peut poser $F(\rho) = p(A_0 + A\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3) = pF_1(\rho)$, en désignant par $F_1(\rho)$ une fonction entière de ρ dont tous les coefficients sont des nombres entiers. On a donc

$$\varphi(\rho^4) - \rho^{2i}\varphi(\rho) = 3F_1(\rho)$$

ou encore, en remplaçant ρ par ρ^4,

$$\varphi(\rho) - \rho^{3i}\varphi(\rho^4) = 3F_1(\rho^4) = 3(b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + b_3\rho^3 + b_4\rho^4).$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(6)\quad \sum (a_\alpha - a_{e_\alpha} - 3b_\alpha)\rho^\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4),$$

dans laquelle l'indice e_α est déterminé par la congruence

$$(7)\quad 3i + 4e_\alpha \equiv \alpha, \text{ ou } e_\alpha \equiv 3i + 4\alpha \pmod 5.$$

L'équation (6) ayant une racine commune avec l'équation irréductible $\rho^4 + \rho^3 + \ldots + \rho + 1 = 0$ et étant comme elle du quatrième degré ne peut en dif-

férer que par un facteur constant ; tous ses coefficients sont donc égaux entre eux, et comme l'un d'eux, celui qui correspond à la valeur $\alpha \equiv 5 - i$ (mod 5), se réduit à $-3\, b_\alpha$, à cause de l'égalité $e_\alpha = \alpha$, tous les autres coefficients sont égaux à ce même nombre, en sorte que l'on a

$$(8)\quad a_{e_\alpha} \equiv a_\alpha \pmod 3$$

pour toute valeur de α, pourvu que e_α vérifie la congruence (7).

1° Soit $i = 0$. La formule 7 donne $e_1 = 4$, $e_4 = 1$, $e_2 = 3$, $e_3 = 2$. Dans ce cas les deux différences $a_1 - a_4$, $a_2 - a_3$ sont divisibles pas 3.

2° Soit $i > 0$. On trouve $e_{4i} \equiv 4\,i$, $e_i \equiv 2\,i$, $e_{2i} \equiv i$, $e_0 \equiv 3\,i$, $e_{3i} \equiv 0$ (mod 5) Les deux différences $a_0 - a_{3i}$, $a_i - a_{2i}$ sont divisibles par 3.

Nous trouvons bien ainsi des conditions nécessaires pour que le caractère du cinquième ordre de 3, relativement au module p et à la base t, soit égal à 0 ou à i ; mais il y a lieu de demander si ces condition suffisent pour déterminer ce caractère, et de quelle manière on peut le déduire des restes obtenus en divisant par 3 les coefficients du facteur complexe $R_{1,1}$. Avant d'aborder la solution de cette question nous devons remarquer que les restes des cinq coefficients de $R_{1,1}$ divisés par 3 ne peuvent pas être tous égaux ; car si l'on avait $a_\alpha = 3\,c_\alpha + r$ pour les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 de l'indice α, on mettrait le facteur $R_{1,1}$ sous la forme

$$R_{1,1} = 3\,(c_0 + c_1\,\rho + \ldots + c_4\,\rho^4) + r\,(1 + \rho \ldots + \rho^4) = 3\,f(\rho)$$

et l'on en déduirait

$$p = R_{1,1}\,R_{4,4} = 9\,f(\rho)\,f(\rho^4),$$

ce qui est impossible puisque p est un nombre premier et que le produit $f(\rho)\,f(\rho^4)$ ne peut, en vertu dn théorème II (2), avoir une valeur rationnelle sans se réduire à un nombre entier. De plus les deux coefficients a_α, a_{e_α}, dont les indices vérifient la formule (7), sont congrus entre enx suivant le module 3. Il résulte de là que les seules hypothèses qu'on puisse faire snr les restes obtenus en divisant par 3 les coefficients de $R_{1,1}$ sont que l'un de ces restes soit différent des quatre autres, ou bien que trois de ees restes soient égaux entre eux et différents de la valeur commune des deux autres. Dans le premies cas l'indice α du coefficient dont le reste est différent des quatre autres restes doit être égal à l'indice e_α qui lui correspond dans la congruence (7), car autrement on déduirait de la formule (8) que le coefficient a_{e_α} donne le même reste, contrairement à l'hypothèse ; on a donc

$$\alpha \equiv 5 - i \pmod 5,$$

ce qui détermine le caractère cherché i. Dans le second cas, c'est-à-dire quand trois coefficients de $R_{1,1}$ donnent un même reste et que les deux autres donnent un autre reste, il faut examiner si a_0 se trouve dans le premier groupe, c'est-à-dire s' il donne le même reste que deux autres coefficients ; dans ce cas les deux coefficients qui donnent un reste différent de celui de a_0 auront leurs indices liés entre eux par la relation (7). Soient donc α et 6 ces deux indices ; comme la relation (7) est réciproque nous pouvons prendre l'un quelconque des deux indices pour α, l'autre 6 sera ègal à e_α et l'on aura

$$6 \equiv 3i + 4\alpha, \quad i \equiv 2(\alpha + 6) \pmod 5.$$

Le nombre cherché i est donc déterminé par les indices α, 6 des deux coefficients qui donnent nn reste différent de celui du premier coefficient a_0. Enfin si un seul coefficient donne le même reste que a_0, l'indice α de ce coefficient correspond dans la formule (7) à la valeur $e_0 = 0$, et l'on a $3i \equiv \alpha$, $i \equiv 2\alpha \pmod 5$. Ce résultat est compris dans le précédent, pourvu que l'on désigne par α et 6 les indices des deux coefficient qui donnent un reste commun, différent de celui des trois autres coefficients ; car dans ce cas on aura $6 = 0$. Le caractère du cinquième ordre de 3, relativement au module p et à la base t, est donc déterminé de la manière suivante par la considération du facteur complexe $R_{1,1}$ de p :

Théorème VI.

« *Si l'un des restes obtenus en divisant par* 3 *les coefficients de* $R_{1,1}$ *est différent des quatre autres, et qu'on désigne par* α *l' indice du coefficient auquel il correspond, le nombre cherché* i *sera déterminé par la congruence*

$$i \equiv 5 - \alpha \pmod 5;$$

Si aucun des restes n' est différent des quatre autres, trois coefficientes donneront un reste commun et les deux autres donneront un autre reste ; soient a_α *et* a_6 *ces deux derniers coefficients : le nombre cherché* i *sera déterminé par la congruence*

$$i \equiv 2(\alpha + 6) \pmod 5. \text{ »}$$

58. Afin de donner *une vérification numérique de nos* théorèmes, pre-

nons $p = 31$ et proposons-nous de calculer le facteur $R_{1,1}$ ou

$$(1)\quad \varphi(\rho) = \sum \rho^{ind\,s + ind(s+1)} \quad (s = 1, 2, \ldots p-2).$$

Pour cela on prendra dans le Tables de Jacobi les indices des nombres successifs $2, 3, \ldots p-1$, en réduisant ces indices à leurs résidus minimums positifs suivant le module 5, puis l'on ajoutera chaque terme à celui qui le suit en réduisant chaque somme suivant le module 5, et l'on gardera le premier terme tel qu'il est; on comptera le nombre de ces derniers résultats qui se réduisent à 0; ce nombre est a_0; de même a_i est le nombre de ces résultats qui son égaux à i. On voit dans le tableau suivant la manière dont on peut disposer les opérations :

ind $(s+1)$	2, 3, 4, 0, 0; 4, 1, 1, 2, 4; 2, 3, 1, 3, 3; 1, 3, 2, 4, 2;
ind s	0, 2, 3, 4, 0; 0, 4, 1, 1, 2; 4, 2, 3, 1, 3; 3, 1, 3, 2, 4;
ind $s(s+1)$	2, 0, 2, 4, 0; 4, 0, 2, 3, 1; 1, 0, 4, 4, 1; 4, 4, 0, 1, 1;

ind $(s+1)$	1, 1, 4, 0, 0; 4, 3, 2, 0;
ind s	2, 1, 1, 4, 0; 0, 4, 3, 2.
ind $s(s+1)$	3, 2, 0, 4, 0; 4, 2, 0, 2.

On trouve de la sorte $a_0 = 8$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 2$, $a_4 = 8$.

$$(2)\quad \varphi(\rho) = 8 + 5\rho + 6\rho^2 + 2\rho^3 + 8\rho^4.$$

D'après le théorème du n. 52, relatif d'ordre n^ième du nombre 2, l'indice tabulaire i du nombre 2 et l'indice graphique m du coefficient impair a_m dans $\varphi(\rho)$ doivent vérifier la congruence

$$i \equiv \frac{5-1}{2}\, m \pmod 5;$$

on a dans le cas actuelle $m = 1$, de sorte que l'indice i du 2 doit être de la forme $5l + 2$; effectivement le table de Jacobi donne $i = 12$.

Soit $q = 41$. La *Canon arithmeticus* conne $t_1 = 6$, $\beta \equiv t_1^8 \equiv 10$; donc

$$\varphi(\beta) = 8 + 5\beta + 6\beta^2 + 2\beta^3 + 8\beta^4 \equiv 8\,2\,6\,5\,8 \equiv 2 \pmod{41}$$
$$\varphi(\beta^2) = 8 + 5\beta^2 + 6\beta^4 + 2\beta + 8\beta^3 \equiv 6\,8\,5\,2\,8 \equiv 17$$
$$\varphi(\beta^4) = 8 + 5\beta^4 + 6\beta^8 + 2\beta^2 + 8\beta \equiv 5\,6\,2\,8\,8 \equiv 36.$$

On a donc

$$\text{ind}\,\psi(\beta) = 2\,\text{ind}\,2 - \text{ind}\,17 - \text{ind}\,36 = 12 + 40 - 33 - 2 = 17.$$

Le caractère du cinquième ordre de 41 relativement au module 31 doit être aussi égal à 2; c'est ce qui a lieu en effet, car les mêmes Tables qui ont servi à calculer $\varphi(\rho)$ donnent 2 comme indice de 41 pour le module 31. Soit $q = 19$. Les racines de la congruence $x^{20} \equiv 1 \pmod{19}$, mises sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et rapportées à la base $r = 3 + 7\sqrt{-1}$, sont déterminées par la table suivante, où les argumente sont les indices des racines:

$$p = 19\,,\quad r = 3 + 7\sqrt{-1}.$$

Indices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	α	3	−2	4	7	0	−7	−4	2	−3
	β	7	4	−2	3	1	3	−2	4	7
1	−1	−3	2	−4	−7	0	7	4	−2	3
	0	−7	−4	2	−3	−1	−3	2	−4	−7
2	1									
	0									

Les racines de la congruence $x^5 - 1 \equiv 0 \pmod{19}$ correspondent aux indices multiples de 4; ce sont $\beta \equiv r^4 \equiv 7 + 3\sqrt{-1}$, $\beta^2 \equiv 2 + 4\sqrt{-1}$, $\beta^3 \equiv 2 - 4\sqrt{-1}$, $\beta^4 \equiv 7 - 3\sqrt{-1}$.

$$\varphi(\beta) \equiv 8 + 5(7 + 3\sqrt{-1}) + 6(2 + 4\sqrt{-1}) + 2(2 - 4\sqrt{-1}) + 8(7 - 3\sqrt{-1}) \equiv 1 + 7\sqrt{-1};$$
$$\varphi(\beta^2) \equiv 8 + 5(2 + 4\sqrt{-1}) + 6(7 - 3\sqrt{-1}) + 2(7 + 3\sqrt{-1}) + 8(2 - 4\sqrt{-1}) \equiv -5 + 5\sqrt{-1};$$
$$\varphi(\beta^4) \equiv 8 + 5(7 - 3\sqrt{-1}) + 6(2 - 4\sqrt{-1}) + 2(2 + 4\sqrt{-1}) + 8(7 + 3\sqrt{-1}) \equiv 1 - 7\sqrt{-1},$$

On déduit de là $\psi(\beta) \equiv \dfrac{(1 + 7\sqrt{-1})^2}{(-5 + 5\sqrt{-1})(1 - 7\sqrt{-1})} \equiv 2 + 4\sqrt{-1}$;

c'est effectivement une racine de la congruence $x^{20} \equiv 1 \pmod{19}$ et elle correspond à l'indice 8. L'expression conjuguée $\psi(\beta^{-1}) \equiv 2 - 4\sqrt{-1}$ correspond à l'indice 12, de sorte qu'elle appartient à la classe (2) pour le module 19, réciproquement, d'après le théorème III du n° 52, le nombre 19 doit appartenir à la classe (2) pour le module 31. Et en effet les Tables de Jacobi donnent: ind 19 (mod. 31) = 22.

Vérification du théoréme VI (n° 57). — Cherchons le caractère du cinquième ordre du nombre 3 relativement au module 31 et à la base 17 adoptée par Jacobi. Les restes des coefficients du facteur complexe $R_{1,1}$ ou $\varphi(\rho)$, divisés par 3, sont respectivement

$$2\,,\ 2\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 2\,;$$

nous sommes dans le premier cas où l'un des restes diffère des quatre autres; le coefficient qui donne ce reste est a_2; le caractère cherché est donc déterminé par la congruence $i \equiv 5 - 2 \equiv 3 \pmod 5$. Le nombre 3 doit donc appartenir à la classe (3) pour le module 31. Effectivement le *Canon arithmeticus* donne ind 3 (mod 31) = 13.

§ VII. *Loi de réciprocité du septième ordre.*

59. On sait que les nombres premiers dont la division par 7 donne l'unité pour reste peuvent se décomposer en la somme d'un carré et du septuple d'un autre autre carré. L'analogie de cette décomposition avec celle du quadruple d'un nombre premier $3h+1$ en la somme d'un carré et du produit d'un autre carré multiplié par 27 porte à se demander si les facteurs complexes $L \pm \sqrt{-7}\,M$ des nombres premiers $7\varpi+1$ ne pourraient pas servir de fondement à une théorie des résidus de septièmes puissances analogue à celle que Jacobi a fondée, pour les résidus cubiques, sur la considération des facteurs complexes $\frac{L \pm \sqrt{-3}\,3M}{2}$ des nombres premiers $3h+1$. Dans cette dernière théorie la valeur de l'expression $\frac{L}{M} \pmod q$, ou q désigne un nombre premier différent de $\frac{L^2+27M^2}{4} = p$, suffit pour déterminer le caractère cubique de q relativement au module p. Le rapport $\frac{L}{M}$ des deux nombres qui vérifient l'équation

$$p = 7\varpi + 1 = L^2 + 7M^2,$$

jouit-il d'une propriété semblable dans la théorie des résidus de septièmes puissances? la classe d'un nombre premier q, dans une classification du septième ordre relative au module p, est-elle déterminée par la valeur de l'expression $\frac{L}{M} \pmod q$? Nous verrons qu'il n'en est rien. La théorie des résidus de septièmes puissances est fondée, comme celle des résidus de cinquièmes puissances, sur la considération de la fonction $R_{1,1}$ de Cauchy, et la loi qui détermine la classe du nombre q relativement au module p met en évidence que cette classe est indépendante de la valeur de l'expression $\frac{L}{M}$

(mod q). Pour faciliter notre démonstration nous commencerons par montrer comment la représentation du nombre p par la forme $L^2 + 7M^2$ se rattache au facteur complexe $R_{1,1}$; nous aurons l'avantage d'obtenir ainsi une méthode simple pour calculer les deux nombres L et M à l'aide des tables d'indices de Jacobi.

Soient p un nombre premier $7\varpi + 1$,
θ une racine primitive de l'équation $x^p = 1$,
t une racine primitive de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
ρ une racine primitive de l'équation $x^7 = 1$.

Les deux fonctions Θ_h et $R_{h,k}$ étant définies, comme au n° 9, par les formules

$$\Theta_h = \sum \rho^{\alpha h} \theta^{t^\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots p-2)$$
$$\Theta_h \Theta_k = R_{h,k} \Theta_{h+k},$$

les formules fondamentales rappelées dans ce même numéro deviennent ici

$$(1)\quad \Theta_h \Theta_{-h} = p, \quad R_{h,k} R_{h,-k}\, p,$$
$$(2)\quad R_{h,k} = \sum \rho^{h\,ind\,s - (h+k)\,ind\,(s+1)} \quad (s = 1, 2, \ldots p-2),$$
$$(3)\quad R_{1,5} = \sum \rho^{h\,ind\,s\,(s+1)} = a_0 + a_1 \rho + \ldots + a_6 \rho^6.$$

Dans la dernière formule a_1 désigne le nombre des termes de la suite

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ \ldots s(s+1),\ \ldots (p-2)(p-1),$$

dont les indices relativement au module p et à la base t sont de la forme $7x + i$. De plus le théoreme exprimé par les formules (6) du n° 46 nous apprend que la congrueuce $h + k + l \equiv 0 \pmod 7$ entraîne comme conséquence les égalités

$$R_{h,k} = R_{k,l} = R_{l,h}.$$

On déduit de là que $R_{1,1} = R_{1,5}$, que $R_{1,2} = R_{2,4} = R_{1,4}$, D'ailleurs on déduit successivement de la formule $\Theta_h \Theta_k = R_{h,k} \Theta_{h+k}$ les équatione suivantes :

$$\Theta_1^2 = R_{1,1} \Theta_2, \quad \Theta^2_2 = R_{2,2} \Theta_4, \quad \Theta^2_4 = R_{4,4} \Theta_1$$
$$\Theta_1^2 \Theta^2_2 \Theta^2_4 = R_{1,1} R_{2,2} R_{4,4} \Theta_1 \Theta_2 \Theta_4,$$
$$R_{1,1} R_{2,2} R_{4,4} = \Theta_1 \Theta_2 \Theta_4;$$
$$\Theta_1 \Theta_2 = R_{1,2} \Theta_3, \quad \Theta_1 \Theta_2 \Theta_4 = R_{1,2}\, p;$$

et l'on en conclut que

$$(4)\quad R_{1,1} R_{2,2} R_{4,4} = p.\, R_{1,2}.$$

Il résulte de là que la fonction $R_{1,2}$ est symétrique par rapport aux trois racines ρ, ρ^2, ρ^4, et qu'ainsi on peut poser $R_{1,2} = A_0 + A_1 (\rho + \rho^2 + \rho^4) + A_3 (\rho^3 + \rho^5 + \rho^6)$,

$$2 R_{1,2} = 2 A_0 + (A_1 + A_3)(\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^6) + (A_1 - A_3)(\rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6);$$

d'ailleurs $\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^6 = -1$, $\rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 = \pm\sqrt{-7}$;

on a donc

$$2 R_{1,2} = (2 A_0 - A_1 - A_3) \pm \sqrt{-7}(A_1 - A_3)$$

$$2 R_{3,6} = (2 A_0 - A_1 - A_3) \mp \sqrt{-7}(A_1 - A_3)$$

$$4 p = (2 A_0 - A_1 - A_3)^2 + 7 (A_1 - A_3)^2.$$

Dans cette dernière équation les deux carrés sont pairs, car autrement le second membre serait divisible par 8; posant donc

$$(5)\ 2 A_0 - A_1 - A_3 = 2 L, \quad A_1 - A_3 = 2 M,$$

on a

$$p = L^2 + 7 M^2.$$

On sait déjà par la théorie des formes quadratiques que tout nombre premier $p = 7\varpi + 1$ est décomposable en un carré augmenté du septuple d'un autre carré, et qu'il ne l'est que d'une seule manière; ce que nous obtenons ici de nouveau c'est une méthode pour calculer les racines des deux carrés. En effet, si nous faisons $h = 2$, $k = 4$ dans la formule (2) nous obtenons

$$R_{2,4} = R_{1,2} = \sum \rho^{2 ind s + ind(s+1)} = A_0 + A_2 (\rho + \rho^2 + \rho^4) + A_3 (\rho^3 + \rho^5 + \rho^6).$$

Pour calculer les coefficients A_0, A_1, A_3 écrivez au dessous des nombres

$$2, 3, 4, 5, \ldots p - 1,$$

leurs indices réduits à leurs résidus minimums, suivant le module 7; ajoutez 0 à l'indice de 2, le double de l'indice de 2 à l'indice de 3, et ainsi de suite, ajoutant à l'indice réduit de chaque terme le double de l'indice réduit du terme qui le précède immédiatement; enfin réduisez chacune de ces $p - 2$ sommes à son résidu minimum positif suivant le module 7; A_0 sera le nombre de ces sommes qui se reduisent à 0, A_1 le nombre de celles qui se réduisent à 1, et A_3 le nombre de celles qui se réduisent à 3. Posant alors $2 A_0 - A_1 - A_3 = 2 L$ et $A_1 - A_3 = 2 M$, L et M vérifieront l'équation $p = L^2 + 7 M^2$.

On a aussi $R_{1,2} = L \pm \sqrt{-7}, M$, $R_{-1,-2} = L \pm \sqrt{-7} M$.

60. Nous avons vu (51) que, dans le cas où $n = 7$, la fonction $\psi(\rho)$ à laquelle se rapportent les théoremes généraux qui précèdent (49 et 50) est donnée par la formule

$$\psi(\rho) = \frac{R_{1,1}^2}{R_{2,2}^2 \; R_{44}},$$

dans laquelle $R_{1,1} = R_{1,5}$. Posant donc $R_{1,1} = \varphi(\rho)$, on aura

$$(6)\ \varphi(\rho) = \sum \rho^{inds\,(s+1)} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_6\rho^6,$$

$$(7)\ \psi(\rho) = \frac{\varphi(\rho)^3}{\varphi(\rho^2)^2\,\varphi(\rho^4)}$$

1° Soit $q = 7q' + 1$ un autre premier et t_1 une racine primitive de ce nombre prise comme base d'une classification du cinquième ordre; les théorèmes I et II du n° 49, particularisés pour le cas où $n = 7$, pourront s'énoncer de la manière suivante :

Théorème I.

La classe du septième ordre à laquelle appartient le nombre premier $q = 7q' + 1$, *relativement au module premier* p *et à la base* t, *est de même indice i que celle de la fonction* $\psi(\beta)$ *définie par les formules* (6) *et* (7), *relativement au module* q *et à la base* t_1, *pourvu que l'on prene* $\beta \equiv t_1^{q'}$ (*mod* q).

Dans le cas où $i = 0$ le théorème est indépendant des bases t et t_1.

Théorème II.

Si l'on désigne par β *une racine primitive de la congruence* $x^7 \equiv 1$ (*mod* q), *le nombre* q *sera résidu ou non résidu de septième puissance pour le module* p, *suivant qne* $\psi(\beta)$ *sera un résidu ou un non résidu de septième puissance pour le module* q.

2° Soit un autre nombre premier $q = 7q' - 1$. Si l'on désigne par r une racine primitive de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q), prise comme base d'une classification du septième ordre, qu'on pose $\beta \equiv r^{q'}$ (mod q), l'expression complexe $\psi(\beta)$ est aussi racine de la même congruence (50), ainsi que l'expression conjuguée $\psi(\beta^{-1})$. Si donc nous appelons caractère du 7me ordre d'une racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod q) le reste de son indice, relativement à la base r,

divisé par 7, et caractère du septième ordre d'un nombre réel, entier et non divisible par p, relativement au module p, le reste obtenu en divisant par 7 son indice relatif au module p et à la base t, la réciprocité du septième ordre entre les deux nombres premiers p et q est exprimée par les théorèmes suivants (50):

Théorème III.

Le caractère du septième ordre du nombre q, *relativement au module* p *et à la base* t, *est le même que celui de l'expression* $\psi(\beta^{-1})$, *relativement au module* q *et à la base* r.

Dans le case où le caractère commun de $\psi(\beta^{-1})$, et de q est 0 le théorème est indépendant des bases t et r:

Théorème IV.

Le nombre q *est résidu ou non résidu de septième puissance pour le module* p, *suivant que l'expression* $\psi(\beta)$ *est elle-même residu ou non résidu de septième puissance pour le module* q.

61. Les applications de ces théorèmes donnent lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites précédemment dans le cas des résidus de cinqnièmes puissances; nous nous bornerons à un exemple pour chacune des deux formes considérées du nombre q. Proposons-nous d'abord de déterminer les nombres premiers $p = 7\varpi + 1$, dont 29 est résidu de septième puissance. Le nombre $29 = 4.7 + 1$, en sorte qu'on a $q' = 4$. Prenant donc la racine primitive 2 comme base d'un système d'indices pour le module 29, nous aurons $\beta \equiv 2^4 \equiv 16 \pmod{29}$; de plus les résidus de 7mes puissances sont $\pm 1, \pm 12$. Les nombres p dont 29 est résidu de 7me puissance sont donc ceux dont le facteur complexe $R_{1,1} = \varphi(\rho)$ vérifie l'une des quatre congruences

$$(a)\ \varphi(16)^3 \equiv \pm \varphi(24)^2 \varphi(25),\ \varphi(16)^3 \equiv \pm 12\, \varphi(24)^2 \varphi(25) \pmod{29}.$$

On trouverait de même, pour chacune des autre classes 1, 2, ... 5, quatre critériums formés chacun par une congruence homogène du troisième degré entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_6$ du facteur complexe $R_{1,1} = \varphi(\rho)$. Chacun de ces critériums du troisième degré peut être remplacé par d'autres

critériums formés chacun de deux congruences linéaires entre les mêmes coefficients $a_0, a_1, \ldots a_6$. Posons en effet:

$$(b)\ \varphi(16) \equiv x\ \varphi(24) \equiv y\ \varphi(25) \pmod{29}.$$

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que l'une des congruences (a) soit satisfaite comme conséquence des deux congruences (b) est que les deux nombres x et y vérifient la congruence

$$(c)\ x^2 y \equiv t_1^{7h} \equiv \alpha \pmod{29},$$

dans laquelle α ou t_1^{7h} désigne le résidu de septième puissance auquel $\psi(16)$ est égalé pour former le critérium considéré. Or la congruence (c) admet 28 solutions que l'on obtient en faisant successivement $x = 1, 2, 3, \ldots 28$, et en calculant la valeur de y, qui correspond à chacune de ces valeurs de x, au moyen de la congruence $y \equiv \frac{\alpha}{x^2} \pmod{29}$. Ainsi chaque critérium du troisième degré sera remplacé par 28 critériums formés chacun de deux congruences linéaires. chaque classe du septièmes ordre renfermera pour le module 29, 4 critériums du troisième degré, ou 4×28 critériums linéaires.

En général, quel que soit le nombre premier $q = 7q' + 1$ les critériums qui expriment que le nombre q appartient à la classe i du septième ordre relativement au module $p = \varphi(\rho)\ \varphi(\rho^6)$ et à la base t sont représentés par la formule

$$\varphi(\beta)^3 \equiv t_1^{7h+i}\ \varphi(\beta^2)^2\ \varphi(\beta^4) \pmod{q},$$

et leur nombre esl q' comme celui des valeurs de h qui donnent à t_1^{7h+i} des valeurs non congrues suivant le module q. Chacun de ces critériums peut être représenté par un système équivalent de $q-1$ critériums que l'on déduit, pour une même valeur A de t_1^{7h+i}, des deux formules

$$\varphi(\beta) \equiv x\ \varphi(\beta^2) \equiv y\ \varphi(\beta^4) \pmod{q}$$

$$x^2 y \equiv \mathrm{A} \pmod{q},$$

en donnant à x les valeurs $1, 2, \ldots q-1$, et en déduisant de la dernière congruence la valenr unique de y qui correspond à chacune de ces valeurs de x. Ainsi le nombre des critériums linéaires est $q'(q-1)$ pour chacune des 7 classes. De plus les coefficients du facteur complexe $\varphi(\rho)$ doivent

vérifier 4 équations de condition, l'une linéaire $a_0 + a_1 + \ldots + a_6 = p - 2$, les trois autres quadratiques; celles-ci se déduisent de l'équation $\varphi(\rho)\,\varphi(\rho^6) - p = 0$, dont le premier membre, mis sous la forme d'une fonction entière de la somme $\rho + \frac{1}{\rho} = z$, doit être divisible par le polynome $z^3 + z^2 - 2z - 1$. Une seule des trois équations de condition obtenues par cette division renferme p, et elle le renferme au premier degré; en éliminant p au moyen dr la relation linéaire $p = a_0 + a_1 + \ldots + a_6 + 2$ on aura trois éqnations de condition entre les coefficients du facteur complexe $\varphi(\rho)$. Ces équations de condition font que nous ne pouvons pas affirmer que tous les critériums dont nous avons signalé l'existence soient différents les uns des autres ; car au moyen de ces équations le même critérium pourrait recevoir différentes formes.

62. On peut en dire autant des critériums que l'on obtient pour les nombres premiers q compris dans la formule $7q' - 1$. Prenons d'abord pour exemple $q = 13 = 2.\,7 - 1$, $q' = 2$. Les racines de la congruence $x^{14} \equiv 1$ (mod 13) rangées suivant l'ordre croissant de leurs indices, pour la base $r = 3 - 6\sqrt{-7}$, sont

$$1,\ 3 - 6\sqrt{-7},\ 4 + 3\sqrt{-7},\ -5 - 2\sqrt{-7},\ 5 - 2\sqrt{-7},\ -4 + 3\sqrt{-7},\ -3 - 6\sqrt{-7},$$
$$-1,\ -3 + 6\sqrt{-7},\ -4 - 3\sqrt{-7},\ 5 + 2\sqrt{-7},\ -5 + 2\sqrt{-7},\ 4 - 3\sqrt{-7},\ 3 + 6\sqrt{-7}.$$

On a $\beta \equiv r^2 \equiv 4 + 3\sqrt{-7}$, et les résidus de septièmes puissances sont $+1$ et -1. Si donc nous voulons exprimer que 13 est résidu de septième puissance pour le module premier $p = \varphi(\rho)\,\varphi(\rho^6)$, nous devrons égaler, suivant le module 13, la fonctiou $\psi(4 + 3\sqrt{-7})$ à l'un des résidus de septième puissance du nombre 13, c'est-à-dire à $+1$ où à 1 ; ou obtient ainsi les deux critériums

$$(a) \qquad \varphi(4 + 3\sqrt{-7})^3 \equiv \pm\varphi(5 - 2\sqrt{-7})^2\,\varphi(-3 + 6\sqrt{-7}) \pmod{13}.$$

Chacune des deux congruences renfermées dans cette formule se réduit à deux congruences simultanées $P \equiv Q$, $R \equiv S$ (mod 13), où P, Q, R, S désignent des fonctions homogènes et du troisième degré relativement aux coefficients $a_0, a_1, \ldots a_6$ de $\varphi(\rho)$. On peut aussi remplacer ces critériums par des congruences linéaires. Posons en effet

$$(b) \quad \varphi(4 + 3\sqrt{-7}) \equiv x\,\varphi(5 - 2\sqrt{-7}) \equiv y\,\varphi(-3 + 6\sqrt{-7}) \pmod{13};$$

pour que ces deux congruences entrainent comme conséquence la vérification de l'un des critériums (a), par exemple du critérium $\psi(4 + 3\sqrt{-7})$ 1 (mod 13), il faut et il suffit que x et y soient des racines de la congruence

$x^{14} \equiv 1 \pmod{13}$ et que ces racines vérifient la congruence $x^2 y \equiv 1 \pmod{13}$ Prenons $x \equiv r^l, y \equiv r^m \pmod{13}$; la condition $x^2 y \equiv 1 \pmod{13}$ revient à la congruence $2l + m \equiv 0 \pmod{14}$. On pourra donc faire successivement $l = 0, 1, 2, \ldots 13$, et à chacune de ces valeurs de l on fera correspondre pour m la racine unique de congruence $m \equiv -2l \pmod{14}$. Le critérium $\psi(4 + 3\sqrt{-7}) \equiv 1 \pmod{13}$ sera donc remplacé par 14 critériums linéaires. Il en serait de même pour l'autre critérium $\psi(4 + 3\sqrt{-7}) \equiv -1 \pmod{13}$; ainsi la classe 0 renferme, pour le module 13, $28 = q'(q+1)$ critériums.

En général, quel que soit le nombre premier $q = 7q' - 1$, en égalant, suivant le module q, $\psi(\beta)$ aux résidus de septièmes puissances de q, c'est-à-dire aux racines de la congruence $x^{7q'} \equiv 1 \pmod{q = 7q' - 1}$ dont les indices sont des multiples de 7, on obtient q' critériums formés chacun de deux congruences homogènes et du troisième degré entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_6$ de $\varphi(\rho)$. Chacun de ces critériums peut être remplacé par $q + 1$ critériums formés chacun par un système de congruences linéaires que l'on déduira de formules analogues aux formules (b), savoir

$$\varphi(\beta) \equiv x\,\varphi(\beta^2) \equiv y\,\varphi(\beta^4) \text{ et } x^2 y \equiv 1 \pmod{q}.$$

La classe 0 renferme ainsi $q'(q+1)$ critériums; pour que le nombre q soit résidu de 7me puissance relativement au module premier $p = \varphi(\rho)\,\varphi(\rho^6)$, il faut et il suffit que l'un de ces critériums soit vérifié.

63. Les résultats obtenus dans les deux derniers numéros nous permettent de démontrer très-simplement ce que nous avons dit plus haut, que la classe d'un nombre premier q parmi les résidus ou les non résidus de septièmes puissances d'un nombre premier $p = 7\varpi + 1$ ne peut pas se déduire du facteur complexe $L + \sqrt{-7}\,M$ de p, au moyen d'une congruence de la forme $L \equiv m\,M \pmod{q}$. En effet, quelle que soit la valeur de m dans cette congruence nous pouvons faire que le nombre q appartienne à une classe désignée quelconque, par exemple à la classe 0; en d'autres termes, l'un des critériums qui expriment que le nombre premier q est résidu de septième puissance de p, par exemple le critérium $\varphi(\beta)^2 = \varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4)$, peut être vérifié, quelle que soit la valeur de l'expression $\frac{L}{M} \pmod{q}$. Ce critérium sera vérifié si l'on a

$$\varphi(\beta) \equiv a\,\varphi(\beta^2) \equiv b\,\varphi(\beta^4), \quad a^2 b \equiv 1 \pmod{q}.$$

Or on déduit de ces congruences

$$\varphi(\beta)\,\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^4) \equiv \frac{1}{ab}\,\varphi(\beta)^3 \equiv a\,\varphi(\beta)^3 \pmod{q}.$$

D'aillenrs nous avous vu (59) que

$$R_{1,1}\, R_{2,2}\, R_{4,4} = \varphi(\rho)\, \varphi(\rho^2)\, \varphi(\rho^4) = p\,(L \pm \sqrt{-7}\, M).$$

Si l'on remplace ρ per β cette équation se change en congruence suivant le module q (8) et l'on a

$$\varphi(\beta)\, \varphi(\beta^2)\, \varphi(\beta^4) \equiv p\,[L + f M] \pmod{q}$$

f designant l'une des deux valeurs de l'expression $\sqrt{-7}$ (mod q). Soit donc

$$\varphi(\beta)^3 \equiv A\, p \pmod{q};$$

la comparaison des deux congruences précédents donnera

$$a\, A \equiv L + f M \pmod{q}.$$

Comme a est complètement arbitraire, on peut prendre à volonté le rapport $L : M = m$, pourvu qu'il ne se réduire pas à $\pm f$, c'est-à-dire pourvu que $L^2 + 7 M^2$ soit un nombre premier p différent de q. Alors, en effet, le nombre $L + f M$ ne sera pas divisible par q, en sorte que l'on pourra profiter de l'indétermination du nombre a pour vérifier la congruence $a\, A \equiv L + f M$ (mod q), et, comme la valeur de a ne sera pas divisible par q on pourra vérifier la condition $a^2 b \equiv 1$ (mod q), en sorte que la fonction $\psi(\beta)$ étant congrue à 1 (mod q) le nombre q sera résidu de septième puissance du nombre premier $p = \varphi(\rho)\, \varphi(\rho^6) = L^2 + 7 M^2$.

Ainsi la valeur de l'expression $\frac{L}{M}$ (mod q) ne suffit pas pour déterminer le caractère du septième ordre du nombre q relativement au module premier $L^2 + 7 M^2 = p$.

64. Le caractère du septième ordre du nombre 3 peut s'obtenir par la seule considération des résidus des coefficients a_0, a_1, ... a_6 de $\varphi(\rho)$ divisés par 7. Reprenons l'équation de Cauchy (n° 45)

$$p^{\xi} R^{\xi} S - \rho^{-\sigma i} = q\, f(\rho),$$

et supposons $q = 3$, $n = 7$. Nous aurons $\xi = 0$, $\sigma = 3$, $S = R_{1,1}\, R_{1,2}$, en sorte que notre équation deviendra

$$R_{1,1}\, R_{1,2} - \rho^{-3i} = 3 f(\rho).$$

En y remplaçant ρ par ρ^2 nous obtenons

$$R_{2,2}\, R_{2,4} - \rho^{i} = 3 f(\rho^2),$$

puis, par la combinaison des deux équations, en ayant égard à l'égalité $R_{1,2} = R_{2,4}$ (59),

$$R_{1,2}\left[R_{1,1} - \rho^{3i} R_{1,2}\right] = 3\left(f(\rho) - \rho^{3i} f(\rho^2)\right),$$

$$p\left[R_{1,1} - \rho^{3i} R_{2,2}\right] = 3 R_{-1,-2}\left(f(\rho) - \rho^{3i} f(\rho^2)\right) = 3 F(\rho).$$

Si l'on suppose les deux membres de cette équation réduits au cinquième degré en ρ, à l'aide de l'équation irréductible $\rho^6 + \rho^5 + \ldots + 1 = 0$, le résultat obtenu doit être identique par rapport à ρ, et, comme après cette réduction les coefficients du premier membre sont multiples de p, il faut que ceux du second membre le soient aussi, en sorte que nous pouvons poser $F(\rho) = p F_1(\rho)$,

$$(a) \quad R_{1,1} - \rho^{3i} R_{2,2} = 3 F_1(\rho).$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$(b) \quad \sum (a_\alpha - a_e - 3 b_\alpha) \rho^\alpha = 0 \; (\alpha = 0, 1, 2, \ldots 6),$$

où l'indice e est déterminé au moyen de la congruence

$$(c) \quad 3i + 2e \equiv \alpha, \; e \equiv 4\alpha + 2i \pmod 7.$$

Or l'un des coefficients de l'équation (b) se réduit à $-3 b_\alpha$, c'est celui pour lequel on a $e = \alpha \equiv 4i \pmod 7$. Comme cette équation (6) est de même degré que l'équation irreductible $\rho^6 + \rho^5 + \ldots + 1 = 0$ et qu'elle a une racine commune avec elle, elle ne peut en différer que par un coefficient constant, en sorte que tous ses coefficients doivent être égaux au coefficient $-3 b_{4i}$. Ainsi la différence $a_\alpha - a_e$ est divisible par 3 toutes les fois que les deux indices α et e vérifient la congruence (c).

1° Soit $i = 0$. La relation entre les deux indices α et e devient $e \equiv 4\alpha \pmod 7$; aux valeurs $\alpha = 1, 4, 2$, correspondent respectivement $e = 4, 2, 1$; on a donc $a_1 \equiv a_2 \equiv a_4 \pmod 3$. De même aux valeurs $\alpha = 3, 5, 6$, correspondent respectivement $e = 5, 6, 3$; il en résulte que $a_3 \equiv a_5 \equiv a_6 \pmod 3$.

2° Soit $i > 0$. Aux valeurs $\alpha \equiv 0, 2i, 3i$ la congruence (c) fait correspondre respectivement $e \equiv 2i, 3i, 0 \pmod 7$; de même aux valeurs $i, 6i, 5i$ de α correspondent respectivement les valeurs $6i, 5i, i$ de e ; on a donc

$$a_0 \equiv a_{2i} \equiv a_{3i}, \; a_i \equiv a_{5i} \equiv a_{6i} \pmod 3.$$

Dans l'un et l'autre cas six des sept coefficients de $R_{1,1}$ sont partagés en deux groupes de trois coefficients congrus entre eux suivant le module 3 ; le coefficint a_{4i} (dont l'indice $4i$ doit être réduit à son résidu minimum suivant le module 7) peut ou n'être congru à aucun des autres coefficients,

pour le module 3, ou bien donner le même reste que les trois coefficients de l'un des deux groupes dont nous venons de parler. Dans ce dernier cas quatre coefficients de $R_{1,1}$ divisés par 3 donneront un même reste et les trois autres coefficients donneront un autre reste; car on démontre, comme nous l'avons fait dans le cas ou $n = 5$ (57), que, si les coefficients de $R_{1,1}$ étaient tous congrus entre eux suivant le module 3, le produit $R_{1,1}$ $R_{6,6} = p$ serait multiple de 9, contrairement à l'hypothèse. La division par 3 des coefficients a_0, a_1, ... a_6 du facteur complexe $R_{1,1}$ présentera donc l'un des deux cas suivants : ou bien l'un de ces coefficients ne sera congru à aucun des six autres suivant le module 3, ou bien quatre coefficients donneront un même reste et les trois autres donneront un autre reste. Dans le premier cas soit e l'indice du coefficient qui donne un reste différent des six autres; on aura $e \equiv 4\,i \pmod 7$, et par conséquent

$$i \equiv 2\,e \pmod 7.$$

Dans le second cas désignons par s la somme des indices des trois coefficients dont la division par 3 donne un reste différent de celui des quatre autres; on aura la classe i du nombre 3 par la congruence $i \equiv 3\,s \pmod 7$, car dans le cas où i est > 0 les sommes des indices des deux groupes de trois coefficients, autres que a_{4i}, sont $0 + 2\,i + 3\,i = 5\,i$, $i + 5\,i + 6\,i \equiv 5\,i \pmod 7$; chacune de ces deux sommes vérifie la congruence $s \equiv 3\,i \pmod 7$, d'où l'on déduit $i \equiv 3\,s \pmod 7$; dans le cas où $i = 0$, les sommes des indices des deux groupes de trois coefficients, autres que a_{4i}, sont $1 + 2 + 4 \equiv 0$, $3 + 5 + 6 \equiv 0 \pmod 7$; la congruence $i \equiv 3\,s \pmod 7$ donnera donc encore la valeur de i. Nous pouvons résumer les résultats obtenus en disant :

Théorème V.

« *Soit* i *la classe du nombre* 3 *dans une classification du septième ordre relativement au module premier* $p = 7\varpi + 1$ *et à la base* t ; *cette classe est déterminée de l'une des deux manières suivantes, selon les deux cas que peut offrir la division par* 3 *des coefficients* a_0, a_1, a_2, .. *du facteur complexe* $R_{1,1}$ *de* p ; *il peut arriver, en effet, que l'un de ces coefficients soit seul à donner l'un des restes* 0, 1 *ou* 2, *ou bien que quatre coefficients donnent l'un de ces restes, tandis que les trois autres coefficients donnent l'un des deux autres restes* :

Dans le premier cas, soit a_e *le coefficient compris seul dans l'une des trois formules* $3\,l$, $3\,l + 1$, $3\,l + 2$; *la classe* i *du nombre* 3 *est déterminée par la congruence*

$$i \equiv 2\,e \pmod 7;$$

Dans le second cas, désignons par s *la somme des indices des trois coefficients dont la division par* 3 *donne un reste différent de celui des quatre autres, la classe* i *du nombre* 3 *est déterminée par la congruence*

$$i \equiv 3\,s \pmod 7.$$

65. Justifions nos théorèmes par quelques applications numériques. Soit $p = 29$. Le calcul du facteur complexe $R_{1,1} = \varphi(\rho) = \sum \rho^{\text{ind}\, s(s+1)}$ est compris dans le tableau suivant, dont la première ligne présente les indices des nombres $2, 3, \ldots p-1$, réduits à leurs résidus minimums suivant le module 7, la seconde ligne offre les indices des nombres $1, 2, \ldots$ reduits de même suivant le module 7; enfin la troisième ligne, obtenue en faisant la somme des termes correspondants des deux premières lignes, donne les résidus suivant le module 7 des indices du produit $s\,(s+1)$ pour les valeurs $1, 2, \ldots p-2$ de s:

ind $(s+1)$	4, 6, 1, 4, 3, 6, 5, 5, 1, 2; 0, 2, 3, 3, 2; 0, 2, 1, 5, 5; 6, 3, 4, 1, 6; 4, 0
ind s	0, 4, 6, 1, 4; 3, 6, 5, 5, 1; 2, 0, 2, 3, 3; 2, 0, 2, 1, 5; 5, 6, 3, 4, 1; 6, 4
ind $s\,(s+1)$	4, 3, 0, 5, 0; 2, 4, 3, 6, 3; 2, 2, 5, 6, 5; 2, 2, 3, 6, 3; 4, 2, 0, 5, 0; 3, 4

Non aurions pu éviter la moitié du calcul; car à partir du terme moyen, qui est ici le 14me, les indices des produits $s\,(s+1)$ reviennent dans un ordre inverse, de sorte que les termes également distants des termes extrêmes sont égaux. Les coefficients de $R_{1,1}$ sont $a_0 = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 6$, $a_4 = a_5 = 4$, $a_6 = 3$.

On a donc $R_{1,1} = \varphi(\rho) = 4 + 6(\rho^2 + \rho^3) + 4(\rho^4 + \rho^5) + 3\rho^6$.

L'indice e du coefficient impair est 6; nous concluons du théorème du n° 52, que l'indice i du nombre 2, relativement au module 29 et à la base tabulaire 17 doit vérifier la congruence

$$i \equiv \frac{7-1}{2}\,6 \equiv 4 \pmod 7;$$

et en effet nous trouvons ind 2 (mod 29) = 11 = 7 + 4.

Cherchons le caractère du 7me ordre du nombre 3 relativement au module 29, par la considération du facteur complexe $R_{1,1}$. Quatre coefficients de ce facteur sont divisibles par 3, tandis que les trois autres sont de la forme $3l+1$, savoir a_0, a_4, a_5. La somme des indices de ces derniers coefficieuts se réduit à 2 suivant le module 7; nous concluons donc du théorème V (n° 64) que l'indice i du nombre 3 doit vérifier la congruence

$$i \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \pmod 7;$$

c'est ce qui a lieu en effet, car le Canon arithmeticus nous donne

$$\text{ind } 3 \pmod{29} = 27 = 3 \times 7 + 6.$$

Pour vérifier le théorème relatif à la solution de l'équation $p = L^2 + 7 M^2$, il faut calculer $R_{1,2} = \sum \rho^{ind(s+1)+2ind\, s}$; c'est ce qu'on fait en ajoutant les termes correspondants de la seconde et de la troisième ligne du tableau précédent relatif à $R_{1,1}$, et en réduisant chaque somme à son résidu pour le module 7; on trouve ainsi

$\text{ind}(s+1)+2\,\text{ind}\, s \equiv 4, 0, 6, 6, 4; 5, 3, 1, 4, 4; 4, 2, 0, 2, 1; 4, 2, 5, 0, 1; 2, 1, 3, 2, 1; 2, 1.$

Le coefficient A_i de $R_{1,2}$ est le nombre des termes de ce tableau égaux à i; on trouve ainsi $A_0 = 3$, $A_1 = A_2 = A_4 = 6$, $A_3 = A_5 = A_6 = 2$.

Les valeurs de L et de M, d'après la règle qu'il s'agit de vérifier, sont

$$L = \frac{2 A_0 - A_1 - A_2}{2} = -1, \quad M = \frac{A_1 - A_2}{2} = 2;$$

ce qui est exact, puisque l'on a $29 = 1^2 + 7 . 2^2$.

Soit $q = 43 = 6 \times 7 + 1$. La base tabulaire est $t_1 = 28$ et les racines de la congruence $x^7 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$ sont $\beta \equiv t_1^6 \equiv 11$, $\beta^2 \equiv 35$, $\beta^3 \equiv 41$, $\beta^4 \equiv 21$, $\beta^5 \equiv 16$, $\beta^6 \equiv 4$. On a conséquemment

$$\varphi(\beta) \equiv 4(1 + 21 + 16) + 6(35 + 41) + 3 . 4 \equiv 18, \pmod{43}$$

$$\varphi(\beta^2) \equiv 4(1 + 11 + 41) + 6(21 + 4) + 3 . 16 \equiv 23,$$

$$\varphi(\beta^4) \equiv 4(1 + 35 + 4) + 6(11 + 16) + 3 . 41 \equiv 15.$$

L'indice de la fonction $\psi(\beta)$ relativement au même module 43 se calcule par la formule

$$\text{ind}\, \psi(\beta) = 3\, \text{ind}\, 18 - 2\, \text{ind}\, 23 - \text{ind}\, 15 = 3 \times 31 - 2 \times 20 - 22,$$

qui donne $\text{ind}\, \psi(\beta) = 31 = 4 \times 7 + 3$. Le nombre 43, d'après le théorème I (n° 60), doit être de la classe (3) pour le module 29; effectivement les Tables de Jacobi donnent $\text{ind}\, 43 = \text{ind}\, 14 = 3$.

Pour vérifier le théorème III du même n° 60, prenons $q = 41 = 6 \times 7 - 1$. Les racines de la congruence $x^7 \equiv 1 \pmod{41}$ correspondent aux indices multiples de 6; ce sont, d'après la table donnée plus haut, $\beta \equiv -2 + 9\sqrt{-5}$, $\beta^2 \equiv 7 + 5\sqrt{-3}$, $\beta^3 \equiv 15 + 12\sqrt{-3}$, $\beta^4 \equiv 15 - 12\sqrt{-3}$, $\beta^5 \equiv 7 - 5\sqrt{-3}$, $\beta^6 \equiv -2 - 9\sqrt{-3}$.

On a donc

$$\varphi(\beta) \equiv 4 + 6(7 + 15) + 4(15 + 7) + 3 . (-2) + \sqrt{-3}\,[6(5 + 12) + 4(-12 - 5) - 3 . 9]$$
$$\equiv 13 + 7\sqrt{-3} \pmod{41}$$

$$\varphi(\beta^2) \equiv -9 - 16\sqrt{-3}, \qquad \varphi(\beta^4) \equiv 17 + 3\sqrt{-3};$$

$$\varphi(\beta)^3 \equiv -10 + 19\sqrt{-3}, \qquad \varphi(\beta^2)^2 \equiv 10 + \sqrt{-3},$$

$$\psi(\beta) = \frac{-10 + 19\sqrt{-3}}{(10 + \sqrt{-3})(17 + 3\sqrt{-3})} = \frac{10 - 19\sqrt{-3}}{3 - 6\sqrt{-3}} \equiv 20 + 20\sqrt{-3}$$

On a donc $\psi(\beta^{-1}) \equiv 20 - 20\sqrt{-3}$ (mod 41). Or notre table d'indices donne pour cette racine ind $(20 - 20\sqrt{-3}) = 28$. Les valeurs de $\psi(\beta)$, $\psi(\beta^{-1})$ sont des résidus de 7mes puissances pour le module 41; réciproquement le nombre 41 doit être résidu de 7me puissance pour le module 29; c'est ce que vérifie le *Canon arithmeticus* en donnant ind 41 = ind 12 (mod 29) = 11.

66. Quoique notre sujet soit loin d'être épuisé, nous nous arrêterons ici dans nos recherches sur les lois de réciprocité. Nous avons vu que les theorèmes de Jacobi sur les résidus cubiques ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux; que pour tout ordre n^{ième} de résidus, pourvu que le nombre n soit premier, on peut former, au moyen des facteurs complexes $R_{1,1}$ des nombres premiers $n\varpi + 1$, une fonction $\psi(\rho)$ qui jouit de propriétés analogues à celles que présente, pour les résidus cubiques, le rapport considéré par Jacobi $\frac{L + 3\sqrt{-3}\,M}{L - 3\sqrt{-3}\,M}$. Nous avons aussi démontré les théorèmes énoncés par Cauchy, sur le même sujet, dans le Bulletin de Férussac et nous avons indiqué par quelques exemples les applications que l'on en peut faire. Il resterait à montrer comment les résultats obtenus donnent la solution des mêmes problèmes dans le cas où n est un nombre composé. Si les facteurs premiers de n sont inégaux il suffit de combiner entre eux les résultats obtenus pour ces facteurs; ainsi, pour ne donner qu'un exemple, on exprimera qu'un nombre premier $6q' \pm 1$ est résidu de sixième puissance d'un module premier $p = 6\varpi + 1$, en combinant les critériums qui expriment que q est résidu quadratique de p avec ceux qui expriment qu'il est résidu cubique. Si le nombre n renferme une puissance d'un nombre premier impair, on doit établir pour cette puissance des théorèmes semblables à ceux que nous avons donnés pour les nombres premiers; on y parviendra en suivant la méthode employée pour ces nombres. Quant aux puissances de 2, nous avons déjà résolu le problème pour $n = 4$; en suivant la même marche on le résoudrait pour $n = 8$; et ainsi de suite. Mais, quel que soit l'ordre n des résidus considérés, nous ne faisons intervenir que des nombres complexes dont l'existence et la formation se voient clairement.

COMUNICAZIONI

Armellini prof. Tito. — *Il Telefono.* Il prof. T. Armellini presentò all'Accademia il telefono testè costruito in Roma dai sig. Harrassowitz e Schulz; ne diede la descrizione, mostrandone il principio di sua azione, la sua mirabile semplicità di costruzione; per la quale i suoni della parola sono tradotti a grandi distanze col ministero della elettricità. Disse infatti l'istrumento presentarsi a foggia di *stettoscopio*, ed aver l'apparenza di un manubrio di legno bianco terminato da uno svasamento a campana. Nel mezzo della campana è un foro, cui risponde una sottil lamina di ferro, che entra in vibrazione pel suono che si produce, dirigendolo su d'essa a poca distanza. Un cilindro di acciajo calamitato ed armato con un rocchetto di filo di rame isolato, che traversa il manubrio di legno, genera delle correnti d'induzione, più o meno forti a seconda dell'intensità e dell'ampiezza della vibrazione della lamina metallica. La corrente elettrica generata da quelle vibrazioni, anch'essa si riduce ad una serie di onde o pulsazioni elettriche, che si trasmettono lungo i due fili che congiungono l'organo parlante, o suonante con quello ricevente, che è posto all'altra stazione, il quale è applicato all'orecchio.

La serie delle correnti trasmesse modifica a sua volta il magnete, che è cagione perchè la rispettiva lamina metallica si ponga anch'essa in vibrazione, e riproduca fedelmente quelle dell'istrumento mittente: onde il suono torna a generarsi a distanza, e la parola e il suono si forma presso l'orecchio dell'ascoltante. È singolare la fedeltà con la quale i suoni sono riprodotti; e, ciò che è più singolare, si è la fedeltà con cui i suoni mantengono quello che in acustica si dice metallo (timbro) della voce: per cui si riconosce la persona parlante, o l'istrumento suonante; benchè questo sembra ridotto ed attaccato in quella guisa che una lente a menisco divergente impiccolisce l'oggetto o la persona che con quella si guarda.

Mentre facciamo i nostri rallegramenti con i signori costruttori di questo ingegnosissimo apparecchio, ci auguriamo che esso in breve venga generalmente adottato, offrendo una utilità grandissima per le comunicazioni interne dei diversi stabilimenti, quali per esempio, i seminari, i collegii, le case religiose; arroge che l'acquisto dell'istrumento è di limitatissima spesa di poche lire, per una sol volta; senza bisogno d'ulterior dispendio, per gli altri accessori, quali si richieggono negli ordinarii telegrafi, pel consumo e

mantenimento dell'apparecchio elettromotore, da cui il Telefono prescinde affatto; essendo in esso una perenne e gratuita sorgente d'elettrico, quella cioè d'una calamita permanente.

Cialdi comm. Alessandro. — *Presentazione di tre lavori.* Il Comm. A. Cialdi offrì in dono all'accademia tre sue memorie, la prima intitolata: « Dei movimenti del mare sotto l'aspetto idraulico nei porti e nelle rive »: l'altra: « Porto di genova ecc. Appendice III agli studii sui movimenti del mare sotto l'aspetto idraulico nei porti e nelle rive »: la terza: « sull' illuminazione e segnalamento dei littorali e dei porti.

Cialdi comm. Alessandro. — *Presentazione di tre memorie del socio corrispondente sig. Comm. Bertin.* Il Comm. A. Cialdi presentò all'accademia con parole di elogio le seguenti pubblicazioni del socio corrispondente sig. Comm. E. Bertin, ingegnere delle costruzioni navali, dottore in diritto, segretario della società di scienze naturali e membro della società accademica di Cherbourg: 1. « Observations de vagues et de roulis, faites avec l'oscillographe double « à bord de la canonière le Crocodile. » — 2. « Principes du vol des oiseaux. » « 3. Sur l'effet comparatif des jets d'air comprimé et des jets de vapeur d'eau « lancés dans la cheminée pour le tirage forcé des chaudières. »

Boncompagni Principe D. Baldassare. — Presentò a nome del ch. P. Pépin una memoria di matematica intitolata « Memoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances », che viene pubblicata qui sopra fra le memorie.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Comunicazione all'Accademia della dolorosa perdita da essa fatta nel suo protettore, l'Emo Card. Filippo de Angelis, Arcivescovo di Fermo.

2. Communicazione di una lettera dell'Emo Card. Pecci, Camerlengo di S. R. C., colla quale l'E. S. si scusa di non poter presiedere la nostra prima adunanza; e dice sperare di poter intervenire in altra adunanza.

3. Relazione dell'Udienza accordata agli Accademici dalla Santità di N. S. Papa Pio IX, il giorno 19 Giugno 1877, per la presentazione di un volume straordinario compilato in omaggio al s. Padre in occasione del Suo episcopale giubileo, col titolo: « Triplice omaggio presentato alla Santità di N. S. Papa Pio IX nel Suo giubileo episcopale dalle tre romane accademie pontificie di Archeologia, insigne di belle arti denominata di s. Luca, e dei Nuovi Lincei. »

4. Richiesta del sig. Principe D. B. Boncompagni di una serie degli Atti Accademici, vol. XXIV—XXIX per il Sig. Prof. Jacobi, che viene approvata.

5. Lettere del ch. sig. Cav. Cornelio De Simoni in ringraziamento del volume straordinario sopra accennato a lui spedito.

6 Ricevuta della spedizione degli Atti, mandata dall' I. Accademia delle scienze di Vienna.

7. Lettera del ch. sig. Direttore dell'Osservatorio di Leiden, accompagnante un catalogo bibliografico.

8. Lettera di ricevuta dei nostri Atti, e di accompagno di alcune memorie spedite dal bibliotecario dell'Accademia delle scienze naturali di Stuttgart.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Prof. M. Azzarelli – Mons. F. Regnani – Dott. D. Colapietro – Prof. T. Armellini – Comm. A. Cialdi – Conte A. F. Castracane – Comm. C. Descemet – Prof. G. Tancioni – P. F. Provenzali – P. G. Foglini – Prof. V. De Rossi Re – P. G. Lais – P. S. Ferrari – P. D. Chelini – Cav. G. Olivieri – D. B. Boncompagni – Prof. M. S. de Rossi, segretario.

La sessione aperta legalmente alle ore 3 pom. fu chiusa alle 5.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti dal novembre* 1876 *all'ottobre* 1877 — Tomo Terzo, Serie Quinta, Dispense 2ª—10ª, — Tomo Quarto, serie Quinta, Dispense 1ª—3ª — Venezia ecc. 1877—78. In 8°.
2. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino publicati dagli Accademici Segretari delle due Classi.* — Vol. XII, Disp. 5ª (Maggio-Giugno 1877), — Torino ecc. In 8.°
3. BAKHUYZEN (H.G. v. d. Sande). — *Catalogus van de Boeken op* 1 *januari* 1877 *Aanwezig in de Bibliotheck der Sterrenwacht te Leiden uitgegeven door H. G. v. d. Sande Bakhuyzen*, ecc. — 's Gravenhage ecc. 1877. In 8°.
4. BELLAVITIS (prof. G.) *Reale Accademia dei Lincei.* — *Sulla risoluzione delle congruenze numeriche, e sulle tavole che danno i* logaritmi (indici) *degli interi rispetto ai vari moduli. Memoria del Socio corrisp, prof. G, Bellavitis letta nella seduta del* 3 *giugno* 1877. In 4.°
5. — *Quattordicesima Rivista di Giornali presentata al R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti nel giugno* 1877 *dal Prof. Giusto Bellavitis* ecc. In 8.°
6. BERTIN (Mr. L.-E.) — *Sur l'effet comparatif des Jets d'air comprimé et des Jets de vapeur d'eau lancés dans la cheminée pour le tirage forcé des chaudières, par Mr. L.-E. Bertin.* — In 8°.
7. — *Principes du vol des oiseaux; Par M. E. Bertin.* In 4°.
8. — *Observations de vagues et de roulis faites avec l'oscillographe double, à bord de la canonière le Crocodile, par M. E. Bertin.* In 4°.
9. — *Les Vagues et le Roulis.* — In 8.°

10. BIANCONI (Gian. Giuseppe). — *Considerazioni intorno alla formazione Miocenica dell'Apennino. Memoria del Prof. Gian. Giuseppe Bianconi.* — Bologna ecc. 1877. In 4.°

11. BOETTCHER (Artbur). — *Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXII, N° 11. — Neue Untersuchungen über die Rothen Blutkörperchen. Von Arthur Boettcher.* ecc. — St.-Petersbourg, 1876. In 4.°

12 BOLDU' (Dott. Roberto). — *Ragione e Fede nel Moto sociale. — Studi del Dott. Roberto Boldù.* — Firenze ecc. 1878. In 8.°

13. — *Della Libertà ed eguaglianza dei Culti. — Interpretazione giuridica del dottor Robevto Boldù.* — Firenze, 1877. In 8.°

14. BOUTLEROW (M. A.) — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIII, N° 4. — Condensation des Hydrocarbures de la Série éthylénique. 2, Sur l'Isodibutylène, l'une des variétés isomériques de l'octylène. Par M. A, Boutlerow,* ecc. — St.-Pétersbourg, 1876. In 4.°

15. BREITHOF (N.) — *Cours de Géométrie descriptive par N. Breithof* ecc. — Première Partie — Métodes de projections — 1er volume — Point — Ligne droite — Plan ecc. — Méthodes de Projections I Projections Axonométriqnes ecc. — Louvain ecc. 1876—1877. In 4°

16. — *Cours de Géométrie descrittive par N. Breithof* ecc. — Surfaces Courbes — Livre premier, deuxième, troisième ecc. — Louvain ecc. 1875, 1877. In 4°

17, *Bollettino dell'Osservatorio della Regia Università di Torino.* — Anno XI (1876). — 1877. In 4.°

18. *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* — Publié sous la Rédaction du Docteur Renard. — Année 1877. — N° 1. — Moscou ecc., 1877 in 8°

19. *Bullettino Meteorologico dell'Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri* ecc. — Vol. X, Num. 8—9, Agosto—Settembre 1875. — Vol. XI, Num. 8, Agosto 1876, Num. 9, Settembre 1876, Num. 11, Novembre 1876, Ia 4.°

20. *Bulletin de L'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg.* — Tome XXIII. Numeri 3, 4 et dernier. — Tome XXIV. Numeri 1—3. In 4.°

21. *Cenni sul Lavoro della carta Geologica.* — Estratto dal Volume 86 degli Annali del Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio. — 1876. — In 8°

22. CIALDI (Alessandro). — *Illuminazione e Segnalamento dei Littorali e dei Porti. Memoria di Alessandro Cialdi.* — Roma ecc. 1877. In 8.°

23. — *Porto di Genova — Stato dell' Idraulica marittima in Italia secondo deliberazione a maggioranza del Consiglio Superiore dei lavori pubblici.* — Roma ecc. 1877. In 8.°

24. — *Dei movimenti del Mare sotto l'aspetto idraulico nei Porti e nelle Rive — Studii di Alessandro Cialdi capitano di vascello, con tavole.* — Milano ecc. 1876. In 4.°

25. D'ANDREA (Marchese) *Alla Eccellenza Rma di Monsignore Salzano, Arcivescovo di Edessa, dell'Ordine de' Predicatori, Il Marchese d'Andrea.* In 8°

26. — *Alla Eccellenza Rma di Monsignore Luigi Moreno, ornato delle supreme divise dell'Ordine de' santi Maurizio e Lazzaro, Vescovo d'Ivrea, patria di Pietro d'Andrea, Conte di Troia; il Marchese d'Andrea, già Consultore di Stato, e poscia Consigliere di Stato.* In 8.°

27. DE ROSSI — (Michele Stefano). *Appendice Architettonica e Fisica al tomo terzo della Roma Sotterranea. — Due memorie del cav. Michele Stefano De Rossi* ecc. — Roma ecc. 1877. In 4.°

28. DORNA (Alessandro). — *Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali pianeti calcolate per Torino in tempo medio civile di Roma per l'anno 1878 di Alessandro Dorna.* — Torino ecc. 1877. In 8.°

29. ERRERA (Alberto). — *Storia dell'Economia Politica nei secoli XVII e XVIII negli stati della Repubblica Veneta, corredata da documenti inediti del professore Alberto Errera,* ecc. — Venezia, ecc. 1877. In 8.°

30. FRAAS (Dr. Oscar). — *Festschrift zur Feier des vierhundertjährigen Jubiläums der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen am 9. August 1877,* ecc. — *Aëtosaurus ferratus Fr. Die gepanzerte Vogel-Echse aus dem Stubensandstein bei Stuttgart beschrieben von Dr. Oscar Fraas* — Stuttgart, ecc. 1877. In 4°

31. GILBERT (Ph.) — *Sur certaines conséquences de la Formule électro-dynamique d'Ampère*, ecc. *Par Ph. Gilbert.* — In 8.°

32. GRABLOVITZ (Giulio). — *Dell' attrazione Luni-Solare in relazione coi fenomeni Mareo-Sismici.* — *Studi dimostrativi di Giulio Grablovitz.* — Milano ecc. 1877. In 8.°

33. GRANATA GRILLO (Giuseppe). — *Description de quelques espèces nouvelles ou peu connues par Joseph Granata Grillo.* — Naples ecc. 1877. In 8.°

34. — *Conchiologia vivente marina della Sicilia e delle Isole che la circondano; opera del Prof Cav. Andrea Aradas e del Cav. Luigi Benoit.* — (*Estratta dagli Atti dell'Accademia di Scienze Naturali, Serie III, vol. VI.*) — *Catania, Stabilimento Tipografico di C. Galatola*, 1870 1876. *Nota per Giuseppe Granata Grillo.* In 4.°

35. GRUBER (Dr. Wenzel). — *Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIII, N° 2.* — *Monographie über das Corpusculum Triticeum und ueber die Accidentelle Musculatur der Ligamenta Hyo-Thyreoidea Lateralia.* ecc. *Von Dr. Wenzel Gruber*, ecc. — St.-Pétersbourg, 1876. In 4.°

36. — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série, Tome XXIV, N° 3.* — *Uber den Infraorbitalrand bei Ausschliessung des Maxillare superius von seiner Bildung beim Menschen. Mit vergleichend anatomischen Bemerkungen. Von Dr. Wenzel Gruber*, ecc. — St -Pétersbourg, 1877. In 4.°

37. HARKAVY (Albert). — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIV, N° 1.* — *Altjüdische Denkmäler aus der Krim, mitgetheilt von Abraham Firkowitsch* (1839—1872(*und gebrüft von Albert Harkavy*, ecc. — St.-Pétersbourg, 1876. In 4.°

38. HEER (Prof. Dr. Oswald). — *Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXII, N° 12 et dernier.* — *Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes. Von Prof, Dr, Oswald Heer*, ecc. — St.-Pétersbourg, 1876. In 4.°

39. HOEPLI (Ulrich). — *Catalogue Mensuel de la Libraire Française de Ulrich Hoepli.* — 2e Année. Juin—Septembre 1877. In 8.°

40. — *Bullettino Mensile delle più recenti ed importanti pubblicazioni ehe vengono in luce in Germania, Francia, Inghilterra, America, Italia, Russia, Spagna*, ecc. — N.° 6—9. Giugno—Settembre 1877. In 8.°

41. *Jahrbuch der kaiserlich königlichen Geologischen Reichsanstalt.* — Jahrgang 1876. XXVI. Band. N. 4. October, November, December. — Jahrgang 1877. XXVII. Band. N. 1. Janner, Februar, Marz, — N. 2. April, Mai, Juni. ecc. — Wien ecc. 1877. In 8.°

42. *L'Elettricista.* — *Rivista di scienze fisiche e loro applicazioni dedicata particolarmente all'elettricità.* ecc. — Vol. II. — Num. 2. — Febraro 1878. — Firenze ecc. 1878. In 8.°

43. — *L'Elettricista* — *Rivista Mensuale diretta da Lamberto Cappanera.* Anno I. — Numeri 6—10, 12. — Firenze ecc. 1877. In 4.°

44. LINGENTHAL (E. Zachariä von), — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIII, N° 6.* — *Beiträge zur Kritik und Restitution der Basiliten. Von E. Zachariä von Lingenthal.* ecc. — St.-Pétersbourg, 1887. In 4.°

45. — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIII, N° 7.* — *Die Griechischen Nomokanones. Von E. Zachariä von Lingenthal.* ecc. — St.-Pétersbourg, 1877. In 4.°

46. MASING (Leonhard). — *Mémoires de l'Académie Impériale des St.-Pétersbourg, VIIe Série, Tome XXIII, N° 5.* — *Die hauptformen des Serbisch-Chorwatischen Accents. nebst Einleitenden bemerkungen zur accentlehre insbesondere des Griechischen und des sanskrit.* ecc. — *Von Leonhard Masing* ecc. — St. Pétersbourg, 1876. In 4.°

47. *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — December 1876. — Januar—October 1877. Berlin 1877 ecc. In 8.°

48. NYRÉN (Magnus). — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIII, N° 3.* — *Das Aequinoctium für 1865,0*, ecc. *von Magnus Nyrén.* — St.-Pétersbourg, 1876. In 4.°

49. OETTINGEN (von Prof. Arthur) e WEIHRAUCH (Prof. Karl) — *Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorbat im Jahre* 1875. *redirgirt und bearbeitet von Prof. Arthur von Oettingen und Prof. Karl Weihranch.* — Zehnter Jahrgang. — II. Band. — Heft 5. (Schluss.) In 8°.

50. *Osservatorio di Moncalieri.* — *Osservazioni Meteorologiche* ecc. — Sede centrale — Torino — Anno VI. — Numeri VI, VII, VIII, X, XII. — Anno VII. — Num. II. 1878. In 8.°

51. PALIARD. — *Le Raphael d'un Million. Par M. le Comandant Paliard.* — Paris ecc. 1877. In 8.°

52. PRESSEL (Friedrich). — *Ulm und spin Münster. Festschrift zur Erinnerung an den* 30. *Juni* 1877 *von Friedrich Pressel.* — Ulm, 1877. In 8.°

53. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle partie tecnique* — Deuxième série. — Tome troisième. — XXIe de la collection — Première livraison. — Janvier — Troisième livraison. — Mars. — *Partie littéraire* — Deuxième série. — Tome cinquième. — XIXe de la collection — Première livraison. — Janvier — Troisième livraison. — Mars. — Paris ecc. 1877. In 8°.

54. *Rassegna medico Statistica della città di Genova.* — Anno 1877. Mesi di Marzo, Luglio, Agosto, Settembre e ottobre. In 4.°

55. *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche,* — Anno XVI. — Fascicoli 5, 10, 11, 12. — Maggio, Ottobre, Novembre e Decembre 1877. — Anno XVII. — Fascicoli 1—2. — Gennaio—Febbraio 1878. In 4.°

56. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — Bollettino N° 1—10. — Roma ecc. 1877. In 8.°

57. SCHMALHAUSEN. (Johannes). — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIIe Série. Tome XXIV, N° 2.* — *Beiträge zur Kenntniss der Milchsaftbehälter der Pelanzen. von Johannes Schmalhausen.* ecc. — St.-Pétersbourg, 1877. In 4°.

58. SIGFRID ULRICH (Axel). — *XX. Jahres-Bericht des Schwedischen Heilgymnastischen Institutes in Bremen. Von Prof. Dr. Axel Sigfrid Ulrich* ecc. — Bremen ecc. 1877. In 8.°

59. *Verhandlungen der kaiserlich-königlischen Geologischen Reichsanstalt.* — Jahrgang 1876, — Wien ecc. 1885. In 8°.

60. STOPPANI (Antonio). — *L'Unità dello Scibile. Discorso per la inaugurazione degli Studi del R. Istituto di Studi Superiori Pratici e di Perfezionamento in Firenze Letto il* 17 *novembre* 1877 *dal Professore Antonio Stoppani.* — Firenze ecc. 1877. In 8°.

61. TURAZZA (D.) — *Commemorazione del professore Giovanni Santini Letta dal Prof. Domenico Turazza.* In 8.°

62. *Ulm Oberschwaben Korrespondenzblatt des Vereins für kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.* — Zweiter Jarhang. Nr. 3—6. 1877. In 4.°

63. *Verhandlungen und Mittheilungen des siebeabürgischen vereins für Naturwissenschaften in Hermannstadt.* — XXVII. Jahrgang. In 8.°

64. VIMERCATI (Prof. Ing. Guido) — *Sul Cronotachigrafo Ferrero, Relazione presentata al collegio degli Architetti ed Ingegneri di Firenze dal Prof. Ing. Guido Vimercati.* — Firenze ecc. 1877. In 8.°

65. — *Rivista Scientifico-Industriale compilata da Guido Vimercati.* In 8.°

66. WEIHRAUCH (Dr. Karl). — *Zehnjährige Mittelwerthe* (1866 *bis* 1875) *nebst neunjährigen Stundenmitteln* (1867 *bis* 1875) *für Dorpat* (*Br.* 58° 22′ 47 1″, *L.* 24° 23′ 14″ = 1ʰ 37′ 33″ *östlich von Paris*) *redigirt und bearbeitet von Ds. Kart Weihrauch, Professor der physikalischen Geographie und Meteorologie.* — Mit 2 lithographirten Tafeln. — Ergänzungsheft zum zweiten Bande der Dorpater meteorologischen Beobachtungen. In 8°.

67. WILD (H.) — *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg, VIIe Série, Tome XXIII, N° 8 et dernier.* — *Meteorologische Studien. Von H. Wild,* ecc. — St-Pétersbourg, 1877. In 4.°

67. *Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte.* Herausgegeben von Prof. Dr. H. v. Fehling, Prof. Dr. O. Fraas, Prof. Dr. F. Krauss, Prot. Dr. P. v. Zech in Stuttgart. Dreiunddreissigster Jahrgang. ecc. Stuttgart, ecc. 1877. In 8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 17 FEBBRAIO 1878

PRESIDENZA DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

FLORULA DEL COLOSSEO

COMUNICAZIONI

DELLA SIG.ª CONTESSA ELISABETTA FIORINI MAZZANTI.

Brachythecium-lutescens Dntrs. Epil. Bryol It. p. 115.

Dioico; caule sericeo-flavescente a rami conferti, semplici, o fascicolato-ramosi; foglie folto embricate, lanceolato-acuminato-striate, sotto l'apice in obliquo ripiegate, integre, o subserrate, nervo oltre al mezzo evanido; peduncolo robusto, scabro; capsula ovato-oblunga, curvata, o subcernua, pachidermatica; operculo conoideo, attenuato-ottuso, mamillato; denti del peristomio robusti, striati, interni da ciglia gemine o singole distinti; cellule delle foglie terete-fusoidee, sub ottuse; spore lutescenti, sottilmente granulate.

Hypnum lutescens Fior. Bryol. Rom. p. 45.

Sul podio.

Rhynchostegium-strigosum. DNtrs Epil. Bryol It. p. 80.

Conferto-depresso-cespitoso; caule inferiormente semplice, serpeggiante,

radiculigero, con l'età marcescente; superiormente fascicolato-ramoso; rami patuli; foglie alquanto concave, nitide, fitto-patenti, triangolari, ovato-acute, attenuato-acuminate; nervo valido, sotto l'apice subitamente evanido, margini subdenticolati; in secco approssimati; capsula obliqua, turgido-ovata, leptoderma; operculo rostellato, anulo angusto; denti del peristomio alquanto lati croceo-lutescenti; segmenti interni lancelato-cuspidati, da cigli gemini distinti, cellule delle foglie terete-quadrato fusoidee.

Hypnum strigosum Fior. Bryol. Rom. p. 47.

Sovra sassi, e rottami dell'Anfiteatro.

Rhyncostegium Megapolitanum DNtrs epil. Bryol. It. p. 73.

Monoico; caule lungo e lassamente percorrente, lato-intrigato-cespitoso; dal verde pallido sericeo flavescente; foglie concave, rado embricate, o piano-distiche, ovato-acutissime, od acuminate; margini minuto-denticolati; nervo oltre il mezzo superante; peduncolo lieve, capsula ovata, subpachiderma; operculo obliquo-rostrato; anulo ed operculo deciduo, denti del peristomio validi, croceo-rosseggianti; segmenti interni, lato-lanceolato-subulati, da cigli gemini distinti.

Hypnum confertum β Megapolitanum Fior. Bryol. Rom. p. 48.

In più luoghi dell'Anfiteatro.

Rhyncostegium tenellum DNtrs Epil. Bryol. It. p. 75.

Monoico, ed esiguo; cauli fitto-cespitosi, serpeggianti, radiculigeri; rami conferti deboli; foglie tenui, lasso-embricate, eretto-patule, subunilaterali, elegantemente piumose, sericeo-nitide, carinato-canaliculate, di nervo fornite; capsula in sul peduncolo curvata, quasi orizzontale; operculo convesso-conoideo, obliquo-rostrato; anulo in un con l'operculo deciduo; denti del peristomio pugnaliformi lungo-sabulato-carinati, da cigli gemini nella carena distinti; cellule delle foglie tenui, allungato-fusoidee, e talora leggiermente sigmoidee.

Hypnum tenellum Fior. Bryol. Rom. p. 48.

Sulle mura del podio.

Come sinonimi ho riportato i generi e le specie della mia antica Briologia Romana, adottando gli attuali progressi degli illustri Schimper e De Notaris nella fusione delle famiglie in nuovi generi e specie.

Licheni.

Sulle ardue e problematiche teorie insorte intorno la biologia dei Licheni, considerandoli non quali essere autonomi, ma bensì di parassitismo, sul giudizio che le cellule variamente conformate e colorate, connesse all'ifo filomentoso del tallo, non sieno già organi a loro propri, ma bensì di Alghe diverse, di che il principio Algo-lichenico. Grandi e vive discussioni sollevò una tal teoria, e nella contraddizione dei pareri, e delle osservazioni si è anche ammessa l'esistenza di due organismi indipendenti consociati ad uno strano ibridismo; e che i gonidi, indipendentemente dall'Ifo si riproducono a modo di Alghe unicellulari, ed anco pluricellulari per mezzo di zoospore, le quali secondo altri non sono che Alghe accidentalmente intruse nel lichene, e non a veri gonidi, onde ne seguono argomenti contro il principio Algo-lichenico. Più innanzi trapassando altri ai gonidi imeniali nei primordi di apoteci verrucariacei, videro nel processo organogenico l'abbozzo e formazione di essi, e sottomettendo a coltura le spore di alcuni licheni, nel loro sviluppo osservarono l'elemento Algo-fungino. Ma checchessia, lasciando da canto le dette teorie, e le irresolute questioni, mi permetterò di richiamare una nota da me inserita negli Atti di questa stessa Accademia, ove dimostrava esistere nel Colosseo un anomalo organismo in forma di crosta biancastra che si spandeva sulle mura esposte al Nord, allorchè le condizioni di umidità destano a nuova vita i minuti organismi cellulari. L'anzidetta crosta poi, quando ristretta infra le fessure, si mostrava più o meno verdognola. Prendendone a considerare il tallo lo vedeva costituito da un agglomeramento di granuli, donde uscivano in un brevi filamenti biforcati, o ramosi. Permanendo in tale stadio lo giudicava specie atipica; e rintracciandone la storia lo trovava da uomini illustri aver subìto varie fasi di collocamento, e quindi di nome, perchè ora posto tra miceti, ora tra le Alghe, ed ora tra i Licheni. Infra i recenti autori, il chiarissimo Schaerer nella sua Lichenologia Europea forma appendice dei Licheni crostacei ad ignoti apoteci; e nota ch'essi similmente offrono o i primordi di altri, o lo stato anormale di essi. Ripigliando ora l'anormalità della mia descritta crosta che nomai *Lichen atypuum latebrarum Fior. Mazz. Atti dell' Accademia*

de' Nuovi Lincei anno XXIV, Sess. IV. Giugno 1871. *Strato più o meno esteso, leproso, a piccoli fiocchi; granuli coacervati, sferici, micro o macrogonidi, germinanti brevi filamenti settati, all'apice biforcati o ramosi.*

Sporothricum latebrarum Link Hyphomycetes p. 5.
Conferva Pulveria Aghardh Syst. Algarum p. 34.
Lepraria incana β *latebrarum.*
Acharius Lichen. Univers. p. 65.
Pulveraria incana Meth. App. p. 331.
Parmelia lanuginosa β *sterilis Fries Lich. Europ. p.* 89.

Nell'Anfiteatro Flavio, nei cavi delle Mura, e nei luoghi inaccessibili al Sole.

Quando furtivi raggi s'imbattono sull'organismo crostaceo, s'inizia un primordio di lichene, giusta i germi che racchiude, sviluppando più o meno a seconda delle opportune condizioni. Sono giunta a vederne derivare: la *Lecidea Campestris* β *Sabuletorum* con suoi apoteci, ma di misero sviluppo; ed egualmente un Lichene fogliaceo, *Cladonia Pyxidata var. gracillima.*

L'angusto spazio non mi ha conceduto altre osservazioni, che praticate in esteso, e in più luoghi daran risultati atti a comprovare che se nel primo stadio di loro esistenza havvi identità, differenza poi nello sviluppo di generi e specie a seconda dei diversi germi che acchiude.

Verrucaria controversa Erbario disseccato Italiano p. 671.
Tallo giovanile cervino fosco areolato; apoteci fitti, conici, corneo-carbonacei; osticlo papilloso.

Sparso su tutte le mura del Colosseo.

Lithoicea . . . . . Tallo tartareo-areolato, apoteci piano-depressi.

Come sopra.

Lithoicea . . . . . Tallo areolato, apoteci semi conici.

Sagedia viridula Fries Lichen. Europ. reform. p. 414.
Tallo tartareo, pallido-fosco cervino-castagno; apoteci emisferici alquanto piani.

Lithoicea controversa Massalongo?

In questi pochissimi saggi del Colosseo di *Verrucaria*, *Lithoicea* e *Sagedia*, io ho rinvenuto il tallo variabile, imperocchè ora tartareo ora areolato, e verruccoso; e nella *Verrucaria* allorchè senile, obliterato. Le verruche degli apoteci, ora coniche, ed ora depresso-piane, e l'esame microscopico negli apparecchi imeniali, non risultano già nè di aschi, nè di parafisi; nè di spore; ma soltanto di masse cellulari, informi e nerastre, onde ne segue che sieno licheni d'ignoti apoteci, offerendo o primordi di altri, ovvero uno stato anormale di essi. In più ampio spazio egli è d'uopo estendere accurate osservazioni sul proposito.

Opegraphe calcaria Ach. Meth. Lichen. p. 72.
Crosta bianca, pulverulenta, tartarea; apoteci tumidoli, opachi, stellulati.

Lecanora Atra Ach. Syn. Meth. Lichen. p. 146.
Crosta rimosa, granulato-verrucosa, bianco-cinerognola; apoteci a disco piano, atro, margine tallode, elevato, libero, in ultimo crenulato-flessuoso.

Comune sulle mura dell'Anfiteatro.

Lecanora galactina Ach. Syn. Meth. Lichen. p. 187.
Tallo quasi imbricato, ruguloso-scabrido, bianco-livido-carneo, nella periferia lobato-crenato, apoteci minuti, conferti, angolosi.

Sulle mura del 2.° ordine dell'Anfiteatro.

Urceolaria calcarea Ach. Lichen. Europ. p. 146.
Tallo tartareo, tenue rimuloso, sub pulverulento, bianco-cinerognolo; lamina proligera, piano-concavo-angolosa, atra; margine tallode ruguloso-crenato.

Sulle mura più elevate dell'Anfiteatro.

Biatora Vernalis e Schaer. Lichen. Europ. p. 146.
Tallo leproso-granuloso, tendente al cinerognolo biancastro; apoteci sferici, turgidi, rossicci.

Sull'erbette disseccate del podio.

Endocarpon pussillum β rufescens Schaer. Lichen. Europ. p. 234.
Tallo coriaceo; squamule rufo–fuscescenti, ondulato–lobato–imbricate.

Frequente sul podio.

Lecidea canescens Schaer. Lichen. Europ. p. 165.
Tallo glauco–incano, radioso–plicato; lacinie periferiche convesso–sinuato–lobate; centro ruguloso–granulato pulveraceo; apoteci minuti, appena cospicui, o nulli.

Vive come sopra.

Il Chiariss.° Fries staccò dalle Alghe lo *Stigonema Atro–Virens* dell'Agh. e di altri autori, e lo riportò ai Licheni, dicendolo *Ephebe pubescens*, manifestando esso degli apoteci.

Lecidea Sabuletorum β campestris Fries Lichen. Europ. reform. p. 234.
Tallo tartareo lobato–granulato, fuscescente cinerognolo; apoteci atri, piani, o alquanto concavi, marginati.

Sulle mura del podio, dal mio *Lichen Atypicum latebrarum* oriunda.

Cladoma pyxidata var. gracillima.
Tallo microfillino cervino–carneo; lacinie embricate bianco–crenulate; stipiti brevissimi prostrati, afilli.

Egualmente oriunda dal mio *lichen atypicum latebrarum* sul podio.

Collema pulposum α papulosum Schaerer. Lichen. Europ. p. 259.
Tallo coriaceo crasso microfillino, imbricato–lobato, verde atro, in uligine polposo gelatinoso, lobuli brevi, sinuato–crenati, centrati confertissimi papillosi; apoteci scodelliferi, sessili, prassino–foschi, rufescenti, aschi crassiusculi breve clavati.

Sovra i muschi del davanzale del podio.

Collema multifidum a complicatum Schaerer. Lichen. Europ. p. 235.
Tallo coriaceo, laciniato, in uliginosi turgescente ulivaceo, in secco atro-verde, lacinie allungate, alquanto concave, imbricato-lobulato complicate; apoteci scodelliformi superficiali, e marginali, grandi, rufescenti.

Sul davanzale del 1° ordine.

β *marginale*; tallo con lacinie allungate, anguste, canaliculate, crespate.

1° ordine tra l'erbe dell'arcate.

Collema lacerum Ach. syn. Meth. Lichen. p. 326.
Tallo membranaceo; fogliaceo, lobi piccoli, lacero-laciniato-denticolati atro-cerulescenti; in uliginosi per pressione le coroncine ristrette in cellule quadrate, trapeziformi, romboidali. Apoteci minuti, concavi, rufescenti; Aschi lungo clavati a spore assai fitte; parafisi esili. (*Collema atro-ceruleum α lacerum Schoer. Lichen. Europ. p.* 245.)

Sul davanzale del podio disteso sovra i muschi.

Collema Cristatum Schaer. Lichen. Europ. p. 245.
Tallo polposo-coriaceo laciniato atro-verde in secco, in uligine turgescente olivaceo, lacinie abbreviate, imbricato aggregate, crespato-crenulate, apice inciso-crestate; apoteci scodelliformi, maturi ampli, fosco-rufescenti; margine clavato, sinuato-crenulato; aschi ovati, spore grandi, parafisi solide.

Sulle mura del podio del Colosseo.

Oss. I Nostocs tutti che occorrono nell'Anfiteatro non sono che anamorfosi dei descritti collemi, che in seguito dell'opinione emessa, è già molti anni nell'Accademia dei Georgofili in Firenze, ne pubblicava indi in Roma una serie di osservazioni, ove esponeva il parallelo di struttura organografica, e in un la chimica composizione nei principii costitutivi. Notava di poi il subordinato ufficio fisiologico nel sistema vegetativo, e gli esterni passaggi di transizione tra le diverse specie collemacee, e le diverse anamorfosi. Non tralasciava di enunciare che alcuni preclari autori, quantunque in varie sentenze facesser mostra di riconoscerne l'identità, pur tuttavia solo la derivavan dalla teoria delle metamorfosi.

Il citato mio lavoro non istimo già essere esente da critica e spezialmente nelle coroncine sulla natura delle guaine che ho attribuito al fenomeno della legge di diffrazione, anzichè a denso strato mucilaginoso. Ma in quanto al principio dell'identità il riconosco inconcusso; e mi gode l'animo che i più moderni autori di Germania, non che altri eziandio riconoscono nel Collema un essere dimorfo che in istato completo di filamenti fruttifica, ed in istato incompleto sterile sotto il nome di Nostoc.

La Iconografia della predetta mia memoria si riporta a quanto di già espressi in proposito; e la Tav. 1ª Fig. 1ª si è il Nostoc comune, il più ovvio tra tutti, e deriva dal Collema pulposum. Indi seguono numerose forme, e diversi passaggi di transizione a specie più eleganti e graziose; ed infine i trapassi dell'apparecchio Imeniale nei Collemi perfetti.

Alghe

Haematococcus Grevillii Agh. Icon. Alg. Europ. tav. 23.
Strato coccineo, cellule semplici, poligonimiche.

Protococcus pluvialis Kütz. Species. Alg. p. 204.

Sulle pareti sgocciolanti dell'interno degli ambulacri.

Porphyridium cruentum Rabenh. Fl. Europ. Alg. p. 397.
Tallo crostaceo, espanso intenso–purpureo; cellule angolato–poliedriche.

Palmella Cruenta Agh. Syst. Alg. p. 211.

Vive come sopra.

Palmella mucosa Kütz. Sp. Alg. p. 15.
Amorfa, effusa, mucosa, verde–olivacea; cellule microgonimiche globose, qua e là trapassanti in sostanza gonimica.

Sulle umide pareti degli ambulacri.

Drilosiphon muscicolo. Kütz. Phyc. gen. p. 242.
Filamenti suberamosi in istrato cinereo–pulveraceo; vagina interna tenera acromatica; esterna irta.

Sui muri e muschi dell'Anfiteatro.

Glaecapsa Montana b flavo-aurantia Kütz Sp. Alg. p. 218.
Strato verde–flavescente, o ranciato; vescichette primarie e secondarie concentriche, globose, e sottilmente striate.
Infra questa specie si aggira la *Cymbella affinis del Kütz.*

Sulle umide pareti degli ambulacri.

Oscillaria tenuis cum Scytonema Myochroo contexta Fior. Mazz. MS.
Ambedue intrecciate e conteste in guisa da formare un solo strato atro–verde plumbeo; avendo in consorzio l' *Epithemia Zebre* Kütz, e la *Nitzehea bilobata* SM.

Sull'umido suolo degli ambulacri.

Oscillaria AErugineo–cerulea Kütz. Phyc. p. 185.
Strato ceruleo–eruginoso; filamenti sub articolati. *Cosmarium aertum Ralfs Scenedmus quadricaudatus β Brebiss ed il Pediastrum constrictum Hass.* vi si aggirano in consorzio.

Sul suolo rasente il muro.

Conferva fugacissima Kütz. Sp. Alg. p. 371.
Pallido–flavescente, fioccosa, subsericea in secco; articoli del diametro 2–4 più lunghi.

Rasente il muro del 2° Ordine dopo le piogge.

Vaucheria Dillwynii Agh. Syst. Veg. p. 172.
Lato–espanso, strato depresso; filamenti cavi, flessuosi, tenui, od una linea crassi; oogonii globosi, od elissoidei, rostrati, sessili, singoli, o gemini; oospore mature, maculate; sporoderma crassissimo, da più strati composito.

Sovra i muri del podio dopo le piogge.

Mesocarpus Scalaris Hass. British. Freswater Algae p. 166. *tav. XLII F.* 1.
Filamenti verde–giallognoli, semplici con massa clorofillosa in prima effusa,

indi contratta cellule 4–5 volte più lunghe del diametro, e conjugate da tubi fruttiferi, muniti di sporangi ovali sedenti in sul diametro della congiunzione.

Sul suolo umido degli ambulacri frammisto all'Oscillatoria *tenuis* e *Scytonema Myochus*.

Glætila Hormosiphon Rabench. Sp. Alg. Europ. p. 320. *t.* 91.
Tallo mammoso verde–pallido, gelatinoso–mucoso, lucido–punteggiato; filamenti per lo più semplici, flessuoso–curvati, muniti di sifone.

Vive sul suolo dei moderni ambulacri.

Oss. Il genere *Hormosiphon* ed il *Nostoc* dall' illustre Rabenhorst riunito nel suo spec. Algarum parmi andar compresi nell'altro suo genere *Glætila* nella sotto famiglia delle Confervacee, ch'ei medesimo nota essere insigne per la sua piccolezza ed affinità con i Nostocs. A mio debole giudizio essi, l'*Hormosiphon* ed il Glœtila, non dovrebbero essere distinti che da caratteri differenziali l'uno dall'altro, conservandone la identità.

FUNGHI

Agaricus coprinus deliquescens Fries. Syst. Myc. p. 509.
Subcespitoso; pileo membranaceo striato, fuliggineo; lamelle lineari, lucido–fosche, stipite eguale, nudo.

Nell'arena dopo le pioggie

Agaricus Mycena muscorum Fries. Syst. Myc. p. 167.
Alquanto fosco; pileo circa un'oncia lato; convesso–piano umbonato, striato, stipite breve, base incrassato.

Tra i Muschi del podio in autunno.

Excipula Vermicularia Corda III. Tav. 7. *p.* 77.
Solitariamente sparsa; periteci ispidi ed atri; in ultimo pezizoidei con ostiolo tenue, nucleo atro; spore fusiformi settate, lanceolate, acuminate, bianche; episporio tenue; nucleo 3–4 partito.

Trovato nell'Anfiteatro sovra una fracida trave dopo le piogge.

Tulostoma Brumale Pas. Syn. Melh. Fung. p. 139.
Stipite lieve e lungo; peridio globoso glabro; orificio cilindrico, integro.

Sul 1° Ordine dell'Anfiteatro dal lato Settentrionale.

Pilobolus crystallinus Pers. Syn. p. 117.
Fugace, ed aggregato; stipite pellucido, superato da carnosa vescichetta nereggiante, eretta, indi elastico, dissiliente.

Rasente il podio, più volte trovato sul piano.

Schizophyllum comune Fries. Syst. Myc. p. 350.
Gregario, tomentoso, bianco-grigio, margine lobato; lamelle solcato-purpuree, cineree, villose; stipite brevissimo.

Sovra una fracida trave copioso.

Polyporus velutinus lutescens Fries Syst. Myc. p. 368.
Pileo sugheroso, coriaceo, tenue vellutino, quasi zonato; pori quasi rotondi, bianco-lutescenti.

Abita come sopra.

FUNGILLI

Peziza muscorum Fries. Syst. Myc. p. 69.
Gregaria, fulva; in prima concava, indi disco piano e margine prominente, flessuoso 2 linee lato; aschi breve-clavati; macrospore 8.

Sulle mura del podio.

Uredo Euphorbiae Helioscopiae Pers. Syn. Meth. Fung. 215.
Sparsa, sub globosa, flava, prominente

Nell'Anfiteatro sulle foglie dell'Euphorbia Helioscopia

Uredo proeminens Dc. Fl. Fr. p. 235.
Cespitoli flavi, indi foschi ipofilli, convesso-piani, da lacera epidermide cinti; sporidii minuti subglobosi.

Sull'*Euphorbia charnaesyce* aderente in copia al suolo dell'arena in Estate.

Coecoma alliorum Link. Crypt. part. 2ª *p.* 7.
Macule obliterate; acervi oblungo-ovali; anfigeni; sporidii subglobosi, flavi, o bianchi.

Delle 5 varietà di Agli nei quali l'autore stabilisce l' habitat di questa specie, io l'ho rinvenuto sull'*Allium-subhirsutum* del 2° e 3° piano dell'Anfiteatro.

Uredo Sonchi Pers. Meth. fung. p. 217.
Conferto, e subconfluente, fulvo; cespiteli alquanto piani, irregolari.

Secondo il sudetto autore sarebbe sul *Sonchus Arvensis* ed io invece l'ho trovato sul *Sonchus tenerrimus*. È anche sinonimo del Caeoma compositarum.

Frequente su tutte le mura dell'Anfiteatro.

Æcidum Clematidis Dc. Fl. Fr. 2 *p.* 243.
Macule fosche; acervi dei peridii orbicolati, bianco-flavescenti; sulla foglia; orificio subdentato, indi evanido.

Sulle foglie della *Clematis Vitalba*.

Æcidum Phyllireae Dc. Fl. Fr. 5. *p.* 96.
Macule obliterate; pseudo peridii-immersi; orificio contratto, sporidii ranciati.

Sulle foglie della *Phyllirea Media*.

Cystopus candidus De Bary.
Macule pallide od obliterate; acervuli rotondi, ed ovali sparsi, e confluenti, dall'epidermide bollata ricoperti; sporidi, copiosissimi, globosi, bianchi.

Uredo Candida Pers, syn. meth. Fung. p. 23.

Sulle foglie copiosamente detta *Capparis spinosa* β *inermis*.

Sphaeria Allicina Fries. syst. Myc. p. 43.
Anfigena ; periteci dall'epidermide oriundi, sparsi sovra macule cineree atri e nitidi ; in prima astomi, indi subpapillati.

Sulle foglie dell' *Allium Ampeloprasum.*

Sphaeria Trifolii Pers. p. 30.
Ipofilla linea circa 1–1½ lata, ineguale, subconfluente, turbercolosa–ragulosa atra ; periteci nello stroma immersi ; teche allungate ; spore settate.

Sulle foglie del *Trifolium scabrum.*

Io non ho potuto esibire che una meschina rappresentanza Crittogamica, imperocchè la debole mia salute non mi permetteva affrontare sovente le condizioni di umidità onde si piaccion vivere i minuti organismi.

Nel resto ho procurato richiamare a vita le piante e i fiori che le venerande mura vestivan di poesia ; le quali ora spoglie, severe, e scosse, attestano, come già dissi, l' instabilità delle grandezze umane, di che fan testimonio le rovine di quel maestoso Monumento, inalzato quando Roma era dominatrice dell'Universo. Indi vi trionfò il Vessillo di nostra Redenzione ; e quel suolo venne già cementato dal sangue de' suoi illustri Campioni : laonde il Cristiano inalzato dalla fede s'infuturava nel Cielo. L'Archeologica escavazione tutto distrusse, e se da principio prese a mostrare i meravigliosi congegni dell'arte, ben presto essa si convertiva in fetido stagno, ricetto di rane e di rospi, mentrechè le impure acque esalavano pestiferi miasmi, onde l'animo lungi ne rifuggiva seco recando dolore e mestizia insieme.

SOPRA LA RELAZIONE FRA I MASSIMI E MINIMI DELLE MACCHIE SOLARI E LE STRAORDINARIE PERTURBAZIONI MAGMETICHE

COMUNICAZIONE VIII.

DEL P. G. STANISLAO FERRARI

Seguendo il metodo incominciato e seguito costantemente nelle precedenti comunicazioni, siamo giunti all' esame de' fenomeni solari e magnetici avvenuti nell'anno 1874 affine di studiarne la mutua correlazione. Come già facevamo notare sul principio della 7ª Comunicazione, questa correlazione si farà tanto più manifesta quanto più verrà diminuendo l'attività sulla superficie solare in quanto essa attività si manifesta dal numero delle macchie delle facole delle protuberanze e dall' estensione più o meno grande dell' area di superficie perturbata.

Ora nel 1874 il numero delle macchie è disceso a 156 mentre nel 1873 era di 216 a nel 1871 di 304, però si rende ancora più sensibile la diminuzione la quale andrà sempre più crescendo ne' seguenti anni.

Cinque sole furono in quest'anno le fortissime e straordinarie perturbazioni magnetiche ed altrettante ne furono osservate a Greenvich. Mancandoci pel 1874 le osservazioni di Belen all' Havana abbiamo preso ad esame quelle dell' Osservatorio di Greenvich, ed in questa circostanza avendo dato un' occhiata retrospettiva per gli anni precedenti abbiamo con sorpresa notato come in quell' Osservatorio siasi notato in questo e negli anni precedenti lo stesso numero di fortissime e straordinarie perturbazioni magnetiche come da noi. Nel 1871 epoca del massimo ve ne furono 13 a Roma ed a Greenwich; 15 nel 1872, 3 nel 1873 e 5 nel 1875. (*) Una simile coincidenza fra luogi si disparati e lontani è prova manifesta della verità di ciò che fin dalla 1ª comunicazione annunciammo nel 1874; che cioè anche solo le osservazioni d' un luogo sono sufficienti per generalizzare le conclusioni,

---

(*) Greenwich-Magnetical and Meteorogical Observations 1871, 1872, 1873, 1874.

poichè tali fenomeni di ordine cosmico si riproducono contemporaneamente su tutta la superficie del globo salvo minime differenze locali.

Dando un'occhiata alla curva che esprime la frequenza relativa del numero delle macchie, si comincia a scorgere in essa un' assai meno notevole distinzione in periodi, compresi fra un massimo e due mimini assoluti, come vedevasi nelle curve degli anni scorsi, e gli stessi periodi maggiori veggonsi per dir così suddivisi in periodi secondari; il che è manifesto indizio dell' appianarsi, della superficie solare e dell'andarsi lentamente disponendo a quello stato di calma che ora veggiamo sopra di essa in quest'epoca di minimo assoluto.

Per maggior chiarezza non solo, ma eziandio per esprimere più esattamente lo stato di attività sulla superficie solare, scieglieremo la divisione in periodi, deducendola dai valori de' massimi ed i minimi che ci vengono dati dalle cifre che esprimono la quantità di area di superficie perturbata; ed anche per quest'anno veggiamo che usando questo metodo si riesce allo stesso numero di periodi, salvo minime differenze, che si otterrebbe prendendo per base la curva del solo numero delle macchie.

Queste alternative pertanto di massimi e minimi si dividono per quest'anno in 9 periodi principali. La massima ordinata della curva annuale corrisponde ai giorni 1 e 27 Febbraio ed 8 Agosto esprimente il numero di sette macchie mentre nel 1871 salì il 15 marzo e 26 Aprile al numero di 19. Il medio generale oscilla fra le 3 e 4 macchie. I tre massimi sopraccennati accennano ad altrettanti risvegli di attività sebbene mediocre e sono come gli ultimi lampi della medesima, dopo de'quali essa verrà fino al momento in cui scriviamo sempre più diminuendo, toccando al suo minimo.

Veniamo ora, secondo l' usato, a mostrare l' intima correlazione fra queste alternative dell' attività solare e le straordinarie perturbazioni magnetiche.

Il 1° periodo pertanto, quanto all'area di superficie perturbata, si estende dal 6 di Gennaio al 18 Febbraio compreso fra due minimi di 6 ed 8 millimetri quadrati di superficie perturbata ed un massimo di 120.^{mmq} Durante questo periodo si ebbero due straordinarie e fortissime perturbazioni magnetiche specialmente nel bifilare e queste accompagnarono esattamente il passaggio di due gruppi; il primo de'quali giunse il 14 a 60.^{mmq} di superficie perturbata e l'altro, insieme con altre 4 macchie formava un totale di 120.^{mmq} Ambedue questi gruppi manifestarono al loro apparire ed al loro tramonto vivissime eruzioni metalliche e ne' loro svariati cangiamenti di forma, mostravano quanto grande fosse nel loro interno l'attività solare. Il giorno 22

poi mentre stava per ispuntare il 2° gruppo, fu osservato all'orlo Ovest il formarsi d'una nuova macchia, (non essendovene in quel sito alcuna il dì precedente) essendo presenti i Professori Tacchini di Palermo e Rutherfurd di New York, il primo de'quali ne fece un'accurato disegno nel quale si vede la materia eruttata avvolgersi a forma di spira salendo a una grande altezza e cangiando rapidamente di forma.

Intorno ad essa ecco quel che ne scrisse allora il Ch. P. Secchi nel n.° 1 del Bullettino del 1874. « La forma e la rapidità dei movimenti strapparono un concorde avviso, che la materia era projettata in alto e quindi strascinata da vento impetuoso e turbinoso, del che al semplice aspetto si convince l'osservatore. Lo spettacolo durò appena mezzora e presto svanì e si sciolse. Montagne di magnesio alte oltre un minuto si formavano e sparivano rapidamente. L'altezza del getto principale si trovò essere 2′ 32″ alle 2^h 33^m pom. » Per formarci un idea dell'enorme altezza di tale getto basterà il riflettere che il valore suddetto corrisponde nella nostra scala del disco solare all'altezza di $19,^{mm}$ cioè a dire a 17 raggi equatoriali terrestri, ossia a 108122 chilometri!

La più forte però e veramente straordinaria perturbazione generale de'magneti si ebbe il giorno 4 Febbraio tanto di noi, quanto a Greenvich. Essa fu osservata dall'1^h 30^m pom. alle 2 del Ch. P. Denza a Moncalieri; nel nostro disegno che fu fatto alle 11 ant. non iscorgesi che un vivo fiammone all'Est con molte facole e due macchie vicino all'orlo. Tenuto conto della rotazione solare e dell'angolo di posizione si trovò che quest'eruzione era il seguito di quella che fu osservata il giorno 22 al momento della sua prima formazione. Oltre a ciò il Sole era tutto puntini assai vivi ed al posto di alcune facole del giorno precedente in questo giorno vedevasi un piccolo ammasso di pori. Indizio tutto ciò di grande attività sulle superficie solare. A Greenvich il Declinometro oscillò fra 19° 57′ 25″ alle 3^h 28^m pom. e 18° 41′ 10′ alle 7^h 52^m del 4. Da noi si ebbe il massimo nel bifilare a $127^{div.}$ alle 7^h pom. ed il minimo a $50^{div.}$ alle 7^h pom. E tenuto conto della differenza di longitudine, il minimo accadde alla stess'ora da noi ed a Greenvich, il massimo anticipò da noi di 5 ore. È da notare però che il magnetometro di Greenwich essendo a registro continuo mediante la fotografia, colse i veri momenti di massimo assoluto e presentò una serie di continue oscillazioni a brevissimi intervalli, il che non si scorge da noi per l'interpolazione delle osservazioni. L'istante però del minimo fu colto allo stesso tempo in ambedue le stazioni.

Il 2.° periodo incomincia al termine del precedente ai 18 Febbraio e e termina ai 6 di Marzo. Il giorno 18 si ebbe il 1.° minimo di 8^{mmq} di superficie perturbata ed 8^{mmq} altresì nel 2.° Il massimo fu di 39^{mmq} il giorno 27. In esso fu mediocre l'attività, si ebbe però in esso il 2° massimo principale di tutto l'anno se si consideri la curva che rappresenta il numero delle macchie che furono 7 dal 25 al 27. Sul termine di questo periodo si ebbe una forte perturbazione magnetica nel solo bifilare che percorse dal mattino del 7 fino al mezzodì dell' 8 ben 46 divisioni della sua scala. Gli altri magneti furono soltanto irregolari. Questa straordinaria perturbazione fu notata eziandio a Greenvich ed ivi il declinometro oscillò fra 19° 0′ 30″ mezz' ora dopo la mezzanotte fra il 7 e l'8, e 19° 48′ 40″ alle 7″ 25^{m} ant. dell'8. Questa perturbazione corrisponde al passaggio di un gruppo principale sulla superficie solare ed il giorno precedente vedeansi numerose e vive facole con enormi protuberanze ed un nuovo gruppo veniva formandosi nelle vicinanze dell'orlo occidentale del Sole.

Il 3° periodo corre da quell'epoca fino al 22 di Aprile, ed è anch'esso un periodo di mediocre attività, pure non mancarono in esso delle forti (se non fortissime) perturbazioni magnetiche e tutte in relazione col passaggio delle principali macchie sul Sole.

Questo periodo incomincia col passaggio d' un magnifico gruppo, il quale entrò il giorno 19 Marzo e ne' giorni seguenti sviluppossi in modo singolare giungendo al suo massimo di 92^{mmq} di superficie perturbata il giorno 14, tramontando il giorno 22 con viva eruzione all' orlo. Il 13 i magneti furono assai perturbati o meglio esagerati nelle loro escursioni senza uscire dalle ore tropiche de' loro massimi e minimi; solo il declinometro fu assai fluttuante al mattino. Di questo gruppo furono fatti parecchi disegni ed in quello del 14 Marzo è singolare l'aspetto d' un istmo luminoso nel mezzo della macchia con i veli rosati alla sua estremità. Nel centro di esso notavasi dal Ch. P. Secchi il sodio assai dilatato, il magnesio è pure dilatato, s' impiccolisce la F; s' ingrossano la E e le vicine, densissime linee si veggono fra la C e la D.

Il giorno 22 Marzo la quantità di superficie perturbata sul Sole era ridotta a soli $6,^{mmq}$ ma verso la fine del mese andò di nuovo crescendo salendo al massimo di 62^{mmq} il giorno 1 e 2 Aprile, epoca in cui a Greenwich e da noi si ebbe una forte perturbazione straordinaria d'accordo, al solito, col passaggio d'un gruppo a due nuclei sul disco solare. Altre due perturbazioni straordinarie ed abbastanza forti si ebbero ne' giorni 9 e 13,

dopo di che andò diminuendo l'attività solare ogni giorno più, fino ad esservi un solo punto di 0,5^{mmq} circondato da facolette, il giorno 22 Aprile. E così termina il 3.° periodo.

Col 4.° periodo incomincia un' epoca di mediocre attività ma non senza alcune più che discrete perturbazioni: anzi, perciò che riguarda la curva del numero delle macchie, si osserva in essa un rialzo che giungeva al suo massimo nel mese di Agosto. Questo 4.° periodo è compreso fra il minimo precedente e l'altro del 7 di Giugno con 9^{mmq} di superficie perturbata. Il massimo si ebbe il giorno 9 Maggio con 82^{mmq} di superficie perturbata. In questo periodo la più notevole perturbazione si ebbe il giorno 29 Aprile dopo che era entrata nel sole una macchia nucleare preceduta dall'eruzione giorno 25 e che mostrava una tendenza alla forma spirale, indizio dell'attività che dovea regnare nel suo interno. Il giorno stesso nel centro del disco solare si erano formati dei pori che crebbero il dì seguente, indizio anch'essi di attività. Un'altra mediocre perturbazione nel bifilare si ebbe il il giorno 16 e 17 Maggio ed un'altra il 26 in tutti i magneti. Queste perturbazioni furono come si è detto mediocri ed anch'esse in coincidenza col passaggio di macchie e piccoli gruppi sul Sole che però furono di ben mediocre estensione quanto all'area di superficie perturbata. In questo periodo si possono considerare come due parti, la 1 del 21 Aprile al 19 Maggio col minimo di 6^{mmq} in questo giorno; e l'altra dal 19 Maggio fino al 7 Giugno termine del periodo principale.

Il 5.° periodo incomincia da quest'ultima epoca e termina il 28 di Luglio col minimo di 14^{mmq} di superficie perturbata. Il massimo principale fu di 165^{mmq} di superficie perturbata agli 8 di Luglio; un massimo secondario si ebbe il giorno 20 di Giugno con 89^{mmq} di superficie tutti appartenenti ad un vasto gruppo che trovavasi in quel giorno nel mezzo del disco solare.

Se in questo periodo non si ebbero delle fortissime e veramente anormali perturbazioni magnetiche, quali si avevano all'epoca del massimo assoluto, pur tuttavia, oltre che le forti e straordinarie perturbazioni non mancarono, e tutte in coincidenza coi passaggi delle principali macchie e dei gruppi, il carattere più speciale di questo periodo si fu una singolare esagerazione nelle diurne escursioni degli strumenti magnetici; giungendo p. es. il verticale il giorno 8 Luglio (mentre trovavansi sul Sole tre grandi gruppi coll'area complessiva di 165^{mmq} di superficie perturbata) a percorrere ben 36 divisioni della sua scala essendo invece paralizzato dentro due sole divisioni il bifilare.

E qui vogliamo por mente ad una cosa che è fondamentale in cosifatto genere di discussione. Quantunque dall'analisi fin quì minutamante eseguita risulti indubitato il fatto della correlazione fra i fenomeni solari ed i magnetici, pur tuttavia, allorchè si tratta dell'individuale ricerca di detti fenomeni sarebbe vano il pretendere che in tutti e singoli i casi si verifichi nello stesso grado la suddetta correlazione. Essa sussiste ad evidenza allorchè trattasi dell'epoca del massimo, come apparisce dando anche solo un'occhiata superficiale alla Tavola che accompagna il riassunto che abbiamo fatto delle nostre ricerche nell'anno scorso (1), ma allorchè siamo nell'epoca che volge al minimo di detti fenomeni avviene talvolta che non così per minuto e appuntino si scorge detta coincidenza. E la ragione è manifesta. Se si consideri per un istante la tavola suddetta, noi vediamo che all'epoca del massimo assai grande si è l'estensione dei massimi e minimi ne' singoli periodi, e ciò tanto perciò che riguarda la quantità delle macchie, quanto il valore dell'area di superficie perturbata, e però a tali forti esquilibrii di attività sulla superficie solare sempre si scorge corrispondere un simile esquilibrio nella forza magnetica della superficie terrestre. Ma per opposito, allorchè ci accostiamo al minimo, come apparisce manifesto e nella curva delle macchie e nella mediocre quantità di superficie perturbata, i periodi secondari e principali sono assai meno sensibili e però solo ne' più forti esquilibri sussiste la dimostrata correlazione, mentre non sempre si scorge nelle piccole oscillazioni. Al che vuolsi aggiungere il caso del ritorno di macchie, le quali oltre ad essere di minor dimensione, erano ancora di ritorno dopo altre rotazioni ed esaurite quanto alla forza eruttiva e però di minore o nessuno influsso sopra lo stato del magnetismo terrestre. Conviene adunque bene interpretare il senso che vuol darsi a queste parole correlazione, affine di non prendere motivo da qualche particolare eccezione, che può spiegarsi, per conchiudere illeggittimamente contro le precedenti conclusioni ad evidenza provate.

Ritornando ora all'esame consueto, siamo giunti al 6° periodo il quale è compreso fra il 26 Luglio, termine del precedente, ed il 6 di Settembre. Il 2.° minimo del 6 Settembre fu di 1^{mmq} di superficie perturbata con un gruppetto di 4 pori piccolissimi con facoletta viva all'intorno; il massimo si ebbe il 14 Agosto con 116^{mmq} di superficie perturbata. Questo periodo fu un periodo di forte attività, relativamente allo stato attuale del Sole, spe-

(1) V. Atti dell'Accademia Pontificia de N. Lincei. Sess. VII. Giugno 1877.

cialmente dai 30 Luglio fino ai 21 di Agosto. Questa manifestossi pel passaggio di vari gruppi, alcuni de'quali assai estesi accompagnati da vive eruzioni metalliche e che dei loro continui cangiamenti di forma mostravano la grande attività delle forze che agivano nel loro interno. Il gruppo n° 102 era tutto tempestato da piccoli punti o macchie, ed anche gli altri gruppi ne erano ben provveduti tanto che il giorno 6 Agosto in soli 4 gruppi trovavansi 44 macchie distinte fra grandi e piccoli pori. Dalchè vuolsi fare avvertito chiunque osserva ogni giorno le macchie del Sole, come non debbansi confondere il numero che esprime la quantità de' gruppi o delle macchie nucleari che trovavansi in un dato giorno sulla superficie solare, col numero che esprime il numero dei piccoli fori o punti che spesso trovansi nell'interno di vari gruppi. Se non si ponga in ciò attenzione ne nascerebbe una grande confusione di linguaggio astronomico; egli è perciò che nei nostri quadri che esprimono tanto il numero delle macchie quanto il numero esprimente la quantità di superficie perturbata sempre possiamo in due distinte colonne ed il numero dei gruppi e quello delle macchie per evitare ogni equivoco.

A questo passaggio di gruppi estesi ed agitati corrisposero delle forti perturbazioni magnetiche. La 1ª si ebbe il 1° di Agosto con l'escursione di 27 divisioni nel bifilare e 22 nel verticale. Da quest'epoca incominciò una forte salita nel bifilare percorrendo dall'1 al 10 lo spazio compreso fra la 79ª divisione e la 112ª, ossia 33 divisioni. A questa salita del bifilare corrispose una simile discesa nel verticale discendendo in pari tempo dalla 61ª divisione alla 26ª ossia percorrendo 35 divisioni. Il periodo però di maggiore perturbazione nei magneti è compreso fra il 9 ed il 16 Agosto in intima correlazione coi vasti gruppi che erano di passaggio sul Sole. Anche allora quando era cessata la perturbazione principale rimaneva esagerata specialmente nel verticale l'escursione diurna la quale talvolta, p. es. il 20, fu di 25 divisioni senza perturbazione negli altri magneti e senza cangiamento di sorta nell'ore tropiche normali. Il massimo della perturbazione alla metà di Agosto corrispose esattamente tanto al massimo di superficie disturbata quanto al trovarsi i gruppi prossimi al centro del disco solare.

Il 7° periodo si estende dal termine del precedente fino al 30 Ottobre quanto all'andamento generale, sebbene fu suddiviso in altri tre periodi secondari, ciascuno de'quali fu accompagnato dalle relative perturbazioni magnetiche. Il 2° minimo di questo periodo, fu un assoluta mancanza di

di macchie, e quindi un zero assoluto di superficie perturbata, e si ebbe il giorno 30. Il massimo poi fu di 93^{mmq} di superficie perturbata e si ebbe il giorno 4 Ottobre, giorno di fortissima e straordinaria perturbazione magnetica generale da noi e da Greenwich come vedremo.

Venendo ai particolari, il 1.° periodo secondario è compreso fra il 6 ed il 18 Settembre col massimo il giorno 11 di 27^{mmq} di superficie perturbata, e forte perturbazione magnetica ad essa proporzionata. Quel che vi ha di singolare in questo periodo si è che mentre il giorno 9 non vedevansi sul Sole che due piccolissimi gruppi, dell'area complessiva di soli 3^{mmq} di superficie, il giorno 11 videsi presso dell'orlo Ovest un ben formato ed abbastanza ampio gruppo circondato e preceduto da vivissime ed estese facole, con 10 macchiette all' interno. Forse si cominciò a formare il dì precedente, ma ne fu impedita l' osservazione pel cielo coperto. La forte perturbazione magnetica che accompagnò quest'apparizione si ebbe il giorno 10 ed anche ne' giorni seguenti 11 e 12 continuò l'agitazione nel bifilare e nel verticale. Il giorno 18 si ebbe la chiusa di questo periodo secondario con soli 2^{mmq} di superficie perturbata ed una sola piccolissima macchia sul Sole.

Il 2.° periodo secondario che fu il più fornito di attività, si estese fino al 14 ottobre col minimo in quel giorno di 7.^{mmq} Il suo massimo assoluto, che fu il massimo eziandio di tutto il periodo principale si ebbe, come dicemmo, il giorno 4 ottobre con 93^{mmq} di superficie perturbata. Fino dal giorno 20 settembre si cominciò a scorgere sul sole un nuovo aumento di attività, già prenunziato da rapida salita del bifilare, secondo il consueto, ed una bella macchia nucleare vedevasi di poco entrata all'orlo Est, nell' immagine diretta. Tenendo conto della rotazione, essa era il risultato d'un gruppo formatosi improvvisamente il giorno 1 settembre non lungi dall'orlo Ovest, che venne ogni di più crescendo tanto che il giorno 3, non ostante l'angolo visuale assai inclinato, contava 15^{mmq} di superficie perturbata con molti cangiamenti di forma e bella eruzione metallica allorchè fu il 5 presso all'orlo con sodio e magnesio osservati del Ch. P. Secchi assai copiosi nel getto principale. Durante il suo passaggio per la rotazione nella parte invisibile, dovette subire assai mutazioni fino a condensarsi in una vasta macchia nucleare che contava il giorno 26 presso al centro del disco solare 35^{mmq} di superficie perturbata. Il 29 si ebbe un' assai forte perturbazione magnetica generale specialmente nel verticale e nel bifilare, percorrendo ambedue oltre a 25 divisioni. Essa fu di carattere aurorale, cioè col bifilare calante incontratosi col

verticale crescente. Il 28 eravi ancora una vivissima eruzione con gruppo all'orlo, il quale a mano a mano che s' inoltrava sul disco solare veniva ingrossandosi, e da suoi continui e rapidi cangiamenti di forme, contando nel suo interno fino a 28 piccole macchie e porosità, mostrava quanto grande ivi fosse l'attività solare. Allorchè esso giunse precisamente al meridiano centrale rispetto alla visuale terrestre ed eziandio rispetto al Nord vero del sole, fu accompagnato da una veramente straordinaria e fortissima perturbazione magnetica generale. Il bifilare da noi percorse dal pomeriggio del 3 al mezzodì del 4, 68 divisioni della sua scala; il verticale ne percorse 57, e 16 il declinometro. Anche a Greenwich fu notata in questi due stessi giorni una simile perturbazione, percorrendo ivi il declinometro 49′ il giorno 3, e il 4 percorrendone 48′. Il carattere di questa fortissima perturbazione fu eminentemente aurorale ed infatti leggiamo che in quel giorno furono viste delle brillanti anrore boreali in molti luoghi dell'Europa settentrionale.

Il 3.° periodo secondario è compreso fra il 14 ed il 30 di questo mese con un massimo pure secondario di 22^{mmq} di superficie perturbata il giorno 18 e 4 macchiette sul sole. Due mediocri perturbazioni straordinarie accompagnarono questo breve periodo ne' giorni 24 e 28.

Colla perturbazione fortissima del 3 e 4 cessarono le straordinarie fortissime perturbazioni di quest'anno, e si andranno facendo sempre più rare nell'epoca del minimo assoluto, unitamente alla sempre minore escursione diurna degli strumenti magnetici, checchè ne sembri al sig. Faye, il quale vorrebbe tolta ogni legge di dipendenza fra i fenomeni solari e magnetici, Ma anche data e non concessa l'assenza di questa legge di causa e di effetto, il fatto dell' intima correlazione è evidente e dai lavori di Brown, di Wolf e da questi che veniamo esponendo così per minuto in queste communicazioni.

L'8.° periodo corre dal 30 ottobre al 1.° decembre ed è un periodo di mediocre attività. Se si prenda ad esame l'area di superficie perturbata esso dividesi nettamente in due periodi secondarii; il 1.° dal 30 ottobre al 12 novembre con 6^{mmq} in questo giorno di 2.° minimo; e due massimi uno di 33^{mmq} il 5 e l'altro di 35^{mmq} il 9. In questo periodo all'epoca del suo massimo e del suo minimo cioè ne' giorni 6 ed 11, si ebbero due discrete perturbazioni proporzionali, s' intende, al grado di diminuita attività, ma che meglio dimostrano il fatto della correlazione sopra quelli che si avevano all'epoca di grandi agitazioni sulla superficie solare.

Il 2.° periodo secondario è compreso fra il minimo di 6^{mmq} del precedente il 12 e quello di 5^{mmq} il 1.° di decembre, con un massimo di 34^{mmq} di super-

ficie perturbata il giorno 21. Sebbene localizzata in un solo gruppo pure, in esso fu forte l'attività poichè il giorno 12 presentossi all'orlo Est come una piccola macchia di 1^{mmq} circondata però da molte e vive facole, e nei giorni seguenti venne ognora più crescendo e cangiando di forma ed il 21 due altri piccoli gruppi erano già entrati sul sole e nel loro passaggio produssero la forte perturbazione del 23 specialmente nel bifilare quanto all'ampiezza dell'escursione quantunque anche il declinometro e il verticale fossero perturbati per ciò che spetta l'ordinario loro andamento. Anche il giorno 30 si ebbe una mediocre straordinaria perturbazione colla quale si chiuse questo periodo.

Il 9.° ed ultimo periodo di quest'anno 1874 è compreso fra il 1.° del mese di Decembre e il 24, epoca dei due minimi assoluti, con un massimo il giorno 16, quanto all'area di superficie perturbata. In queste mese furono pochi i giorni di osservazione cioè otto soltanto, ma la loro distribuzione fra i periodi di cattivo tempo è tale, che, per ciò che riguarda al numero progressivo e totale dei gruppi, esso è esatto, atteso il tempo che impiegano i gruppi ad aitraversare la superficie apparente del sole. Ed infatti nel mese precedente in 18 giorni d'osservazione si numerarono 7 gruppi e 7 se ne contano in questo mese in soli otto giorni. Il 2.° minimo assoluto del 24 fu di 1^{mmq} con una sola piccola macchia, ed il massimo fu di 36^{mmq} di superficie perturbata con due gruppi formati da 5 macchie principali e 20 pori o punti nelle medesime. Questo periodo fu un periodo di assai mediocre attività pur nondimeno tanto all'epoca del suo massimo quanto a quella dei suoi minimi, in proporzione sempre della quantità di superficie perturbata sul sole, corrisposero esattamente tre mediocri e straordinasie pertubazioni magnetiche precisamente nei giorni 1, 16 e 22 del mese di decembre.

Nell'atto che stavamo per chiudere questa communicazione, ci è caduto sottocchi un articolo dell'Elecricité del 30 Luglio 1878 tradotto ed inserito nel giornale l'Elettricista diretto dal sig. Lamberto Cappanera (1–15 settembre 1878) nel quale si reca l'opinione del Faye che l'apparizioni delle macchie del sole non possono considerarsi come causa delle variazioni del magnetismo terrestre. Si reca ancora l'opinione dell'Allan Brown, la quale tiene che i cambiamenti nella quantità di calore prodotto per l'apparizione delle macchie del sole non possono essere sufficienti per modificare lo stato elettrico del globo e per conseguenza per produrre delle perturbazioni magnetiche. E quindi per ispiegarle fa ricorso alla causa sospettata dall'Hansteen, ossia delle ineguaglianze dei movimenti celesti e specialmente di Mercurio e di Giove.

Checchè ne sia di questa sentenza, piacemi soltanto di far osservare che posta l'intima correlazione fra i fenomeni solari ed i magnetici non solo nei grandi e lunghi periodi ma eziandio nelle straordinarie e parziali perturbazioni magnetiche anno per anno, mese per mese, rotazione per rotazione, come abbiamo abbondantemente dimostrato in queste otto comunicazioni, e fino dal 1867 (senza che veruno fra i dotti se ne sia menomamente occupato), posta dico una sì intima relazione, parmi che se ne debba conchiudere che: sia come causa *diretta*, sia come causa *indiretta*, non può negarsi che ogni principale modificazione nello stato fisico del sole, manifestatasi specialmente pel fenomeno delle macchie, non sia cagione d'un corrispondente equilibrio nello stato del magnetismo terrestre e quindi delle perturbazioni magnetiche. I fatti già esaminati e pubblicati negli Atti della nostra Accademia, e quelli che stiamo per esaminare e pubblicare senza escludere una causa (tuttavia a dir vero ignota) generale e comune, conducono tutti a dimostrare che una volta modificato lo stato di attività dell'astro maggiore, questo nelle sue agitazioni tende alla sua volta a modificare quello del suo satellite quale è la terra, donde le perturbazioni magnetiche coi fenomeni aurorali che le accompagnano.

Senza entrare in polemiche inutili e sempre spiacevoli, secondo che abbiamo fatto fin ora, ci atterremo ad un accurato esame de' singoli fenomeni, e paghi della loro evidente correlazione ben ci guarderemo dall'emettere teorie avventate, le quali se possono per un instante colpire l'immaginazione, non sempre sono quelle che reggano alla prova del tempo e conducano alla scoperta della vera cagione di così complicati fenomeni.

NUOVO GENERE E SPECIE DI DIATOMEA

NOTA

DEL CONTE ABATE FRANCESCO CASTRACANE

Chiunque a soggetto di studio scelse la vita del mare nelle sue produzioni vegetali, si troverebbe poco corrisposto nelle speranze, se a campo di ricerche scegliesse il mare Adriatico nel litorale italiano, e particolarmente nel tratto appartenente alle Marche. La natura arenosa di quel fondo di mare, la poca profondità delle sue acque e la dolcezza del declivio litorale occupato in tutta la sua estensione o da arene mobili o da aggestioni brecciose, impediscono il tallire delle alghe lungo quelle spiaggie. Questa circostanza mi ha grandemente contrariato nelle mie ricerche intorno le alghe microscopiche, le quali per l'appunto sogliono vegetare o parassite su le alghe superiori o in denso strato muccoso, che suole rivestire le roccie o sommerse o appena emergenti dal seno del mare. Questo fece che nei primordi dei miei studj microscopici mi dovessi rimettere al caso per riconoscere qualche Diatomea, ricercandola fra le dejezioni dei molluschi, o nel contenuto dei loro stomachi. In tale genere di ricerche eseguite in simili circostanze potei reputarmi abbastanza fortunato, avendo per tal modo scoperto belle e interessantissime forme, le quali ignoravansi abitatrici dei nostri mari, come per tacere di altre l'*Asterolampra Marylandica*. Ehrbg. e l'*Asteromphalos Brookei*. Bail.

Ma nello studio di tali piccole maraviglie io non mi era proposto semplicemente il conoscere e l'ammirare con sterile contemplazione la stupenda varietà e ricchezza di loro forme, ma intendeva precipuamente a studiarne i caratteri, le influenze, in una parola, a indagare la fisiologia delle Diatomee. Ma un tale studio non può farsi altrochè con il continuo osservare quelle minime creature ancora viventi, tentando sorprenderle nei momenti delle loro diverse evoluzioni biologiche, al fine di determinare per tal modo la precipua più diretta funzione della vita organica, la riproduzione. A tale scopo e più volte mi recai nell'Istria e nella Dalmazia, trattenendomi colà qualche tempo a raccogliere Diatomee, notando e registrando man mano quanto sul momento mi era dato osservare, e il risultato di quelle ricerche consegnai in apposita Memoria, che ebbi l'onore di presentare a questa Accade-

mia. Però, nel desiderio di ricercarmi un campo meno per lontananza disagiato alle mie ricerche e più prossimo alla mia dimora estiva e autunnale, impresi a percorrere ed esaminare press' a poco tutte le nostre spiagge Marchegiane.

Nel punto, dove l'Italia più si avvicina alla Dalmazia e dipendente dal monte Conero, si protende sul mare un promontorio, al quale appoggiasi la città di Ancona, ivi sorta per l'opportunità che la configurazione di quello a forma di gomito le dava di avere un buon porto. A chi dal mare rivolgasi a rimirare Ancona dal lato di S. Ciriaco, che la sovrasta, non può non apparire in quella perpendicolare altissima parete rocciosa l' incessante azione demolitrice del mare. Questa azione però viene ritardata dalla circostanza che le assise della roccia stratificata presentano le loro testate press' a poco nella direzione dei flutti, i quali incessantemente muovono all'assalto. A breve distanza dalla costa, quasi a testimonio delle corrosioni operate in lontane epoche dal mare, sorgono a pochissima altezza sul livello delle onde quattro scogli, che vanno successivamente deprimendosi nella direzione opposta della terra, i quali però possono dirsi costituenti un solo scoglio. Questo punto va distinto con il nome di scoglio di S. Clemente, dove la tradizione locale accenna esservi sorta una chiesa consecrata a quel Santo Pontefice e martire. Il breve spazio occupato da quegli scogli o secche, o, a meglio dire, le anfratuosità, che quelli presentano, è il punto delle nostre spiagge che presentasi, quale oasi nel deserto, rivestito di bella vegetazione di alghe diverse, che possano interessare lo studioso. Là io ho passato più ore assorto nella contemplazione della infinita varietà di forma e vaghezza di tinta delle alghe, le quali vegetano rigogliose là dove continuo è il flagellare dei flutti. Di là ho riportato in più volte ciuffi di alghe diverse, le quali mi si mostravano esuberantemente rivestite da infinita congerie di Diatomee. Nè potevo io ingannarmi sul fatto della presenza di numerosissime Diatomee su quelle alghe, ad onta che il luogo non mi presentasse agio a potere ad ogni volta ricorrere al microscopio.

E qui mi sia permesso fermarmi alquanto a ricordare cosa, la quale può riescire vantaggiosa a conoscere a chiunque in simili circostanze intenda raccogliere Diatomee. Ho in diverse circostanze narrato, come la principale funzione di questi minimi esseri sia il decomporre l'acido carbonico sotto l' influenza della luce solare; perciò nell'assimilare il Carbonio che quelli fanno, mettono in libertà l'Ossigeno, del quale possono fare loro profitto gli animali per mantenere la respirazione. Tale azione vitale è compita dalle

Diatomee quasi incessantemente, per cui quei ciuffi di alghe, che in seno all'onda cerulea del mare vedonsi rivestite di graziose gallozzoline, le quali all'appressare della mano sfuggono e vanno a rompere alla superficie; siamo fatti certi da tale apparenza che fra i loro tenui filamenti si annidano miriadi di maravigliose Diatomee.

Guidato pertanto con tutta sicurezza da tale criterio mi rimaneva sempre l' imbarazzo della scelta, mentre ovunque mi volgevo specialmente in alcuni tranquilli recessi, che aprivansi fra quelle roccie, mi si presentava il lieto spettacolo di alghe di svariate forme e di colori smaglianti tutte rivestite da argentine o iridescenti bollicine di gaz, e all'appressarmi ovunque tutto attorno vedeva l'interminabile scoppiettio di quelle. La mia mente era assorta nel riflettere alla azione benefica, che a pro degli animali superiori la provvida Natura incessantemente esercita, adoprandovi le infinite miriadi degli umili ma stupendamente belli organismi del microcosmo, supplendo con il numero senza numero e alla importanza ed universalità dello scopo, e alla minima mole di ciascuno agente. Nell'imbarazzo della scelta io terminava per raccogliere poco meno che alla cieca alghe di diversa specie e da diverse posizioni per avere maggiore probabilità di incontrare varietà di specie.

Non intendo enumerare qui le forme diverse di Diatomee da me raccolte allo scoglio di S. Clemente, che troppo lunga cosa sarebbe, nè mette conto il volere dare la flora delle Diatomee di quel luogo, amando meglio per ora lasciar la cura di farne speciale oggetto di studio ad alcun naturalista micrografo che potesse sorgere in Ancona. Solamente voglio qui ricordare come nel Settembre del 1872 fra le tante Diatomee, che ne riportai, la mia attenzione fu richiamata dal singolare aspetto di talune tenuissime forme lineari, le quali vedevansi aderire l'una all'altra per mezzo di piccolo istmo o cuscinetto jalino per angoli alterni da formare delle serie disposte a zig zag. La disposizione era precisamente identica a quella del genere *Diatoma*, e si sarebbe potuto confondere con un *D. Yalinum Kz.* non scorgendovi in su le prime ombra di striazione. Ma non tardai guari a scoprire in quella problematica forma una singolarità tale da non trovare riscontro in alcuno dei generi conosciuti di Diatomee. Lungo un solo lato di quelle forme lineari ad estremità riquadrate, che non esitavasi a riconoscere come il fianco della cellula vedevasi al mezzo una figura di C, che non esisteva certamente nella parte opposta.

Una tale singolarità attirò tutta la mia attenzione, mentre quella forma non avrebbe trovato alcuna analogia con ciò che noi conosciamo fra i diversi

generi descritti di Diatomea, e quindi incontrastabilmente ne avrebbe determinato un nuovo genere. Però ad onta che mi sentissi intimamente persuaso che l'organismo il quale io avevo sottocchio era una Diatomea vera, e non appartenesse ad alcun altro genere di alga unicellulare, pure mi rimaneva l'accertarmi se le sue pareti fossero veramente silicee. E tali di fatti mi si mostrarono quando assoggettai il poco materiale, che conteneva quelle forme lineari a protratta azione degli acidi azotico e cloroidrico concentrati, l'azione dei quali veniva stimolata dalla ebullizione, e da replicate aggiunte di clorato di potassa soppesto, per aumentarne di tanto in tanto l'azione ossidante di quegli acidi. Al cessare di qualunque sviluppo di gaz, fatto certo che nulla più vi esisteva accessibile all' azione di quegli acidi dopo replicate lavande, che ne eliminassero ogni traccia di quelli o di sali, procedetti a montare le Diotomee così ottenute in preparazioni permanenti al balsamo di Canadà. Fra le molte e diverse Diatomee di generi e specie note non tardai a incontrare con la maggiore mia soddisfazione le valve lineari della nuova Diatomea qua e là disseminate e presentantisi ora di lato ed ora di fronte, nella quale ultima posizione d'aspetto ravvicinavasi grandemente alla valva di una *Grammatophora,* mentre vedevansi distinte nel centro da un piccolo anello rotondo, il quale però nella nostra forma, veduta di lato prende il profilo di un C.

La difficoltà di consultare tutte le diverse pubblicazioni su le Diatomee che videro la luce nelle diverse lingue, e che vanno sparse negli Atti delle varie Accademie e Società Scientifiche mi faceva dubbitare, che nel publicare la forma per me nuova con istituirne un nuovo genere e specie, non avessi da aumentare l'ingombro della già soverchia sinonimia, indicando con un nuovo nome un organismo, il quale per avventura fosse stato da altri scoperto e prima di me nominato e publicato. Tale giusto timore fece sì, che nel Luglio del 1873 portatomi a Vienna nell'interesse di visitare l' Esposizione Universale, ricorressi all'autorevole giudizio del distintissimo naturalista micrografo austriaco sig. Alberto Grunow, la squisita gentilezza del quale in altra volta io aveva sperimentata. A tale oggetto sottoposi al suo occhio sagace la Diatomea per me nuova, la quale esaminata da lui diligentemente fu parimente riconosciuta per una forma non prima da altri veduta, e mi esprimeva il desiderio di averne copia. Se non che io mi trovai dispiacente di non potere sul momento soddisfare alla sua domanda, mentre il rimanente della interessante raccolta disgraziatamente mi si era confusa nell'immenso numero di materiali che ho ordinato e raccolto da tutte le parti.

Però gli facevo promessa di portarmi di nuovo appositamente in Ancona, dove speravo fare di quella interessante alghetta nuova e più copiosa raccolta.

Non di rado accade al Botanico, che avendo per avventura incontrato in una delle sue erborizzazioni alcuna pianticella fanerogama o pure un musco o un lichene o altra delle tante piante crittogamiche, la quale nel susseguente esame riconosce costituire una rarità, ne registra la località, rimettendo ad altra occasione il procurarne esemplari. All'accedere che quegli fà in altro tempo alla nota contrada e alla precisa località, quanto di frequente avviene che contro la sua aspettazione le ricerche più diligenti non lo rendono possessore di un solo campione della pianticella desiderata. Il simile arrivò a me nel seguente anno, quando quasi negli stessi giorni portatomi espressamente in Ancona e su l'istesso scoglio di S. Clemente raccolsi copiosa messe di alghe infarcite di Diatomee, ma non fui fortunato di porre la mano su la forma desiderata. Così mi trovai nella dura necessità di rimettere ad altra occasione il far nuova ricerca di quella Diatomea, se pure la sorte propizia non fosse prima per favorirmi procurandomi quella curiosa forma da diversa provenienza.

Nè in questa volta la fortuna tardò lungamente ad arridermi. Nella trascorsa primavera il mio amico D. Matteo Lanzi cultore distinto degli studi crittogamici andato per pochi giorni a Napoli per giovarsi nella salute e per raccogliere in pari tempo alghe microscopiche marine per sottoporle ad esame, ne ebbe dal Ch. Professore Dorn un piccolo ammasso di alghe raccolte nei magnifici acquari della Stazione Zoologica di Napoli con tanto amore da lui fondata e diretta. Quelle alghe ricchissime in Diatomee il Lanzi con molta liberalità volle meco divise, ed io intendo in questa occasione rendergliene pubbliche grazie. La prima ispezione che intrapresi di quelle alghe (con quanta mia soddisfazione non occorre dirlo) mi presentò in sufficiente copia la Diatomea tanto desiderata, che sei anni prima io avevo incontrato in Ancona. Nè trascurai di profittare del momento per assicurarmi facendo all'istante diverse preparazioni di quella rara forma. Questa io volli fare con nuovo metodo, per il quale le Diatomee serbassero fedelmente la loro caratteristica disposizione, rimanendo ordinate in lunga serie a zig zag. Tale sistema di preparazione riesce opportunissimo specialmente quando trattasi di Diatomee o filamentose o disposte in serie, e in una parola in tutti quei casi nei quali la posizione dei frustuli può (come nel nostro caso) fornire un dato caratteristico. Lo stesso metodo vuolsi ado-

perare nel preparare raccolte di Diatomee pelagiche, delle quali molte non sono suscettibili per la loro squisita tenuità di essere assoggettate al brutale trattamento degli acidi, come per esempio alcune *Rhyzosolenie*, le *Eucampia* i *Chetoceros* e i *Bacteriastrum*.

In tutti questi casi si procuri avere le Diatomee isolate dalle alghe superiori, prendendo alquanto del liquido torbido, che ritrovasi in fondo al vaso, nel quale venne serbata l'alga, che videsi carica di frustuli diatomacei. Il lievissimo deposito venga replicatamente lavato con acqua distillata, la quale dopo la quiete di qualche ora verrà diligentemente decantata. Tale osservazione deve essere ripetuta più volte sin che sia dato ritenere che l'acqua rimanente su le Diatomee non tenga più in soluzione sali o altre simili sostanze, le quali nell'evaporare dell'acqua su la lastrella di vetro sottile abbiano da lasciare questa e le Diatomee, che vi si deposero, inquinate da incrostazioni. Allora sopra apposito piccolo tavolinetto metallico, il quale suole adoperarsi a montare le preparazioni e ad introdurre il balsamo o simile cemento resinoso con l'applicazione del calore, il quale balsamo serve a riunire il vetrino al portaoggetti; si collocano in serie altrettanti vetrini o coprioggetti, i quali devono essere diligentemente puliti. Sopra ciascun vetrino si versino alcune goccie del liquido, che tiene in sospensione le Diatomee, curando preventivamente di scuotere ad ogni tanto il tubetto nel quale furono poste in serbo. Al tavolinetto metallico si sottoponga una lampada a spirito regolata in modo da dare una piccolissima fiammellina cosicchè abbia da riscaldare lentissimamente i vetrini per evaporarne il liquido sopranatante. In seguito portato il vetrino con le Diatomee sovrapposte sopra piccola e sottile laminetta di platino, questa viene tenuta alla parte superiore di una buona fiamma a spirito, la quale l'abbracci e l'arroventi per modo da bruciare e incinerarne tutta la parte organica, la quale non sia silicea. Si protragga l'azione della fiamma sinchè ogni minima traccia di sostanze carbonose venga esportata in condizione di acido carbonico, ciò che sarà riconosciuto al graduale intero decoloramento di qualunque punto della lastrella di vetro. A tale momento giunti non rimane altro che agglutinare il vetrino su il portaoggetto con alquanto balsamo di Canadà, che con il mezzo del calore vi si introduce per capillarità, in modo che le Diatomee vi si trovano immedesimate e protette nello spessore della preparazione se pure non si reputasse più conveniente e opportuno l'applicare il vetrino rovesciato sopra un cerchio di molle cemento colorato, che a mezzo di apposito tornetto si sia formato sul portaoggetto, perchè le Dia-

tomee ne rimanessero custodite da qualunque azione esterna in seno a uno strato di aria e ad ogni ora pronte all' osservazione.

Alcune preparazioni al balsamo fatte per abbruciamento, nelle quali eravi un numero di frustuli della nuova Diatomea io volli portar meco a Londra nella scorsa estate. Colà ebbi il piacere di far presente di alcune di quelle a diversi distinti micrografi e diatomologi, pregandoli darmene il loro avviso; ma nessuno mi potè indicare a quale specie o anche pure a qual genere potesse appartenere, cosicchè quella forma, egualmente che a me, rimaneva nuova a tutti. Uno di quei signori spinse la sua gentilezza fin a ricercarne l'autorevolissimo giudizio del Ch. Micrografo americano il Professor Hamilton Smith, il quale confermò l'assoluta novità di questo delicatissimo organismo, del quale attendeva il nome che io con il diritto di scopritore gli avrei imposto. Ed ultimamente il gentilissimo mio intermediario mi scriveva da Londra che lo stesso Professore Smith desiderava avere da me il materiale racchiudente qnella forma per poterla pubblicare fra le sue preparazioni tipiche di Diatomee, quali esso con tanto utile della scienza va pubblicando, aggiungendomi contemporaneamente la notizia che alcuni esemplari della nuova Diatomea eransi ultimamente incontrati in una raccolta recente Americana di Barbados.

La principale e più cospicua caratteristica di questa nuova forma consiste in un loculo centrale o anello, del quale va distinta una delle due valve, che compongono il frustulo. Tale circostanza mi ha suggerito il nome, sotto il quale debba andare designato tal genere, che chiamerò *Cyclophora*. Quello che esprima tale anello io non lo saprei intendere: solamente io dirò sembrarmi costituito in un loculo o nicchia centrale, che sembra aprirsi all'esterno della valva. Una circostanza io ricorderò su la quale richiamò la mia attenzione da solerte osservatore quale è il Dott. Lanzi, che l'endocroma, il quale in piccole masse distinto vedesi occupare la cavità del frustulo, mai si vedeva dentro il suindicato loculo. Parmi dovere essere fuori di dubbio, che questa particolarità ognora costante serve a fare intendere, che quel loculo è chiuso all' interno, dove perciò viene a limitare la cavità frustulare. Nell'osservare attentamente i diversi frustuli mi apparve abbastanza evidente, che questa nuova Diatomea anche essa risulta formata da due valve distinte, le quali l'una all'altra si riuniscano per mezzo di due anelli abbracciantisi l'un l'altro, e che costituiscono la così detta *zona connettente*. Da questo ne consegue che le due valve devono differire nella grandezza fra loro, cosicchè l'una abbia l'asse longitudinale alquanto maggiore che

l'altra. E così realmente accade nella forma che andiamo esaminando, nella quale sinora non una sola volta m'è accaduto vedere che la valva munita di loculo centrale non sia precisamente la più piccola. Quindi è che mi apparve quasi certo, che la valva munita di loculo sia l'inferiore; quasi che quel loculo accennasse ad un centro di aderenza, per il quale nella prima volta si adattò ad un fulcro qualunque la forma archetipa o primigenia, dalla quale derivò per discendenza la serie che abbiamo sott'occhio.

Ecco intanto la definizione che credo dare di questo genere: *Cyclophora* n. g. *Frustula tabulata-rectangula; vel in fascias conjuncta, vel soluta, sed isthmo gelineo alternatim concatenata ; a fronte oblonga, linearia, vel parum inflata; valvis inaequalibus, quarum una anulo vel loculo centrali instructa. Individua vivunt in aqua marina.*

Questo nuovo genere apparterrebbe alle Achnanthee per la circostanza rimarchevolissima delle sue valve dissimili, mentre l'inferiore valva soltanto è distinta di un loculo centrale, come riscontrasi negli *Achnanthes*, negli *Achnanthidium*, nelle *Cymbosira*, e nelle *Cocconeis*. Ma differisce completamente da quella sezione, e da tutti i surriferiti generi per il modo nel quale si dispongono. Sotto tale riguardo la *Cyclòphora* dovrebbe enumerarsi secondo la classificazione dello Smith (*Synopsis of the British Diatomacee*) alla prima tribù delle Diatomee nude, e fra queste alla sottotribù quarta, la quale comprende le forme riunite in serie a zig zag. Però il nostro genere rimanendo marcatamente diviso dalle Achnanthee per il costante caratteristico sistema di disposizione, e dalla sezione comprendente i generi *Diatoma*, *Grammatophora*, *Tabellaria*, *Amphitetras*, *Biddulphia e Isthmia* per l'importante circostanza della dissomiglianza delle due valve, viene opportunamente a costituire un anello di congiunzione fra i due suaccennati gruppi.

Il genere *Cyclophora* per ora non comprende altra forma all'infuori di quella da me prima ritrovata in Ancona (anno 1873) e quindi riportatami nella scorsa Primavera da Napoli, che ora nomino *Cyclophora tenuis*, n. s. per l'estrema tenuità e trasparenza delle sue valve. Eccone la definizione

Cy. tenuis, n. s. *a latere oblongo-rectangula, medio tumidula; valvis a fronte lineari-inflatis, polis rotundatis; inferiori* (?) *valva loculo centrali rotundo instructa, in sectione subquadrato, interius patulo. Frustulorum longitudo* = $0,^{mm}$ 0455 – $0,^{mm}$ 0551; *latitudo* = $0,^{mm}$ 0048 – 0^{mm} 0133. *Habitat Anconæ ad scopulos Sancti Clementis, et Neapoli in aquariis.*

Sin dal primo momento che mi fui assicurato di aver sott'occhio le valve

silicee di una nuova Diatomea, mi adoperai con ogni studio a riconoscere se le sue valve andassero distinte da strie o da punti, come suole aversi generalmente in tutti gli altri generi o specie appartenenti a questa famiglia di vegetali. La più accurata correzione dell' immagine unita ai più poderosi ingrandimenti del Microscopio la diversa intensità di luce, la maggiore obliquità nella direzione dei raggi, tutto io adoperai ad ottenere l' intento. Fin ad oggi l'unico dettaglio, che ho potuto scoprire, sono alcune lievissime strie longitudinali nella superficie della doppia fascia o zona connettente, che riunisce le due valve, le quali strie longitudinali presentansi quasi minime pieghe di detta fascia. Quelle mi parvero reali strie o pieghe e rilievi positivi; e non credo poterle riguardare quasi illusive apparenze dovute all' interferenza dei raggi sul contorno delle valve e su il bordo estremo delle fascie stesse. Quindi è che anche per questa circostanza la nostra Diatomea differisce da quasi tutte le altre, le quali generalmente presentano la superficie delle loro valve striate o punteggiate, e poche sono quelle che contemporaneamente presentino dettagli nei lati ossia nella zona di unione. Così ritengo dovere io riescire giustificato innanzi alla scienza nell'indicare un nuovo genere e specie da aggiungere alla di già difficile e complicata nomenclatura delle Diatomee, avendo io preventivamente usato ognii dligenza a rendermi certo di non designare con nuovo nome un organismo di già conosciuto.

FULMINE A CIEL SERENO
CADUTO IN S. STEFANETTO PRESSO ALBA
NELL'ESTATE DEL 1877

NOTA

DEL PROF. MICHELE STEFANO DE ROSSI

I giornali di Piemonte nella estate del 1877 descrissero il singolare fenomeno d'una scarica elettrica senza temporale che fulminò parecchie persone raccolte a conversare sotto un albero. Il fatto avvenne in una proprietà di miei parenti, fra i quali pure furono alcuni dei fulminanti, che fortunatamente però ebbero salva la vita. Quindi è che mi è stato facile procurarmi notizia esatta dell'avvenuto fenomeno, il quale certamente merita di essere con ogni particolare registrato fra i fatti raccolti dalla scienza. E ciò non solo per ciò che riguarda gli strani effetti della fulminazione e lo strano modo di scorrere sulle persone la suddetta scarica, ma eziandio perchè le circostanze del singolare fenomeno mi porgono il destro di istituire alcuni confronti con un altro fenomeno da me esaminato ne nostri Atti del decorso anno, la supposta caduta cioè d'un aerolite nel Settembre 1875 nella città di Supino. (1)

Stimo opportuno cominciare dal riferire testualmente la lettera scrittami dal mio cognato Avv. Michele Boeri di Alba, che contiene la descrizione del fenomeno. A questo poi farò succedere le mie riflessioni.

Alba, 22 Gennaio 1878.

« So che tu avresti bisogno di avere precisi e dettagliati ragguagli sul fulmine caduto il 23 Agosto in S. Stefanetto. – Il fulmine cadde circa le ore 2 ½ pom. sopra un grande albero di ippocastano che sta presso la nostra casa di S. Stefanetto nell'altipiano di un colle piuttosto elevato. – Il temporale si trovava alla distanza di quattro o cinque chilometri, al

(1) V. Atti della P. Acc. di N. Lincei, Anno XXX sess. II.

di sopra di una catena di colli più elevata separata da quella di S. Stefanetto dalla profonda valle del torrente Tinello. Sopra di noi non vi era che un sottile velo di nubi grigie, senza alcuna di quelle agglomerazioni che nel nostro clima sono caratteristiche delle nubi temporalesche e senza alcuna minaccia locale di fulmine. Pochi minuti prima che cadesse il fulmine sopra di noi non si erano intesi che due o tre tuoni sordi lontani e prolungati. – Quando cadde sull'albero suddetto, sotto di esso si trovavano ricoverati un contadino cacciatore, il quale stava appoggiato col dorso all'albero fumando uno zigaro, mio padre che stava pure ritto discorrendo a due o tre passi di distanza, ed il domestico che stava coricato a maggior distanza del tronco dell'albero. – Il cacciatore fu colpito dal fulmine, che gli ruppe l'abito id fustagno sul dorso, e nel punto di contatto col tronco dell'albero, gli frantumò il porta sigari che teneva in bocca e la catena d'acciajo dell'orologio, gli sconnesse tutta la cucitura dei calzoni, gli arse tutti i peli del corpo ed uscì pel tallone di una scarpa facedovi una grossa rottura. – Le conseguenze ne furono l'asfissia temporanea, la rigidità delle gambe per tre o quattro giorni e l'impotenzadi orinare, per cui gli si dovettero levare dal medico le orine artificialmente, incommodi però che col tempo tutti scomparvero, meno un po' di rigidità ad una gamba che sembra voglia essere permanente. Mio padre fu pure colpito ad una spalla da una parte della corrente elettrica, che pare siasi staccata dal tronco dell'albero per un forte gruppo incontratovi. – Le conseguenze ne furono l'asfissia, e quindi dolori acutissimi alle spalle ed a tutte le giunture del braccio e della mano offesa; la quale aveva il segno come di una contusione, i quali dolori diminuirono però in pochi giorni di intensità e scomparvero quasi totalmente dopo un pajo di mesi. – Il domestico non fu tocco propriamente ma sofferse per parecchi giorni dolori e rigidità a tutte le membra per effetto credo della forte scossa ricevuta.

Tanto il detto cacciatore che mio padre tenevano indosso la scatola della polvere, la quale però per singolare fortuna non esplose, chè altrimenti ne sarebbero stati malconci.

Così tenui effetti in confronto della potenza terribile del fulmine io non so spiegarli altrimenti, se non che la corrente elettrica fosse sottilissima, perchè i guasti dell'albero non furono molto grandi; che la massa principale ne abbia percorso il tronco, e quella parte che toccò il cacciatore abbia percorso quasi del tutto i suoi abiti sfiorandogli interamente la pelle. Questa è la descrizione del fenomeno sul lato fisico; dal lato morale fu per

me talmente orribile, che ancora adesso al ricordarlo mi mette i brividi addosso. – Io mi trovava ad una cinquantina di passi di distanza dall'albero fatale colle spalle rivolte al medesimo, e stava osservando tranquillamente l'andamento del temporale, colla speranza che ei volesse portare un po' di pioggia che era tanto sospirata per la lunga siccità che affligeva i nostri colli. – Tutto ad un tratto sento dietro di me uno scroscio simile a quello di un razzo, e quindi una detonazione come di un cannone che avesse portati cento chilogrammi di polvere di carica. – A quel tuono credetti che fosse stata colpita la casa ove aveva lasciata mia moglie colla bambina. Guardo i tetti ed i comignoli, ma non vi scopro alcun guasto. – Allora, mi rivolgo all'albero, e ne veggo le traccie sul tronco; non vedo più alcuno e non sento più nemmeno un lamento. Avendo lasciato sotto quell'albero un momento prima mio padre e mio figlio, sento l'orribile, l'indicibile spavento che amendue sieno morti. Mi avanzo, e per fortuna veggo tosto mio figlio alzarsi da terra sul prato alla distanza di una ventina di passi dall'albero, e venire verso di me. – Il poveretto se ne era provvidenzialmente scostato un attimo prima per andar dietro ad un uccelletto che aveva veduto posarsi sul prato. – M'accosto all'albero, e mi si presenta un quadro dei più spaventosi. – Mio padre ed il cacciatore, erano rigidi e duri come due pezzi di legno, e solo il domestico cominciava ad emettere qualche penoso lamento. – Nella caduta mio padre aveva riportata una ferita alla fronte, che dava sangue. Alla vista di quella ferita entrò in me la convinzione la più assoluta che fosse stato colpito dal fulmine al cervello, e che fosse morto. – Non te ne dico più altre perchè troppo ancora ne soffro al rammentarlo. – Come Dio volle dopo un quarto d'ora tanto mio padre che il cacciatore cominciavano a dar segni di vita, ma ci vollero altre due ore prima che riacquistassero la piena conoscenza di loro medesimi. Per caso più strano ancora in quel giorno tutti i contadini nostri si erano recati a raccogliere il fieno in prati lontani, e così ci trovammo soli, io, mia moglie, e due contadine, per soccorrere tre asfissiati ed irrigiditi. Dovemmo gridare al soccorso ed aspettare che arrivassero alcuni contadini dal vicinato per poter trasportare in letto i feriti. – Dopo due giorni io dovetti mettermi a letto con grandi dolori al capo e dissesti gastrici, e durai a ristabilirmi più d'un mese, stando ora alzato, ma sempre male. – Mio figlio dopo due o tre giorni cadde pure ammalato e stette oltre venti giorni a letto colla febbre.... »

Avv. Michele Boeri.

Lasciando da parte ogni considerazione sugli strani effetti della fulminazione e sulle vie percorse dalla scarica nello investire gli uomini, mi fermo ad esaminare il fatto dell'essere avvenuta la scarica elettrica fuori dell'area, sulla quale sovrastava il temporale. La presenza del temporale in regione non lontana addita abbastanza esser stato questo la causa della caduta del fulmine; oltre a ciò la posizione dell'albero fulminato e ciò che videro le signore di casa dalla prossima casina, cioè la trave di fuoco proveniente dalla regione invasa dal temporale ne mette fuori di dubbio il punto di partenza essere stato le nubi della tempesta. Ora io osservo che nella caduta di pietre avvenuta a Supino dopo, esaminati tutti i dati, conclusi che dovea riconoscersi essere stata l'effetto d'un vero fulmine, quantunque non vi fosse temporale su questa città. Notai però che il temporale esisteva appunto ad una distanza simile alla verificatasi nel caso di S. Stefanetto, perchè esso imperversava sopra la città di Ferentino. Fra questa città ed il paese di Supino è interposta la vasta valle del Sacco, la quale dà alla regione un aspetto orografico identico a quello della regione piemontese di cui ora trattiamo.

Tale somiglianza di condizioni orografiche mi fa vedere la quasi certezza che il fulmine di Supino potè anche esso provenire dal temporale di Ferentino, distaccandosi da un lembo estremo e superiore della nube temporalesca che avvicinavasi alla regione di Supino; e quivi poi veniva attratta la scarica dall'acuta punta del monte di Supino stesso. Nel medesimo modo dovette funzionare il grosso albero della collina di S. Stefanetto. Le interposte valli poi in ambedue i casi concorsero, io credo, ad accrescere la forza attrattiva dei colli verso la scarica elettrica. Infatti questa forma orografica può a mio credere produrre il caso che la superficie del suolo della valle, quantunque sottoposta al temporale vi si trovi però in linea retta più lontana di quello che le cime dei monti verso l'estremità finali delle nubi temporalesche. E poichè ho molte volte osservato nei temporali che la maggior parte delle scariche elettriche avviene presso i lembi estremi della nube temporalesca, dove sembrami naturale che si accumuli la elettricità da scaricarsi; si vede anche in ciò una ragione per la quale avvenne nei due casi di S. Stefanetto e di Supino lo stacco d'uno dei fulmini apparentemente lontano dalla regione tempestata. Sembrami adunque che nel paragone dei due fenomeni ora esaminati si trovi la scientifica determinazione d'un caso speciale e di una condizione speciale per la caduta dei fulmini influenzata dalla orografia terrestre, che non è certo senza im-

portanza per gli studii dei meteorologisti. Se avessi agio e se ciò fosse nel campo de' miei studi speciali, non mi sarebbe difficile di trovare nella statistica dei casi già noti dei fulmini così detti a ciel sereno, molti altri casi analoghi da paragonare ai due presenti. Potrebbesi allora svolgere ogni particolarità e dedurre i corollari dell'accennato punto di vista orografico meteorologico. Ma mentre ciò sarà fatto per cura dei meteorologisti, io son pago d'aver trovato nel fenomeno di S. Stefanetto un caso tanto analogo a quello di Supino, che fa scomparire l'apparente singolarità di questo e giova a confermare il giudizio dato da me su quella falsa caduta d'aerolite, la quale dissi esser stata soltanto un trasporto di sassi già altre volte verificatosi sulle ali del fulmine. Mancava però il temporale sopra Supino, che apparisse causa immediata della scarica elettrica. Siffatta causa io travidi nel non lontano temporale di Ferentino; ed ecco che quanto ciò dovesse esser vero ce lo pone sotto gli occhi ad evidenza il fulmine certo di S. Stefanetto proveniente indubitatamente dall'opposto rilievo d'una grande vallata.

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI MICROSISMICHE FATTE NEL COLLEGIO ALLA QUERCE DI FIRENZE, E DELLE PRINCIPALI RIFLESSIONI TEORICO-SPERIMENTALI DEDOTTE DALLE MEDESIME

PARTE III. (1)

RAPPORTI FRA I MOTI MICROSISMICI DI FIRENZE E L'AZIONE LUNISOLARE DELLE MAREE. — DISCUSSIONE SULLE RELAZIONI FRA I MOTI SUDDETTI E LE VARIAZIONI BAROMETRICHE DAL DICEMBRE 1873 IN POI.

Nella parte precedente di questa Memoria aveva accennato ad alcuni punti importantissimi della discussione dei moti microsismici, cioè: 1° alla ricerca delle influenze lunisolari nei moti suddetti; 2° allo studio delle relazioni fra i moti stessi e le variazioni di pressione barometrica: egli è pertanto a questa duplice trattazione che è rivolta ora questa Terza Parte; la quale però riuscendo già per se stessa abbastanza prolissa, mi obbliga a rimandare ancora ad una Quarta Parte per lo meno, a guisa di Appendice, tuttociò che mi rimarrebbe ancora a dire sull' argomento dei moti microsismici. Quanto alla prima discussione sopra detta, dalla quale esordisco questa Parte Terza, sono stato ben fortunato di potermi valere con assai vantaggio dell'opera paziente, ed ingegnosa dell' egregio giovane Sig. Giulio Grablovitz di Trieste, il quale già conosciuto presso gli scienziati per altri importantissimi lavori di Fisica Terrestre, e che hanno strettissima connessione cogli studi miei, si è offerto volonteroso a coadiuvarmi in questa ricerca, della parte cioè che può attribuirsi all'azione lunisolare nei moti tromometrici. — Intorno a questo argomento io non potei occuparmi di proposito in passato, ma considerando solo in generale ed isolatamente i rapporti dei singoli moti tromometrici osservati colle posizioni lunari, fui condotto ad accennare semplicemente alcune impressioni che intanto mi erano occorse alla mente su tale riguardo; e furono le seguenti osservazioni che trovansi nel paragrafo IV della Parte I. « Niuna certa e costante relazione in ordine di tempo, io « trovo colla maggior o minor copia delle macchie o eruzioni solari, coi bolidi

(1) Questa parte fu presentata dall'autore nella sessione VII dell'anno XXX; e come si disse nel relativo fascicolo, se ne è dovuta trasferire in questo la pubblicazione.

« o colle pioggie di stelle cadenti, cogli eclissi solari e lunari, *colle fasi della* « *luna e colle maree*. Intendo però sempre di affermare che la relazione « che io non trovo è quella isolata, diretta e paragonabile a quella che in- « vece osservo nel Barometro. Del resto io pure ritengo come causa più « remota, ma molto probabile, *anche l'azione lunisolare* nei moti micro- « sismici per la stessa ragione che essa agisce così energicamente, come si « sa, nella produzione delle maree dei grandi oceani, mentre è assai piccola « o insensibile nei mediterranei e nei laghi. »

Intorno a questi concetti io rimetto al lettore il giudizio quando avrà naturalmente osservato l'analisi minuta e coscienziosa che ne fa il Sig. Grablovitz nella sua Memoria che qui soggiungo, ed inoltre alcune riflessioni fatte con molta maturità ed acume dall'egregio mio confratello P. Camillo Melzi Professore di Matematica in questo Collegio, e mio coadiutore. In questo lavoro il P. Melzi facendo passaggio dalla 1ª alla 2ª trattazione di questa Parte III, sviluppa le conseguenze dei risultati del calcolo in relazione ai moti microsismici, ed alla coincidenza dei medesimi colle pressioni barometriche, e confronta i medesimi risultati con quelli trovati per i terremoti rispetto all'azione lunisolare.

A conferma poi delle sue deduzioni egli porge da ultimo un esame particolareggiato dei movimenti barometrici e microsismici osservati negli anni 1874, 1875, 1876 e 1877.

CAPO I°

Rapporti fra i moti microsismici e l'azione lunisolare delle maree. Lettera del Sig. Giulio Grablovitz.

Pregiatissimo Signor Professore

Secondo la mia promessa, eccomi ad esporle i risultati dei calcoli da me applicati alle osservazioni dei moti microsismici allo scopo d'ottenere empiricamente gli effetti dell'attrazione lunare, ma anzitutto debbo renderle infinite grazie dei dati gentilmente favoritimi in quella ricca serie d'osservazioni, ch'Ella raccolse con impareggiabile assiduità dal 1872 in poi, e mi reputerò oltremodo fortunato se le riflessioni, che sono per esporle, aggiungeranno un nuovo titolo (se pure n'è duopo) a prova dell' immensa utilità che si racchiude nello studio dei moti microsismici.

Allorchè progettai una *nuova teoria sismica delle maree* nell'opuscolo con questo titolo, ch'Ella conosce e che si trova allo studio presso l' Istituto

veneto di Scienze, lettere ed arti, insieme ad un appendice che mi parve opportuno d'aggiungere per riempire molte lacune dapprima inavvertite, mi fu mossa obbiezione sul rapporto dei moti microsismici coi movimenti lunari; l'obbiezione era giustissima in risposta alla mia ipotesi che riguarda la crosta terrestre come una materia elastica in grado non uniforme, vale a dire più elastica nei punti in cui il suo spessore è minimo ossia nei centri vulcanici. Ammessa questa ipotesi, poichè un'elasticità è pur d'uopo assegnare alla crosta terrestre, fosse questa pur composta di puro diamante, l'attrazione degli astri deve agire sopra quelle plaghe come sulle acque: questa teoria, lungi dall'abbattere le teorie dei sommi scienziati, di che mi fu mossa accusa, è invece l'applicazione delle stesse teorie a materie finora considerate inflessibili ed al contrario obbedienti alla attrazione luni-solare come le acque.

Peraltro in contraddizione all'obbiezione che negava il rapporto seleno-microsismico, mi giungeva in pari tempo da parte del ch.^{mo} prof. cav. De Rossi la comunicazione che i moti microsismici furono talvolta trovati in relazione coi movimenti lunari. — Ella stessa poi mi disse che il ch.^{mo} prof. Don I. Galli s'era occupato di tale questione, per cui m'affrettai a scrivere al primo, per avere spiegazioni sull'argomento; in seguito a ciò ricevetti direttamente dal prof. Galli una gentilissima lettera, in cui mi comunicò d'avere osservato che nell'ora in cui il sole o la luna passavano sul meridiano, il valore angolare della oscillazione cresceva d'ordinario sensibilmente nel pendolo tromometrico e ciò anche nei giorni di calma perfetta; un fatto di grande importanza fu da lui osservato all'epoca del novilunio del 27 Decembre 1875, giacchè precisamente al 27 il pendolo cominciò ad oscillare con grande energia e seguitò ad essere agitato fino alle ore antimeridiane del 29, ma l'oscillazione del 27 fu la più estesa, ed in qualche momento il suo valore angolare giunse quasi ad un minuto (55″. 30); questo fatto era significante, massime perchè preceduto da piccole scosse sussultorie e perchè il movimento oscillatorio era maggiore nel giorno che nella notte. Il ch.^{mo} professore soggiunge che le burrasche invernali gl'impedirono di continuare le osservazioni sotto il medesimo aspetto, giacchè esse costituiscono un elemento di grande disturbo nei moti microsismici.

Lieto di vedere divisa da altri la mia opinione riguardo le relazioni seleno-microsismiche, e d'essere anzi stato preceduto nella medesima, continuai con febbrile impazienza i conteggi già incamminati con la piena sicurezza di poter dimostrare con la materiale verità delle cifre un'ipotesi molte volte accampata, ma ognora messa in dubbio dalla generalità.

Ecco pertanto il metodo da me seguito nel calcolo :

Calcolate le medie dei moti microsismici diurni in centesimi di *linea* del micrometro, aggruppo in una colonna tutti i dati che si riferiscono a giorni di novilunio ; dispongo poscia nella tabella stessa quelli dei sette giorni precedenti in altrettante colonne a sinistra, quelli dei sette giorni seguenti a destra e così procedo per l'epoca del plenilunio e pei rispettivi sette giorni precedenti e seguenti, ottenendo in tutto 30 gruppi, che si adattano ai 30 giorni (eliminata la frazione residua di g. 29. 53) d'una lunazione completa ; peraltro non essendo sempre uguale la durata di mezza lunazione fra novilunio e plenilunio o viceversa , rimangono talvolta lacune alle quadrature, tal altra v' è esuberanza di dati, ma a ciò provvedo mediante l'interpolazione di valori medi proporzionali nel primo caso e , nel secondo, mediante l'aggruppamento dei valori esuberanti in un solo valore medio. Le medie microsismiche diurne impiegate nel calcolo vanno dal 1.° Ottobre 1872 al 16 Ottobre 1876 e costituiscono una serie di 50 lunazioni complete ; in questo periodo le rivoluzioni anomalistiche si alternano non una volta, il che sarebbe già sufficiente, ma ben quattro volte e così pure succede delle rivoluzioni sideree, a cui è collegata quasi intieramente la posizione della luna rispetto all'equatore terrestre ; anche la curva annua dei moti microsismici si ripete quattro volte ; per cui per l'alternarsi successivo di tutti gli effetti periodici, le alterazioni che ne dipendono si compensano esattamente ; rimarrebbe a tener conto delle cause perturbatrici accidentali e fra queste primeggia la pressione atmosferica, ma quattro anni d'osservazioni, mi sembrano sufficienti a compensare gli effetti , siccome bastano a determinare con la massima esattezza le minime variazioni diurne. Altrettanto dovrebbe dirsi per le altre cause accidentali, qualunque fosse la loro natura ; ciononpertanto a tutela di maggior esattezza applico una correzione a gruppi di tre valori, per conguagliare gli errori al massimo possibile. — Dalle somme delle 30 colonne ottengo i valori che figurano nella colonna *a* della tavola seguente ; la colonna *b* contiene le medie di tre giorni consecutivi ; la colonna *c* dà per ciascuna giornata la media di tre dati consecutivi della colonna *b* allo scopo d'arrotondare viemmeglio la curva ; nella colonna *d* figurano le somme e nella colonna *e* le differenze dei valori diametralmente opposti, cioè plenilunio e novilunio, primo ed ultimo quarto.

Ecco la tavola :

a	b	c		a	b	c		d		e
Ultimo quarto				Primo quarto						
3436	3435	3393		3158	3359	3352	Quadrature	6745	● + ○ −	41*
3530	3442	3442		3707	3338	3393		6835	»	49*
3361	3448	3386		3148	3484	3488		6874	● − ○ +	102
3453	3269	3299		3596	3642	3701		7000	»	402
2993	3181	3165		4182	3978	3893		7058	»	728
3098	3045	3098		4155	4058	3963	+	7061	»	865
3043	3068	3084		3837	3853	3887		6971	»	803
● 3063	3139	3107	○	3568	3749	3704	Sizigie	6811	»	597
3310	3114	3109		3842	3510	3558		6667	»	449
2969	3074	3090		3120	3415	3369		6459	»	279
2943	3082	3089		3284	3182	3321	−	6410	»	232
3335	3112	3187		3142	3366	3287		6474	»	100
3058	3366	3268		3671	3314	3353		6621	»	85
3706	3325	3350		3129	3379	3331		6881	● + ○ −	19*
3211	3358	3347		3338	3301	3372	Quadrature	6719	● − ○ +	25*
Primo quarto				Ultimo quarto			Media =	6759		

Il risultato si è che la curva *d* raggiunge il massimo due o tre giorni prima delle sizigie ed il minimo tre giorni dopo le medesime ; la colonna *e* che rappresenta l'ineguaglianza fra le fasi opposte dimostra che la massima ineguaglianza ha luogo alla vigilia delle sizigie , mentre alle quadrature è nulla pel corso di quattro giorni, potendosi riguardare nulli i valori segnati con asterisco.

Le cifre sottolineate nella colonna *b* rappresentano i massimi e minimi, che divisi per 50, numero delle osservazioni, offrono i seguenti valori lineari :

Novilunio – primo quarto	0. 61	minimo	Δ 0. 20
Primo quarto – plenilunio	0. 81	massimo	0. 17
Plenilunio – ultimo quarto	0. 64	minimo	0. 05
Ultimo quarto – novilunio	0. 69	massimo	0. 08
e quelle della colonna *d* :			
Sizigie – quadrature	0. 64	minimo	Δ 0. 07
Quadrature – sizigie	0. 71	massimo	

Limitando il calcolo a due sole annate per volta, si ottengono risultati senza dubbio più imperfetti, ma in massima uguali, perchè i massimi ed i minimi conservano il loro posto.

Lo stesso metodo applicato alla distanza della luna dalla terra ed alla posizione della luna rispetto all'equatore, mi fornisce risultati ben pronunciati. Prima di esporli è peraltro duopo fare alcune considerazioni sull'alternarsi di questi due agenti; il primo segue il periodo della rivoluzione anomalistica (27 g. 13^h 19'), il secondo quello della rivoluzione siderea (27 g. 7^h 43'); conviene perciò che si compia un'intera rivoluzione degli absidi (3232 giorni) perchè tutte le posizioni lunari dell'uno s'alternino con quelle dell'altro e le osservazioni finora eseguite si riducono a sole quattro annate, in luogo di nove come sarebbe necessario. V'ha peraltro una circostanza che permette di scindere gli effetti in modo da formarsene un concetto sufficientemente approssimato al vero ed eccomi ad esporla. La luna nella sua rivoluzione siderea traversa *due* volte il piano dell'equatore e raggiunge *due* volte le sue massime declinazioni o lunistizi (boreale ed australe). Secondo le leggi generali delle maree, essa esercita la massima attrazione quando attraversa l'equatore terrestre (nodo ascendente e discendente) e la minima attrazione, allorchè tocca i lunistizi; si hanno perciò alternativamente due massimi e due minimi in una rivoluzione siderea. Nella rivoluzione anomalistica invece non v'ha che un massimo ed un minimo, i quali si riferiscono rispettivamente al perigeo ed all'apogeo. Ne deriva che mentre gli effetti del periodo sidereo debbono riprodursi con sensibile somiglianza dopo mezza rivoluzione (14 giorni incirca) gli effetti del periodo anomalistico nello stesso intervallo di 14 giorni saranno affatto contrapposti. Sommando perciò i valori ottenuti pei 14 giorni che corrono dal lunistizio boreale all'australe con quelli dei rimanenti 14 giorni rispettivamente opposti si otterrà l'effetto medio degli effetti che ne dipendono e si elimineranno completamente le perturbazioni dipendenti dall'altra causa. Al contrario, sottraendo i valori ottenuti pei 14 giorni di parallasse inferiore alla media dai rimanenti 14 di parallasse superiore alla media, si elimineranno gli effetti dell'altra causa *quasi* intieramente ed emergeranno quelli delle parallassi. Dico *quasi* intieramente, perchè potrebbe esserci fra i due lunistizi o fra i due nodi di segno contrario un'ineguaglianza simile a quella rintracciata nelle fasi lunari, la quale in soli quattro anni non giungerebbe ad eliminarsi, ed altererebbe, benchè di poco, la curva delle parallassi.

Ecco pertanto l'esito del calcolo operato sulla base accennata:

	Perigeo a	b	c		Apogeo a	b	c	Differenze P	A	
P	2976	3651	3600	A	3187	3346	3339	+	−	261
	3675	3438	3587		3298	3230	3305	+	−	282
	3663	3673	3563		3204	3339	3340	+	−	223
	3680	3578	3616		3515	3452	3518	+	−	96
	3392	3598	3515		3638	3762	3736	−	+	221
	3721	3369	3448		4133	3992	3937	−	+	489
	2993	3378	3304		4206	4056	3991	−	+	687
	3419	3165	3255		3829	3926	3878	−	+	623
	3084	3221	3239		3743	3651	3727	−	+	488
	3159	3331	3366		3380	3603	3609	−	+	243
	3750	3547	3522		3686	3573	3636	−	+	114
	3731	3688	3619		3652	3732	3747	−	+	128
	3582	3622	3583		3857	3937	3794	−	+	211
	3553	3441	3470		4303	3712	3767	−	+	297

Media 3572 divisa per 53 periodi = 0.674

	Lunistizio boreale a	b	c		Lunistizio australe a	b	c	Somme	I II Ineguaglianze	
	3245	3261	3367		3682	3529	3604	6971	− +	237
	3114	3570	3559		3253	3670	3676	7235	− +	117
	4351	3846	3859		4074	3828	3827	7686	+ −	32
	4074	4160	4037		4156	3983	3929	7966 +	+ −	108
	4055	4105	4049		3718	3978	3907	7956	+ −	142
	4187	3881	3878		4059	3761	3895	7773	− +	17
Nodo discend.e	3401	3648	3666	Nodo ascend.	3506	3947	3861	7527	− +	195
	3355	3469	3563		4276	3876	3899	7462	− +	336
	3651	3571	3514		3847	3872	3760	7274	− +	246
	3708	3503	3501		3494	3532	3587	7088	− +	86
	3150	3428	3439		3256	3355	3375	6805	+ −	55
	3427	3360	3439		3315	3238	3296	6735 −	+ −	143
	3503	3527	3500		3143	3294	3267	6767	+ −	233
	3653	3613	3556		3423	3270	3275	6831	+ −	281
	Lunistizio australe				Lunistizio boreale			Media 7291 : 108 = 0.675		

La curva delle parallassi presenta un massimo principale 6 o 7 giorni dopo l'apogeo ed un massimo secondario al perigeo; i minimi cadono necessariamente nelle epoche esattamente contrapposte.

È significante il massimo secondario e di conseguenza il minimo ad esso opposto, giacchè lo stesso si osserva nella curva delle fasi lunari, vale a dire un massimo secondario alle sizigie ed un minimo secondario alle quadrature; questo fatto si osserva chiaramente nelle colonne *a* e *b*, mentre dalla colonna *c* in causa dell'arrotondamento dipendente dalla ricorrezione non apparisce che un lieve rallentamento nell'ascensione e nella discesa della curva, meglio pronunciato alle quadrature che alle sizigie. – La differenza fra massimo e minimo nella curva delle parallassi ascende a 687, numero che diviso per quello dei periodi dà in valore lineare 0,13; ossia $^1/_5$ dell' oscillazione media (0. 67).

La curva dei lunistizi presenta il massimo tre giorni prima dei nodi, il minimo altrettanti avanti i lunistizi; nelle differenze si scorgono ineguaglianze che forse spariranno e forse riusciranno più regolari e pronunciate alla fine del ciclo di nove anni. È rimarchevole nella colonna *a*, che contiene i dati non corretti, il repentino aumento che si riscontra 4 giorni prima dei nodi: è pure degno d'attenzione il minimo secondario che si osserva nella colonna *b* ai lunistizi, nonchè il massimo secondario subito dopo i nodi, circostanza che rassomiglia a quella che si trova nelle fasi e nelle parallassi. Il massimo che ha luogo prima dei nodi (7966) diviso pel numero dei periodi (108) dà 0. 74

ed il minimo (6735) avanti i lunistizi dà 0. 62

$\Delta = 0.\ 12$ ossia circa 1/6 del valore medio.

Le differenze fra massimo e minimo così calcolate sono minori del vero perchè nel fare la prima correzione si ottiene una curva, il cui massimo è la media di *tre* massimi della curva reale; altrettanto si dica dei minimi; lo stesso accade poi nella ricorrezione. – Estraendo tutti quei valori che secondo la curva corretta sono superiori od inferiori alla media e confrontando le differenze della curva primitiva (*a*) della media con quelle della curva corretta (*c*), trovai che conviene moltiplicare per 1. 10 le differenze fra gli estremi per la curva delle parallassi, per 1. 24 quelle delle fasi e per 1. 34 quelle dei lunistizi, allo scopo d' ottenere valori più prossimi al vero.

Riepilogando, trovo che i massimi principali cadono prossimamente nel mezzo dei periodi che separano le quadrature dalle sizigie, l'apogeo dal perigeo, i lunistizi dai nodi ed i minimi nel mezzo dei periodi opposti; i massimi secondari (molto meno pronunciati) hanno luogo alle sizigie, al perigeo ed ai nodi ed i minimi secondari alle quadrature, all'apogeo ed ai lunistizi. – I massimi e minimi secondari coincidono dunque coi massimi e minimi valori dell'attrazione lunare secondo le leggi delle maree; mentre i massimi e minimi principali hanno luogo quando l'attrazione medesima aumenta e rispettivamente scema con grande rapiditá; in altri termini coincidono coi massimi e minimi delle prime differenze dei valori delle maree.

Che questi risultati non sieno casuali sarebbe provato dall'analogia ch'essi presentano sotto tre punti di vista affatto diversi, se pure a provar ciò non bastassero le esperienze fatte su periodi staccati di due anni ed anche d'un anno soltanto, nel qual ultimo caso è duopo far le medie su gruppi di 7 giorni almeno, anzichè di 3.

Nel procedere ai conteggi l'esperienza m'insegnò che i moti microsismici aumentano in ragione del quadrato della forza che li produce; ciò scopersi nel disporre nei miei quadri i dati dei moti microsismici in ordine aritmetico e secondo le fasi lunari; avvertii p. es. che i valori medi dei giorni di plenilunio del 1874 in ordine aritmetico presentavano la seguente serie (in decimi di linea): 16, 18, 23, 25, 33, 43, 53, 53, 56, 159, 202, di cui il valore medio (58) sta incirca 4 volte nel massimo; estesi la prova a tutto il 1874 e giunsi alla stessa conclusione; di questa circostanza non è d'uopo tener conto quando si trattano numerose osservazioni, ma per calcoli, come quelli che esporrò più oltre, è necessario prenderla in considerazione e giovarsi anzichè dei dati vergini, delle relative radici.

Prima di passare all'esposizione dei calcoli che si riferiscono all'azione diurna lunare, debbo far cenno del punto di vista, da cui mossi nello studiare l'argomento.

Ho detto in esordio alla presente che le maree debbono risentire un'influenza più o meno grande per l'oscillazione semidiurna del suolo; prescindendo pure dal fatto che un pozzo alla Porretta, il livello del quale viene misurato giornalmente, presenta analoghe oscillazioni (come ne scrissi al ch. prof. cav. De Rossi, facendogliene la dimostrazione) benchè l'altezza a cui si trova (200 metri sopra il livello del mare) escluda ogni possibilità dell'influenza mareosa, fui condotto da parecchie altre prove a riguardare il fenomeno delle maree nell'Adriatico quale effetto della sup-

posta oscillazione semidiurna del suolo; secondo questa mia ipotesi una plaga elastica avente per centro la regione vulcanica siculo-jonia s'innalzerebbe e s'abbasserebbe due volte al giorno secondo le leggi delle maree e trarrebbe seco nel suo movimento una vasta zona che dalla parte nostra si estenderebbe a tutta la catena degli Appennini, vale a dire a tutta l'Italia; quest'opinione m'è confermata dalla direzione delle scosse di terremoto, dalla maggior frequenza di questi lungo le catene montuose, che oppongono maggior resistenza all'elasticità del suolo, vale a dire che hanno l'asse diretto verso la Sicilia, dalla vulcanicità del suolo presso l'imbocco dell'Adriatico e dalla coincidenza dei terremoti con certe posizioni luni-solari e d'altra parte dalle particolarità del fenomeno delle maree, che si propagano precisamente da quel punto in tutte le direzioni e sono perciò più forti nell'Adriatico e nella Sirti minore, mentre nel resto del Mediterraneo, ove in ragione del volume d'acqua dovrebbero essere assai più forti, sono invece debolissime e passano quasi inavvertite.

Sotto tale aspetto è da prevedersi che i moti pendolari del tromometro saranno più sensibili, allorchè il movimento oscillatorio del suolo sarà più rapido; saranno meno sensibili, allorchè il suolo sarà stazionario; quest'ultimo caso avviene all'istante del passaggio della luna pel meridiano (massima altezza) o per l'orizzonte (massima depressione); di conseguenza il primo avverrà presso a poco nei tempi intermedi, cioè quando l'angolo orario della luna rispetto ad uno dei due meridiani è $= \pm 45°$, il che ha luogo a $3^h\ 6'$ – $9^h\ 19'$ – $15^h\ 31'$ – $21^h\ 44'$ di tempo solare dopo il passaggio al meridiano superiore.

Il calcolo prova esattamente la verità di questa considerazione. – Nell'operare i conteggi mi sono servito dei massimi diurni osservati nel periodo estivo, preferendo questo all'invernale, come meno soggetto ad alterazioni provenienti da altre cause; per ottenere un risultato conviene studiare in quali ore lunari avvenga più spesso il massimo diurno ed a quali ore lunari appartengano altresì i massimi più importanti; ciò si ottiene sommando semplicemente i dati rinvenuti per ciascuna ora lunare, senza dividerli pel numero delle osservazioni; in tal modo, dove la maggior frequenza si accoppia alla maggiore intensità, emergono valori massimi ed il contrario ha luogo nei casi opposti. Poichè peraltro una giornata lunare è di $24^h\ 50'$, conviene eliminare in qualche modo la frazione di $12'$, il che si ottiene ingrandendo nel rapporto di 50 a 60 i dati dell'ultima ora lunare o meglio i dati spettanti al periodo che s'estende da 24^h a $24^h\ 50'$, in modo da supporre di 25^h la durata d'una giornata lunare. I dati così disposti si

riferiscono ciascuno ad un'ora differente, cioè il primo contiene i moti avvenuti fra il passaggio al meridiano ed 1 ora dopo, il secondo quelli da 1 a 2 ore e così avanti, per cui corrispondono rispettivamente in termine medio a 0^h 30′, 1^h 30′, 2^h 30′ ecc. – Le somme delle radici dei moti massimi estratti dalle tabelle dal 1° Marzo 1873 al 31 Agosto 1873 e per lo stesso periodo 1874 sono le seguenti:

	1873	1874	Somma	Correzione							
0^h 30′	29	12	41	43	–	12. 30	22	25	47	45	–
1. 30	18	23	41	52		13. 30	21	33	54	52	
2. 30	30	45	75	64		14. 30	26	29	55	62	
3. 30	37	40	77	72	+	15. 30	41	35	76	65	+
4. 30	33	33	66	63		16. 30	45	18	63	64	
5. 30	31	15	46	55	–	17. 30	27	25	52	60	
6. 30	23	29	52	59		18. 30	34	32	66	45	
7. 30	33	45	78	65		19. 30	15	32	47	55	–
8. 30	29	36	65	73	+	20. 30	11	13	24	47	
9. 30	41	37	78	66		21. 30	36	34	70	52	
10. 30	25	31	56	56		22. 30	23	40	63	65	+
11. 30	14	21	35	46		23. 30	34	27	61	57	
						24. 30	18	28	46	49	

Da questo quadro apparisce già manifesta la prevalenza dei massimi nelle ore previste; rendendosi dunque evidente che i massimi diurni della curva lunare sono realmente quattro ed avvengono prossimamente ai momenti calcolati in via teorica, v'ha un mezzo facile per determinare empiricamente con sufficiente approssimazione l'ora del massimo fin quasi al minuto. – A tale scopo dispongo i dati primitivi in modo che quelli della prima metà della giornata si sommino rispettivamente a quelli dell'altra metà, cioè di 12^h 30′ più tardi, intercalando fra i dati orari altrettanti dati medi, operazione che non può alterare sensibilmente la curva giacchè ad ogni dato vero della prima linea si somma un dato medio della seconda e viceversa. – Ecco il processo:

Ore	0. 30	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	7 .	8 .	9 .	10 .	11 .	12 .
I	41	41	41	58	75	76	77	71	66	56	46	49	52
II	51	54	55	55	66	76	70	64	58	52	56	65	59
Σ	92	95	96	113	141	152	147	135	124	108	105	114	108

Ore	0. 30	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	7 .	8 .	9 .	10 .	11 .	12 .
I	65	78	71	65	71	78	67	56	46	35	41	47	
II	47	15	24	47	70	67	63	62	61	51	40	41	
Σ	112	113	95	112	141	145	130	118	107	86	81	88	

da cui si ricava che i massimi hanno luogo 3^h 5′ ed a 9^h 21′ dopo il pas-

saggio della luna a ciascuno dei due meridiani; rinnovando l'operazione sulla stessa base, vale a dire sommando i valori ottenuti per le prime 6 ore ed un quarto con quelli delle successive, si ha:

Ore	I	II.	Somme	II–I	Ore	I.	II.	Somme	II–I
0. 30	92	110	202	+ 18	3. 30	147	137	284	— 10
0. 45	93	112	205	+ 19	3. 45	141	130	271	— 11
1.	95	112	207	+ 17	4.	135	124	259	— 11
1. 15	95	113	208	+ 18	4. 15	129	118	247	— 11
1. 30	96	104	200	+ 8	4. 30	124	112	236	— 12
1. 45	104	95	199	— 9	4. 45	116	107	223	— 9
2.	113	103	216	— 10	5.	108	96	204	— 12
2. 15	127	112	239	— 15	5. 15	107	86	193	— 21
2. 30	141	126	267	— 15	5. 30	105	83	188	— 22
2. 45	147	141	288	— 6	5. 45	110	81	191	— 29
3.	152	143	295	— 10	6.	114	84	198	— 30
3. 15	149	145	294	— 4	6. 15	111	88	199	— 23
3. 30	147	137	284	— 10	6. 30	108	90	198	— 18

In questa curva si osserva il massimo intorno a 3 ore, cioè:

A 2^h $45'$ si ha 288 $\Delta = +7$
» 3^h $-'$ » » 295 $\Delta = -1$
» 3^h $15'$ » » 294

donde si ottiene il massimo a 3^h $6'$.

Conviene peraltro osservare che si è supposta di 25 ore una giornata lunare, percui gli altri massimi desunti da questo di 3^h $6'$ cadrebbero a 9^h $21'$, a 15^h $36'$ ed a 21^h $51'$, che ridotte in angoli orari lunari danno

3^h $-'$ ossia $0^h + 3^h$ $-'$
9^h $3'$ » $6^h + 3^h$ $3'$
15^h $5'$ » $12^h + 3^h$ $5'$
21^h $7'$ » $18^h + 3^h$ $7'$

La cui media è uguale a 3^h $4'$

in tempo lunare. È pure da osservarsi che i dati del 1873 sono in tempo medio di Roma e quelli del 1874 in tempo medio di Firenze, percui il valore di 3^h $4'$ si riferisce ad un meridiano intermedio, cioè a 0^h $47'$ $28''$ Est Greenwich; il valore di 3^h $4'$ s'accorda abbastanza con quello di 3^h calcolato teoricamente e, se pure non si voglia ritener casuale la piccola differenza, si arriva alla bella conclusione ch'esso corrisponde a 3^h del meridiano situato a 0^h $43'$ $28''$ Est Greenwich, il quale taglia l'Appennino quasi nel punto più prossimo a Firenze, ove vengono fatte le osservazioni prese per base.

Trattando separatamente i dati dei due periodi accennati del 1873 e 1874 si ottengono risultati sensibilmente uguali, come si può agevolmente verificare mediante i dati suesposti; pel 1873 il massimo cade a 3^h 12′ tempo medio di Roma; pel 1874 cade a 3^h –′ tempo medio di Firenze, percui la differenza, presa in considerazione la diversità di meridiano, è di soli 7 minuti.

Per convincermi viemmaggiormente della verità di questi seducenti risultati, presi a trattare con un metodo diverso i mesi di Giugno e Luglio 1874; disponendo secondo l'ora lunare tutti valori che rinvenni nelle tavole da Lei cortesemente fornitemi e vedendo in ciò confermato lo stesso risultato estesi il calcolo al mese di Gennajo 1874, che fra i mesi invernali è il meno burrascoso; laddove si presentavano lacune (ed il caso non era raro, perchè le osservazioni non vengono fatte esattamente ad ogni ora) intercalai valori medi fra i dati più vicini ed alle ore notturne attribuii la media dei due giorni vicini, giacchè era pur d'uopo riempire le lacune per avere una serie ordinata in modo che le variazioni da un giorno all'altro non guastassero le medie relative alle ore poste in confronto; il risultato che ne derivava non poteva essere rigoroso; tuttavia malgrado quei difetti offriva valori soddisfacenti. Giovandomi poi della comunicazione da Lei fattami, che talvolta l'azione lunare paralizza anzichè aumentare gli effetti barosismici, studiai la questione anche da questo lato su tre mesi estivi, calcolando cioè a quali ore lunari fosse massima la digressione dalla media del giorno. Il risultato di questi calcoli fatti con metodo e su periodi diversi, mi diedero sempre il massimo fra 2^h 50′ e 3^h 15′ dopo il passaggio al meridiano.

È certo che se si potesse trovare il modo di intraprendere regolari osservazioni per tutte le ore del giorno e della notte, si giungerebbe a risultati più precisi; ma per ora è sufficente l'aver provato l'influenza lunare in modo inoppugnabile.

Volli ottenere approssimativamente l'influenza della pressione atmosferica e giunsi ad una conclusione che dapprima mi sorprese, ma la mia sorpresa non durò molto; il fatto è che l'attività microsismica è minima a barometro normale (760 al livello del mare) è massima a pressioni estreme, peraltro meno forte a barometro alto, che a barometro basso; ecco le medie ricavate dall'anno 1874:

745	millimetri	=	linee	1. 8
750	»	=	»	1. 3
755	»	=	»	1. 0
760	»	=	»	0. 8
765	»	=	»	0. 8

770	»	=	»	1. 0
775	»	=	»	1. 2

In tale rapporto mi sovviene d'aver letto esserle stata mossa obbiezione coll'asserire che i moti microsismici a barometro basso dipendono dal vento che in questo caso è frequente e forte. E da che dipende allora il risveglio dell'attività microsismica a barometro alto? Invece mi sembra naturalissimo l'attribuire la causa dei moti alla pressione atmosferica, come Ella sostiene; infatti allorchè la pressione atmosferica è normale dovrebbe regnare equilibrio fra l'interno e l'esterno del globo; allorchè essa è minima o massima la tensione agisce in un senso o nell'altro con ugual vigore, senonchè per la forma stessa della terra uno sforzo dall'interno diretto all'esterno deve produrre per ragioni meccaniche un effetto ben maggiore d'uno sforzo in senso opposto.

Con ciò io credo d'aver esaurito il mio compito, almeno entro i limiti delle mie deboli facoltà; ringraziandola della simpatia, di cui volle onorarmi, nel prendere in considerazione i miei poveri lavori e forse più la mia buona volontà, non debbo tacerle che, malgrado la riconoscenza di cui Ella mi si dichiara debitrice, riconosco in me solo il dovere della gratitudine per la materia ch'Ella ebbe la gentilezza di fornirmi allo scopo d'estendere le mie ricerche ed a Lei debbo il grande il vantaggio d'aver potuto mettere più solide basi alle mie opinioni.

Mi creda pertanto di Lei devotissimo ed obbligatissimo servo

GIULIO GRABLOVITZ.

Trieste 25 Novembre 1876.

CAPO 2.°

Confronto delle osservazioni barometriche e sismometriche delle stazioni italiane dal 1873 in poi. Memoria del P. Camillo Melzi Barnabita.

Allorchè il P. Bertelli stava per mettere mano alla presente terza parte del suo lavoro, trovandosi egli non poco indisposto di salute, tanto da non potersi più come per l'addietro e presentemente occupare dei suoi studi, pregò me a stendere i risultati, che hanno dato le osservazioni da lui fatte col tromometro in confronto colle pressioni barometriche. Di buon grado mi sono io posto a coadiuvarlo nelle sue ricerche e con tutto l'impegno ho cercato di rendere evidente ciò che egli ha asserito più volte nelle parti precedenti della presente memoria, le prove delle quali si tro-

vano nelle osservazioni fatte. Non so però se sono riuscito a far veramente quello, che avrei desiderato: egli è perciò che innanzi di esporre quello che ho radunato, chiedo indulgenza a chiunque avrà sott'occhi questo mio scritto se non avrò saputo disimpegnar bene l'incarico avuto.

Gli splendidi risultati dei calcoli esposti dal Chiar. Grablovitz nella lettera sopra riportata nel capitolo 1.° ci avvertono e ci provano in modo indubitabile, che l'attrazione lunisolare esercita un'azione costante e sensibile anche sui moti microscopici della terra. E dico in modo indubitabile, perchè questi calcoli essendo fatti sull'ipotesi da nessuno ormai contrastata, che anche la parte solida della superficie del globo risenta in qualche modo come l'oceano l'effetto della forza d'attrazione lunisolare, l'unica difficoltà da rimuovere era quella, che tali effetti non potessero essere resi sensibili e manifestati dal calcolo di un piccolo numero di osservazioni. Ma l'ingegnoso e Ch. Grablovitz avendo saputo eliminare gli effetti dovuti a tutte le altre cause per mezzo d'una sufficiente compensazione, e d'altra parte i massimi e minimi così primarii come secondarii trovati coincidendo con quelli, che l'attrazione e i movimenti lunisolari desideravano, non possiamo rigettare un così buon risultato, se non obbligandoci a ritrovare un'altra causa a tali combinazioni. Ora questo non è per nulla facile.

D'altra parte mentre sino ad ora almeno, tutte le indagini fatte dal P. Bertelli e da altri sull'influsso che hanno le altre cause, come la temperatura, l'elettricità, il vento nella produzione dei moti microsismici, hanno svelato, che nessun effetto costante e apprezzabile vi producono, noi abbiamo invece alcune altre coincidenze, che ci fanno ben presagire come la forza d'attrazione non sia indifferente sui detti moti. Ed è appunto su queste, che io desidero fermare un momento i lettori prima di venire a parlare della pressione barometrica, affinchè poi risulti ben chiara la differenza, che passa tra la manifestazione della *forza lunisolare* e la manifestazione della *forza barometrica* sulle osservazioni.

II. Chiunque ha avuto sotto gli occhi le curve annue dei moti microsismici per Livorno, Firenze, Bologna, Roma, e riportate nella seconda parte di questa memoria, sarà certamente rimasto meravigliato della quasi identità di dette curve nei diversi osservatorii e in ciascun anno d'osservazioni, ancorchè le osservazioni non si facessero che di giorno, dove molte e dove poche. Or bene, fatta la curva annua della forza d'attrazione solare, noi troviamo una curva quasi identica a quella dei moti microsismici, poichè mentre i minimi li abbiamo nei mesi estivi, i massimi li abbiamo nei mesi invernali e le curve

dei moti microsismici sono anch'esse, come quelle dell'attrazione, quasi simmetriche intorno ai massimi ed ai minimi. Non mi pare poi di andare errato nell' attribuire la forma analoga delle varie curve mensili microsismiche nei diversi osservatorii e nei diversi anni di osservazione all'influenza dell'attrazione solare, perchè essendomi io provato a rifare le curve annue dei moti microsismici, non già di mese in mese, ma di decade in decade, ho tosto veduto svanire ogni forma analoga tanto nelle varie curve di un medesimo osservatorio per anni diversi, quanto nelle curve del medesimo anno per diversi osservatorii. In conseguenza ho dovuto conchiudere, che quella medesima causa, che si manifestava tanto meravigliosamente *costante* nelle curve dei diversi osservatorii era la stessa, che si manifestava nei diversi anni di osservazione per uno stesso luogo, ed essere quindi per così dire una *causa* che ha uno svolgimento *annuo costante* ed *identico annualmente* per tutte le nostre stazioni. Ora che questo non quadri con la *forza d'attrazione* e a niun altra, credo che non possa dubitarsi.

Inoltre colle curve *microsismiche* annue mensili il P. Bertelli ha anche pubblicata una curva dedotta dal Boccardo sopra i terremoti, la qual curva presenta tutta l'identità delle curve microsismiche ed è anzi più simmetrica di esse, perchè non ha un piccolo rialzamento che vedesi prodotto in quasi tutte le altre curve nel febbraio. Ciò posto, questa curva, mentre ci fa vedere, che i moti microsismici non sono d'altra origine, che endogena, colla sua forma ci fa vedere di più, che quella legge, che noi avremmo ritrovato per ciascun anno in ciascuna stazione microsismica è assai più universale e abbraccia tutti quegli anni, in cui sono avvenuti i terremoti, sui quali è stata ricavata la curva. E qui è bene il notare, come la curva dell'opera del Boccardo non è tracciata mensilmente, ma di giorno in giorno, e con tuttociò non perde essa in nessun modo la forma, che si avvicina cotanto a quella dell' attrazione solare (1).

Mentre quindi i principii dai quali sono partiti il P. Bertelli e il Sig. Grablovitz ci permettono di conchiudere, che l'attrazione solare può aver

(1) Nell'opera del Boccardo vi sono è vero altre curve dedotte medesimamente da altri terremoti, le quali non concordano affatto con quella di cui qui si parla, ma è da osservarsi che le altre curve appartengono o all'altro emisfero, o ad alcune regioni soltanto del nostro, e tutte sono fatte con un numero immensamente minore di terremoti e non possono perciò mettersi a prima giunta al pari della succitata, che è la più generale ed estesa, tanto per le osservazioni che abbraccia, quanto perchè si riferisce precisamente al nostro emisfero.

Non sarebbe mal fatto, che alcuno si mettesse a completare e discutere anche le rimanenti curve dateci dal Boccardo sotto lo stesso punto di vista.

relazione coi *moti microsismici*, le curve annue ce lo *svelano* e la curva dei *terremoti* ci conferma, che i movimenti microsismici sono di natura endogena e come tali in relazione coll'attrazione solare. Che se noi troviamo nella memoria del Chiar. Grablovitz rispetto ai moti microsismici dei risultati tanto bene concordanti coi movimenti lunari, è ben pregio dell'opera far qui un cenno dei risultati trovati dallo Schmidt e dal Perrey per i veri terremoti. Il Perrey trovò infatti che i terremoti hanno una prevalenza alle sizigie e al perigeo rispetto alle quadrature e all'apogeo. Lo Schmidt invece nei suoi lavori conchiuse un massimo di frequenza nei terremoti all'epoca del novilunio e la minima frequenza nel giorno dell'ultimo quarto. Trovò poi anch'egli un massimo al perigeo ed un minimo all'apogeo.

Ma questi massimi e minimi non rappresentano nella curva dei moti microsismici rispetto all'età e posizione della luna, che dei massimi e minimi secondarii. Ancorchè adunque lo Schmidt coi suoi calcoli non abbia ritrovato un'altro massimo al plenilunio ed un'altro minimo al primo quarto ma piuttosto il rovescio; osservando che lo Schmidt e il Perrey discussero tuttavia quasi il medesimo intervallo di tempo, ma con metodo diverso, contentandoci di considerare come più certo ciò soltanto che è comune a ciascuna delle suddette ricerche, diremo che l'attrazione lunare indubitatamente manifestasi come causa preponderante così riguardo alla frequenza dei terremoti come nell'incremento dell'attività microsismica.

Perciò nello stesso modo che per l'attrazione solare i lavori fatti sopra i terremoti convengono a provare la teoria gia formata, così anche per l'attrazione lunare noi possiamo appoggiarci ai risultati avuti dai veri terremoti.

III. Come ho accennato fin da principio, scopo del presente ragionamento è stato di far bene risaltare la differenza, che passa tra le relazioni, che noi troviamo dei moti microsismici coll'attrazione lunisolare e le relazioni, che vedremo invece dei medesimi moti con la pressione barometrica. Di tutte e due queste *cause* nella produzione dei moti microsismici ed anche dei terremoti è bene ricordare, che non sono cause altrimenti che *occasionali*, vale a dire, che nel trovarsi la terra in un tempo di cresciuta attrazione lunare o solare o nell'esservi una forte depressione barometrica i gas interni dilatandosi offrono una causa *determinante* una reazione endogena, la quale poi produce direttamente il terremoto ovverosia un piccolo oscillamento del suolo a seconda degli impedimenti maggiori o minori, che tro-

vano i fluidi e gas interni per obbedire alla loro dilatazione. Questo tuttavia è da notarsi, che come la pressione barometrica è più immediata dell'attrazione lunisolare, perchè quella agisce *continuamente* in modo graduato, e questa a sbalzi più o meno repentini, così la *pressione barometrica* di natura sua deve coprire gli *effetti* dell'attrazione in modo da non potersi vedere quelli, se non per *interpolazione* dei dati dell'osservazione. Ed io sono ben persuaso, che non si potrà mai riescire a far palese l'effetto delle attrazioni lunisolari, se non precisamente usando di qualche metodo, che tolga anzitutto l'effetto dovuto alla pressione barometrica.

Il metodo ottimo usato dal Ch. Grablovitz per compensare gli effetti dovuti a tutte le altre cause diverse dall'attrazione lunisolare, ne è certamente una prova. Il Ch. Autore infatti per avere dei risultati assai più soddisfacenti di quelli, che non presentino i calcoli diretti del suo metodo, fa un' interpolazione dei numeri ricavati addizionandoli tre a tre. Così egli trova la sua seconda colonna di valori; e trova la terza addizionando di bel nuovo a tre a tre i numeri della seconda colonna. In tal modo i risultati sono sensibilmente più veritieri, rispetto alla teoria, che si vien dimostrando, ed io ancora una volta mi rallegro col Ch. Grablovitz di sì buon esito delle sue fatiche. D'altra parte però non posso negare che queste due ultime interpolazioni bastano per celare tutta l'influenza barometrica, che prima dovea pur rimanere, e sosterrei perciò come necessaria una tale interpolazione. Infatti prendiamo i risultati stessi datici dal Grablovitz in fine della sua memoria per l'accrescimento nei moti microsismici dovuto alla pressione barometrica. Egli trova per

millim.	745	linee	1, 8
	750		1, 3
	755		1, 0
	760		0, 8
	765		0, 8
	770		1, 0
	775		1, 2

Il movimento dovuto al barometro oscilla in media adunque tra 0, 8 e 1, 8 Ora siccome entro un mese presso a poco il numero delle burrasche è compreso tra 6 e 10, il tempo medio di un' onda barometrica è compreso tra 3 e 5 giorni.

I tre numeri 0, 8 — 1, 8 — 0, 8, possono quindi approssimatamente determinare il valore medio dei moti microsismici in un'ondata di tre giorni e i 5 numeri 0, 8 — 1, 3 — 1, 8 — 1, 3 — 0, 8 sarebbero i valori medii dei moti microsismici nell'ondata di 5 giorni.

Assoggettando un seguito di queste serie all'interpolazione adottata pei moti microsismici, la differenza nella prima interpolazione resta divisa per 3 e nella seconda per 9. Supponendo dunque le ondate di 5 giorni, la differenza fra due dati consecutivi si riduce solo a $\frac{5}{3}$ di decimo di linea cioè a 1 decimo e $\frac{2}{3}$ dopo la sola prima interpolazione e di $\frac{10}{9}$ di decimo di linea nella seconda interpolazione per le ondate di 3 giorni. Tutte e due queste differenze essendo inapprezzabili, l'interpolazione cela dunque certamente l'effetto dovuto alla pressione barometrica, se ancora vi rimane.

Ritengo poi che i valori della prima colonna contengano ancora gli effetti della pressione barometrica per alcune ragioni. In primo luogo infatti come l'azione lunisolare agisce sul mare, agisce anche sull'atmosfera; nell'addizionare perciò i valori microsismici dovuti alle medesime età della luna o alla sua medesima posizione, molto facilmente le ondate delle burrasche non si compensano, ma si sommano in parte, tenuto conto principalmente alle osservazioni di due anni distinti. Secondariamente poi i massimi microsismici dovuti alle pressioni barometriche superano talvolta il quadruplo del massimo medio 1, 8 sopracitato, mentre d'altra parte sono pochi relativamente ai giorni osservati. Dopo un piccolo numero di anni, non possono adunque essere compensati. La gran difficoltà di poter coprire gli effetti dovuti alla pressione barometrica si manifesta poi anche nelle medie essendo quasi doppio l'effetto medio dovuto al barometro di quello dovuto all'attrazione lunare, mentre nei massimi ne è quasi il triplo e nei minimi è poco più che una volta e mezzo. Quindi è che sebbene per gli effetti lunari è molto difficile vedere volta per volta gli accrescimenti di moti microsismici dovuti alle posizioni della luna, è invece facilissimo per ogni ondata barometrica riconoscere un aumento dei medesimi moti. E questo è appunto ciò che ora farò vedere particolareggiato negli anni 1874, 75, 76, 77. Noto però che non ostante che i calcoli del Ch. Grablovitz ci mostrino aumento di moto anche negli innalzamenti del barometro noi non ci occuperemo che delle depressioni, perchè sono queste soltanto che più visibilmente ci mostrano la relazione intorno ai moti microsismici e il barometro. Del resto l'aumento dovuto agli innalzamenti del barometro essendo una parte solo di quello dovuto alle pressioni, non è meraviglia che si celi all'osservatore,

tanto più, che può trovarsi concomitante coi terremoti, i quali posticipano di alcuni giorni, (generalmente parlando), i moti microsismici. Ma su questo tornerò di nuovo, allorchè esposti i confronti, il valore stesso delle osservazioni ci farà più chiara la conclusione che deve adottarsi.

IV. Veniamo ora al particolare confronto dei moti tromometrici cogli abbassamenti barometrici incominciando dal Dicembre 73. Nella tavola n. 1 sono raccolti in tre colonne gli abbassamenti barometrici avvenuti a Roma e Firenze e i moti tromometrici di Firenze. I valori però, che sono segnati, indicano pel barometro gli abbassamenti sotto la media annua e pel tromometro i soli *moti notevoli*. La tavola n. 1 contiene le osservazioni dal Dicembre 73 al Luglio 74 inclusive.

Nel Dicembre 1873 e Gennaio 1874 parrebbe, che i moti del tromometro poco combinino con le pressioni barometriche, perchè di contro ai moti tromometrici quasi continui e forti di tutta la prima decade dei due mesi non abbiamo che delle insensibili depressioni barometriche sotto la media annua. Questa discordanza lungi dall'esserci d'inciampo, ci dà luogo a ripetere subito un'importante avvertenza a tutti i lettori di questa memoria, che cioè non sono i moti *tromometrici*, che debbono *tutti* avere riscontro cogli abbassamenti del barometro, sì bene questi con quelli. Non essendo infatti la pressione atmosferica se non una occasione favorevole ai moti sismici, e non già la causa intrinseca, assai è evidente, che mancando pure tale pressione possono manifestarsi anche in alto grado i moti sismici. E ne sono prossima prova i molti *terremoti* avvenuti in detti due mesi in tutta l'Italia. Dai quadri sinottici dei fenomeni endogeni italiani pubblicati dal Ch. Cav. Prof. Michele Stefano De-Rossi nel suo pregevolissimo Bullettino del Vulcanismo Italiano si ricava, che in questi due mesi tutti i giorni il suolo è stato agitato nell'Italia, ad eccezione del 16, 17 e 23 Dicembre e del 6, 20 e 21 Gennaio, e che il numero maggiore di scosse è avvenuto nei giorni 1, 2, 9, 20, 26 Dicembre e 5, 9, 13, 24, 27 Gennaio. Dai medesimi quadri risulta pure, che la forza delle scosse è stata assai maggiore nel Dicembre 73 che nel Gennaio 74, ciò che avvenne pure nei moti *microsismici di Firenze*. Nessuna meraviglia adunque che mancando gli abbassamenti barometrici si siano avuti dei moti microsismici molto sensibili. Del resto è anche da aggiungersi, che molte burrasche atmosferiche attraversarono nel medesimo tempo l'Europa, le quali sebbene non arrivassero fino a farsi sentire nelle stazioni italiane furono assai forti specialmente nel Dicembre. Che se poi noi prendiamo i minimi barometrici di Roma, vediamo pure, che essi

cadono presso a poco nei massimi moti sismici. Nel dicembre infatti detti minimi cadono nei giorni 1, 7, 10, 17, 29 mentre i massimi sismici li abbiamo nei giorni 2, 9, 17, 28 e nel gennaio 74 i minimi barometrici furono il 5, 13, 18, 25, 28 e i massimi sismici il 2, 4 e 6, 11 e 14, 18, 29.

Mentre dunque da una parte possono ritenersi come moti più strettamente sismici quelli del Dicembre 73 e Gennaio 74, dall'altra non può neppure negarsi un'influenza della pressione atmosferica almeno sopra i massimi movimenti del *tromometro* in detti mesi.

Nei seguenti mesi Febbraio, Marzo, Aprile, Maggio, Giugno, Luglio è poi evidente il confronto. L'abbassamento del giorno 1 Febbraio lo vediamo combinare coi moti microsismici dei primi 5 giorni del mese con un massimo nel giorno 2, gli abbassamenti dell'8 al 10 coi moti microsismici dall'8 al 15 con un massimo il giorno 11. Quelli dal 16 al 22 corrispondono anche ai massimi dei giorni 17 e 20. L'abbassamento avvenuto l'ultimo giorno di Febbraio, lo vediamo corrispondere ai moti dei primi giorni di Marzo, il cui massimo è però caduto lo stesso ultimo giorno di Febbraio. Dal 9 al 12 e dal 19 al 21 abbiamo due altri abbassamenti, che corrispondono ai moti microsismici, che hanno il massimo i giorni 11 e 20, mentre i minimi barometrici sono pure nei medesimi giorni. In Aprile dal 4 al 17 l'abbassamento barometrico si riscontra sempre con un moto tromometrico notevole e mentre i minimi barometrici cadono il 6, 8, 14 i massimi tromometrici cadono il 5, il 12 e il 15. L'abbassamento del 28 Aprile non è risentito fino al 2 maggio, ma è da notarsi, che un tale abbassamento, si prolungò più o meno fino al 17 Maggio e che sino al giorno 16 durarono i moti notevoli nel tromometro; quindi l'accordo esiste ancora fra i due istrumenti. I minimi barometrici poi furono il 3, 8, 11, 16 Maggio e i massimi tromometrici il 5, 9, 12, 16. Per Firenze furono solo il 3, 10, 16; i due minimi dell'8 e 11 non ne hanno formato adunque che un solo il 10.

Dal 22 al 27 vi ebbe poi un altro periodo di abbassamento nel barometro, il quale fu risentito il 23 e 24 dal tromometro. Parimenti i periodi d'abbassamento del 13–15; 20–23; 26–29 Giugno corrispondono ai moti notevoli del 14–15; 22–23; 29 Giugno. Nel mese di Luglio i moti notevoli del 25 e 26 e quelli del 30 corrispondono alle depressioni manifestatesi nel barometro dal 24 al 28 e dal 29 al 31. Questi però non furono i soli abbassamenti atmosferici del Luglio, perchè la tavola ce ne da due altri, l'uno all' 11 e 12 e l'altro il 18 e 22 e ambedue mancano di confronto con dei moti notevoli, tromometrici. Il confronto non sfugge tuttavia se conside-

riamo i *massimi notevoli* diurni, i quali non sono notati nella tavola, ma già sono stati pubblicati pel 1874 nella parte 2ª della memoria del P. Bertelli e furono sensibili precisamente i giorni 10 e 11. Pel periodo tra il 18 e il 22 il rialzo nel *massimo* del giorno 22, cioè 2″, 6, poco più della metà 3″, 0 di quello che suol considerarsi notevole e per conseguenza non sarebbe atto a far vedere il confronto propostoci, se non leggessimo, (Atti dell' Accademia Pontificia dei nuovi Lincei Anno 1874, 5 Luglio) un' osservazione importante fatta già dal P. Bertelli quando discusse la curva barometrica e tromometrica del 1874. Il medesimo notò infatti pel tromometro una *sensibilità* maggiore nel periodo *invernale* e una minore nell'*estivo* a mettersi d'accordo col barometro. Ora questa minor sensibilità, che si manifesta qui di nuovo nei mesi di Maggio, Giugno e Luglio e che rivedremo anche negli anni seguenti; ci da tutto il diritto a conchiudere che il periodo tra il 18 e 22 ha il suo confronto col rialzo nel *medio* e nel *massimo* diurno del giorno 22. Fin qui adunque nessuna depressione *atmosferica* è stata esente, come abbiamo veduto, da moti microsismici e in due mesi soli cioè nel Gennaio 74 e Dicembre 73 si sono veduti moti microsismici senza abbassamenti barometrici.

V. Passiamo ora all'Agosto 1874, mese, del quale nelle tavole abbiamo ancora calcolati i moti sensibili microsismici osservati a Bologna dal Sig. Conte Malvasia, al quale dobbiamo rendere pubbliche grazie e meritevoli elogi per essere stato uno dei primi a intraprendere un corso regolare di tal genere di osservazioni dietro il suggerimento del P. Bertelli. (1) Le osservazioni di Bologna non cominciano, che il giorno 9, e prima di detto giorno non vi è stato, che un abbassamento barometrico nei primi tre giorni del mese, il quale non ha confronto nelle osservazioni microsismiche di Firenze; ma è da notarsi, che questo abbassamento era già cominciato alla fine del mese, combinando il suo massimo col massimo tromometrico del 30 Luglio. Il giorno 6 Agosto il tromometro nota a Firenze un moto sensibile che se non può mettersi a confronto col piccolissimo abbassamento del 5 e 6 nel barometro di Roma, trova però la sua spiegazione nell'abbassamento avvenuto a Firenze stesso, che è stato di 2″, 6 sotto la media annua nei medesimi giorni, e molto più nel fatto, che in quel giorno è caduto il minimo assoluto decadico nella maggior parte delle stazioni italiane.

(1) Le osservazioni di Bologna sono cominciate il 9 Agosto 74 con pendolo lungo m. 3,545 in cui il massimo d'ampiezza notevole è 16″, 0 e la media notevole è 6″, 0; nelle tavole sono quindi notati i valori maggiori di 6″, 0.

Dal 9 in poi nell'Agosto medesimo i confronti del barometro coi movimenti microsismici di Firenze e Bologna sono quasi perfetti. I minimi infatti barometrici avvennero il 9, 15, 19, 21, 23 e 26, e per Bologna i massimi movimenti furono il 9, il 15, il 19, il 22 e 28, mentre a Firenze, sebbene non appaiano, che dei moti nel 9 e 15, pure rivedendo le curve pubblicate nella 2ª memoria a pag. 69 noi troviamo i *massimi relativi* di 2″. 4 e 1″. 4 d'intensità il 19, il 26 e il 30. In quanto poi ai movimenti, che troviamo a Firenze il giorno 11 e a Bologna il giorno 15 e che non hanno corrispondenza con alcun abbassamento barometrico a Roma, Firenze e Bologna, ben può affermarsi, che siano movimenti propriamente sismici, giacchè il Bollettino del De Rossi nota il giorno 15 per Bologna tre scosse telluriche a ore differenti. È cosa intanto da notarsi che dovendo fare il confronto degli abbassamenti barometrici coi moti verificati in più osservatorii, siccome è abbastanza assicurato, che esistono pure dei terremoti locali, noi non dovremo meravigliarci di trovare tali moti in questa o quella stazione soltanto, che non abbiano poi corrispondenza cogli abbassamenti atmosferici. Anzi a me pare che non essendovi nè questa circostanza, nè quella della coincidenza con movimenti di altri paesi con grande certezza possiamo assicurare che detti moti sono propriamente sismici, cioè veri piccoli terremoti locali.

Le concidenze del barometro nei mesi di Settembre, Ottobre, Novembre 1874 sono tanto evidenti, che al solo gettar gli occhi sulle tavole ce ne possiamo convincere. In Settembre, ancorchè le depressioni barometriche a Roma non siano state, che il 13 e 14, pure i moti sismici abbracciano un periodo dal 10 al 15 coi massimi nell'11 e 13 e di più un moto isolato il giorno 19, comune ad entrambi gli osservatorii ed un moto isolato per la sola Bologna il 1° del mese. Il moto del giorno 19 può attribuirsi sia a un minimo secondario barometrico avvenuto in quel giorno, sia a qualche scossa minima tellurica appena sensibile ai tromometri, come è da attribuirsi il massimo del giorno 1 per Bologna e più ancora quello del giorno 11 che fu anche veduto dal De-Rossi a Rocca di Papa. In Ottobre poi tre sono i principali periodi tromometrici il primo dall'1 al 7; l'altro dal 15 al 21 e il terzo dal 21 al 26. Quello dall'1 al 7 ha corrispondenza coll'abbassamento barometrico dei medesimi giorni. Quello dal 15 al 21 con massimi discordanti nelle due stazioni è da credersi *sismico* e combina colle *eruzioni dell'Etna* nei medesimi giorni (Bull. De-Rossi), ciò che farebbe credere a un *trasporto* locale delle commozioni interne. Finalmente il periodo dal 21 al 26 combina cogli

abbassamenti del barometro nei giorni 22, 23, 24. Nell'11, 27 e 28 Bologna nota altri tre moti sensibili, che possono riputarsi sismici non solo, perchè non verificati a Firenze, ma ancora, perchè in quei giorni avvennero veramente molte scosse di terremoto, come registra il Bullett. del De-Rossi. In Novembre infine ad eccezione dei moti isolati del 5 a Firenze e del 7, 9 e 10 a Bologna i moti microsismici cominciati il giorno 12 accompagnano quasi senza interruzione l'abbassamento barometrico cominciato il giorno innanzi e che seguitò con decrescimenti e rialzamenti più o meno sensibili fino al 5 del Dicembre seguente.

VI. Dal giorno 9 Dicembre 74 a tutto Novembre 75 le tavole recano le osservazioni tromometriche di Roma, le quali sole potei avere nelle mani; il confronto procederà perciò ora per tre stazioni. È notevole che nel Dicembre 74 mentre il barometro è stato quasi sempre basso, anche i tromometri sono stati tutti e nel medesimo tempo molto agitati. Anzi eccettuate le commozioni del periodo 6–9 e del giorno 25, le quali non hanno corrispondenza con dei minimi barometrici e sono piuttosto sismiche, combinando colle scossse avvenute nella Valle del Liri, a Roma, Napoli, Firenze, al Vesuvio ecc. ecc. (Vedi Bullett. De-Rossi) e per il 25 alle scosse di Belluno, Tolmezzo; gli altri massimi tromometrici vanno d'accordo coi minimi barometrici avvenuti a Roma il 13, 15, 21, 30. A Firenze infatti i massimi moti sensibili furono il 16, 18, 22, 29, a Bologna il 12, 16, 18, 20, 22, 29 e a Roma il 14, 18, 22, 29.

Il minimo barometrico del 30 Dicembre è stato risentito anche nei primi giorni di Gennaio specialmente a Bologna, sebbene fosse in diminuzione. Però il moto del giorno 3 a Bologna, come isolato, deve riputarsi del tutto *sismico;* non così quello del 6, che fu comune alle tre stazioni, e che corrisponde a un piccolo abbassamento barometrico appena sensibile a Roma, ma assai più sensibile nelle altre stazioni italiane. Bologna nei giorni 10, 11, 20, Roma il giorno 12, e Firenze e Roma il giorno 14, 28 ci presentano altri moti isolati non corrispondenti a nessun abbassamento barometrico. Gli altri periodi del 16–19, 21–24, 25–27, 30–1 Febbraio, hanno ragione negli abbassamenti del 17, 22, 26, 30, che poco figurano nelle osservazioni barometriche di Roma, ma furono più sentiti in altre stazioni italiane. Lo stesso dicasi dal Febbrajo 1875 al 6 Marzo, nel qual tempo barometri e tromometri furono sempre agitati assai, e le scosse isolate del 9 e 12 a Roma, del 17 a Bologna, e del 22 a Firenze, avvennero quando il barometro stava per tornare ad un valore medio normale con un massimo di rialzamento. Scosse del tutto

isolate furono quelle di Bologna l'8, e 9 Marzo a barometro alto. Del resto i due periodi di abbassamento atmosferico del Marzo, che furono dall'11 al 15, e dal 28 al 30 corrispondono ai periodi di agitazione tromometrica dall'11 al 16 e dal 28 al 31. In quanto all'abbassamento barometrico del 19 al 23, il cui massimo avvenne per Roma il 21, non troviamo alcuna coincidenza coi moti microsismici a Firenze, sebbene nei giorni 21 e 22 la media diurna non sia inferiore, che di 0″, 6 alla media sensibile, che è 3″, 0; ma la troviamo per Bologna e per Roma. Questo però non deve far meraviglia, quando si può osservare, che nel giorno precedente (18) e susseguenti a questi, furono osservati a Firenze oscillazioni verticali, indizi di piccoli terremoti, e sappiamo che veramente molte scosse furono sentite in tutta l' Italia superiore e media il 18; imperocchè la forza sismica svolgendosi in punti non lontani da Firenze, poteva non manifestarsi nei punti intermedii, dove forse coincidevano i nodi delle vibrazioni sismiche.

Nel mese d'Aprile (1875) gli abbassamenti barometrici furono dal 5 all'8 e dal 12 al 15 e dal 23 al 26, e troviamo concordemente nelle tre stazioni dei moti sismici nei medesimi tre periodi, sebbene il terzo si prolunghi di più per Firenze e Roma; stanno invece isolati per Bologna i moti del 2 al 4; per Bologna e Roma quelli del 19 e 20, per Firenze e Roma quelli del 16–17: e possono riputarsi sismici perchè corrispondono a leggiere scosse avvenute nelle medesime stazioni, come risulta dal Bullettino del Vulcan. Ital. p. 93.

Nel Mese di Maggio i confronti sono visibilissimi, perchè come leggerissime furono le pressioni atmosferiche, così quasi nulle furono per Bologna e Firenze le manifestazioni microsismiche, e quelle di Roma accaddero appunto in giorni di piccoli abbassamenti, sebbene si possano credere anche di natura puramente sismica. Non così tuttavia il periodo dell'ultima settimana sensibile al barometro e al sismometro delle tre stazioni. L'accordo per questo mese è dunque soddisfacente.

Lo stesso deve dirsi per la prima metà di Giugno. In quanto poi ai moti del 19–20; 22–23 faremo notare, che sebbene il barometro non sia calato a Roma sotto la media normale, tuttavia calò a Firenze. Del resto essendo vero, che tra il 22 e 23 cadde in quasi tutta l'Italia il minimo assoluto barom. della decade, possiamo per questa volta confessare che il confronto voluto non vi si rinviene.

Lo stesso deve dirsi dell'abbassamento barom. del 25 Giugno al 3 luglio, che un giorno solo fu sentito sensibilmente da ciascuna stazione unitamente

a leggiere scosse di terremoto. Il movimento del 9 e 10 e quello del 16 al 20 fu sentito in tutte e tre le stazioni, non così quello del 22 e 23, che non fu risentito oltre il moto sensibile a Firenze. Furono poi moti isolati per Bologna quelli del 25 e 26 e a Roma quello del 30 senza corrispondenza nel barometro.

In Agosto non abbiamo che due periodi di abbassamento barom. il primo dal 3 al 6 per Roma, ma un poco più esteso dall' 1 al 7 nel rimanente d'Italia, e loro fan riscontro i moti del 2, 5, 9, a Bologna, (sebbene quello del 9 sia forse moto isolato e sismico) e per Roma e Firenze dal 4 al 7. Il secondo abbassamento più piccolo incominciò a Firenze il 28, durò fino al 2 Settembre e fu sensibile a Roma sotto la media annua i soli giorni 29 Agosto e 2 Settembre e trova inoltre confronto con alcuni movimenti del 31 per Firenze e Roma, e del 2, 3, 4 a Roma. Mancarono movimenti a Bologna, ma in questa stazione vi furono moti isolati il 24, 25, quando il barometro era abbassato un poco, (ma non oltre la media), nell'Italia.

Anche i movimenti isolati osservati a Roma dal 14 al 17 Settembre avvennero piuttosto con barometro in ribasso, e acccompagnati da leggerissime scosse di terremoto. Il giorno 24 il barometro segna una piccola depressione atmosferica, che è risentita il giorno appresso da tutte e tre le stazioni, e sèguita sino al 28 per Roma. Il 29 si riabbassa il barometro sino al 3 Ottobre, e i tre tromometri si rimettono in movimento, sebbene per Roma e Bologna non arrivi ad essere sensibile che nell' 1 e 2 Ottobre, mentre a Firenze, dove il movimento barom. era cominciato prima è sensibile nei giorni 29 e 30 Settembre e più debole i giorni seguenti 1 e 2 Ottobre.

Prima di passare alla nuova stagione di massimo incremento del moto tromometrico non dimenticherò di osservare, che il confronto dei precedenti mesi estivi offre i medesimi caratteri di quelli dell' estate del passato anno, imperocchè anche questa volta i confronti sono men pronunciati, se si considerano i soli moti sensibili dei tromometri e gli abbassamenti del barometro oltre la media annua, mentre invece restano soddisfacenti considerando i moti *quasi sensibili* nel tromometro e le depressioni relative del barometro.

L'attività sismica e barometrica si risvegliò al principio della 2ª decade d'Ottobre, e il periodo dell'11 al 17 nel barometro è notato dal 10 al 17 nelle tre stazioni, verificandosi i massimi per ciascun istrumento nel 14. Un secondo periodo l'abbiamo in tutte e tre le stazioni dal 20 al 26, e un terzo dal 28 alla fine del mese coi massimi non discordanti di più di un giorno.

In Novembre (1875) notiamo dei moti isolati a Roma il 3 e 4 accompagnati da leggiera depressione barometrica nell'Italia poco sensibile a Roma. Poi abbiamo un periodo di depressione atmosferica dal 6 al 12 accompagnata dai movimenti sismici a Firenze e Roma, ma non sensibile a Bologna che il giorno 7, e quasi sensibile (7'', 9) il giorno 11 in cui furono i massimi. Il giorno 15 a Firenze si ebbe un moto isolato, mentre in quella stazione il barometro notò un leggiero abbassamento oltre la media annuale; dal 19 al 24 vi fu un'altra depressione atmosferica, e a Firenze si ebbero dei moti sensibili il 18 e il 20, 21, 22; ma a Bologna e a Roma i moti non furono sensibili che il 21 cioè il giorno dopo il minimo barometrico. Finalmente il giorno 25 cominciò una nuova sensibile depressione barom., che durò fino a tutta la prima decade di Decembre e i tromometri di Firenze e Bologna si mostrarono tosto agitati, non così quello di Roma.

VII. Dal Dicembre 1875 mi è forza non poter più discutere le osservazioni di Roma, non avendole potuto aver sott'occhio, incominciarono però quelle di Velletri e di Camerino: ed è bello notare come i quattro tromometri furono agitati tutti sino al giorno 8, giorno in cui terminò pure la depressione barometrica. Nel rimanente del mese si manifestò un'altra sola depressione notevole, se pure non vogliamo tener conto di quella dell'11 e 12 che ha riscontro con moti sismici avvenuti nelle tre stazioni di Firenze, Bologna e Camerino i giorni 10 e 13. Fra il 18 e 22 abbiamo due scosse isolate a Bologna e Camerino; il giorno 25 l'abbiamo a Firenze e il 27, 28, nelle altre tre stazioni. Questi moti, rinnovatisi anche in tutti e quattro gli osservatorii l'ultimo del mese possono ritenersi di natura solo sismica, sebbene fossero accompagnati in questi stessi giorni da due leggiere fluttuazioni barometriche come accenna il Bullettino del Collegio Romano. Inoltre il 26 e il 30 accaddero i minimi barometrici.

Nei primi tre giorni del mese di Gennaio 1876 i tromometri notarono solamente alcuni moti isolati, ma dal 4 al 15, furono quasi in continuo movimento in corrispondenza alle depressioni barometriche di quei giorni, che a Roma non furono tanto sensibili, ma avvennero in quasi tutta l'Italia ed ebbero i loro massimi nei giorni 5, 9, 13 contemporaneamente ai massimi moti microsismici. Nel rimanente del mese i tromometri non furono mai mossi tutti quanti insieme se non il giorno 22, ma tuttavia presentano tre periodi assai distinti dal giorno 16 al 18; dal 21 al 23, e il 29, nei quali un po' l'uno, un po' l'altro tromometro ebbe movimenti sensibili. Questi periodi coincidono coi minimi berometrici, (maggiori però della media annua), segnati nel Bullettino del Collegio Romano il 17, 22, 29.

In Febbraio le prime depressioni barometriche furono dal 5 al 12, e i medesimi giorni si manifestarono i periodi microsismici. Due altre depressioni poco sensibili a Roma si manifestarono il 24 e il 28, anche esse accompagnate da periodi microsismici. Del resto non vi furono altri moti, se non i due gruppi dal 15 al 17 per Firenze, Bologna e Camerino, e dal 19 al 21 per Firenze e Bologna, moti del tutto isolati.

Il giorno 2 Marzo tutti e quattro i tromometri furono agitati in corrispondenza al minimo barometrico sensibile di quel giorno. Altri moti manifestaronsi a Bologna il 5 e il 6, ma solo dal 7 al 13 i tromometri si trovarono tutti in movimento insieme col barometro, il quale ebbe il suo minimo il giorno 10, allorchè i tromometri erano più agitati. Fra il 15 e il 21 si ebbe un nuovo periodo barometrico e tromometrico; ma mentre nel barometro avvennero due minimi il 18 e il 20, i tromometri ne ebbero un solo il 19. Dal 23 al 27 il nuovo periodo barometrico si fece di nuovo sentire in tutte le stazioni, compresa Fermo, che incominciò il 24 le sue osservazioni, e gli estremi dei due istrumenti coincidono nei giorni 24 e 26. Dal 28 in poi il barometro tornò di nuovo ad abbassarsi, e con diverse fluttuazioni durò fino al 3 Aprile, giorno in cui la depressione era quasi terminata. In tutto questo tempo però i tromometri non si mostrarono sensibilmente agitati, sebbene non poche scosse di veri terremoti abbiano dimostrato che l' attività sismica era piuttosto grande. (V. Bull. del Vulc. It.)

La piccola depressione del 5 Aprile fu invece sensibilissima a tutti i tromometri, meno quello di Firenze. I moti dal 7 a Camerino e dell' 8 e 9 a Velletri e Fermo corrispondono a leggiere scosse di terremoti in alcune località d'Italia. Le agitazioni microsismiche ricominciarono contemporaneamente a farsi sensibili nei cinque osservatorii il giorno 13, e dove più e dove meno durarono sino al 24. I minimi barometrici furono i giorni 15, 19, 21, 23, i massimi tromometrici furono per Camerino il 13, 15, 17, 19; per Firenze il 15, 19, 21, 24, per Bologna il 14, 19, 22, 24; per Velletri il 13, 16, 19, 21, 23, e per Fermo il 14, 17, 19, 24. L' ultimo periodo fu dal 27 al 3 Maggio per quasi tutti i tromometri, il barometro invece a Bologna fu poco depresso; ma molto più lo fu a Firenze e in altre città d'Italia, cosicchè nello stesso modo, che la pressione atmosferica non fu del tutto generale per la nostra penisola, così pure i tromometri furono variamente agitati.

Si ebbero poi in Maggio 4 gruppi distinti di moti microsismici dal 6 al 9; dal 13 al 15; il 19 e 20 e dal 24 al 28. Questi periodi corrispondono esat-

tamente ad altrettante depressioni barometriche, come lo mostrano ad evidenza le tavole. Nel Giugno le depressioni furono 5, ma solo le 4 ultime trovarono coincidenza sensibile coi tromometri, la prima invece è solo manifesta a Firenze e per un giorno solo. Tuttavia tenendo conto, che nei mesi estivi, è minima l'attività e sensibilità microsismica, e che nelle tavole non abbiamo registrato, che i moti sensibili, l'accordo dura ancora.

Lo stesso deve dirsi dei piccoli periodi del Luglio, Agosto e Settembre, e dei primi giorni d'Ottobre del medesimo anno, non essendovi difficoltà di rilievo, il solo sguardo alle tavole mostra la coincidenza di ogni moto microsismico, con ciascuna depressione del barometro.

In Ottobre la sensibilità microsismica si è risvegliata il giorno 17, due giorni dopo le prime depressioni barometriche avvenute a Roma ed è perdurata infino al 22 insieme con queste in quasi tutti gli osservatorii. Dico quasi tutti: non solo, perchè a Montefortino (che in detto mese si osservò invece di Fermo) i moti non si manifestarono che un giorno solo: ma anche, perchè a Bologna continuarono ancora per poi riprendere tutti insieme dal 27 al 29, quando un nuovo periodo barometrico raggiungeva il suo minimo.

La discussione per il mese di Novembre è un poco più complicata, comincieremo però dall'osservare i quattro periodi barometrici del 30 Ottobre al 3 Novembre, quella dal 7 al 10, quella del 16, quella del 18 al 23 e l'ultima dal 28 al 30, che hanno corrispondenze esatte in tutti gli osservatorii, meno quella del 16, che si manifestò solo a Bologna con un massimo, e che d'altronde non fu generale in tutta l'Italia. Oltre a questi gruppi, ne abbiamo altri microsismici fra il 5 e il 6; l'11 e il 15, che non corrispondono a sensibili abbassamenti barometrici; ma solo a delle fluttuazioni, che ebbero i minimi nei giorni 5 e 9, e i massimi il 6 e l'11.

VIII. L'anno 76-77 incomincia molto regolarmente con due periodi di abbassamento barometrico nel Dicembre 76, i quali corrispondono esattamente ad altri due di moti microsismici. Notisi per altro che siccome i moti microsismici non si manifestano che a salti, come abbiamo già notato sin da principio, non deve farci meraviglia, se non in tutti i giorni dei periodi microsismici, si bene in una qualche stazione ogni giorno di abbassamento barometrico vediamo dei moti sensibili. Il primo periodo durò dal giorno 3 al giorno 13 e ci presenta i massimi pel barometro nei giorni, 4 e 11 e per i tromometri nei giorni, 4, 6, 8, 10 e 12. A Velletri i massimi tromometrici furono solo i giorni 5 e 10 e tre giorni soli segnarono moti sensibili

bastanti però a determinare la corrispondenza coi due massimi abbassamenti barometrici. A Firenze invece, manca la corrispondenza dei moti col secondo massimo dell'11. Il 2° periodo durò dal 14 al 28 e pel barometro abbiamo i massimi nei giorni 18 e 24. I tromometri invece, risentito il primo straordinario abbassamento del giorno 16 e 17, manifestarono un secondo massimo il giorno 19, un terzo al 22 e un altro il 25. Finalmente tra il 26 e 27 si ebbe un ultimo massimo. Questo succedersi dei moti massimi di due in tre giorni nel tempo dei periodi di abbassamento barometrico è un carattere proprio e facile a spiegarsi dei medesimi moti microsismici. L'attività endogena infatti, allorchè riesce a vincere le difficoltà e gli ostacoli che si oppongono alla dilatazione dei gas interni e alla formazione delle reazioni chimiche, ritorna tosto a ricercare il proprio equilibrio, nel modo stesso, che vediamo ribollire una massa di materia pastosa, nella quale i gas contenuti giunti ad un massimo di tensione erompono in gallozzole, e dopo la materia ricade su se stessa per incominciare di nuovo a distendersi, seguitando così sinchè dura la causa del ribollire. E forse questa è anche una delle ragioni per cui talvolta vi possono essere dei ritardi nelle manifestazioni microsismiche. Poniamo p. es. che l'attività endogena non abbia potuto ancora riunire tutte le sue forze in un punto e quelle sparse intorno ad un centro qualsivoglia tendano sin da principio a congiungersi. Ancorchè cessi la causa che l'ha promossa, l'attività sismica potrà continuare a svolgersi, e giungerà al suo massimo allorchè è già svanita la causa che l'ha formata. Anzi questo giuoco avviene qnasi sempre prima di una vera scossa di terremoto, perchè è necessario in tal caso che molte forze endogene si concentrino in un punto. Difatti quasi sempre prima di una scossa i tromometri dei punti relativamente vicini al centro sono in perfetta calma. Tali osservazioni ho voluto qui fare, perchè non sono inutili nel confronto degli abbassamenti barometrici coi moti microsismici e ci danno forse la spiegazione di molte anomalie, che s'incontrano. Non ho poi creduto bene farle da principio, sia perchè, quando pochi erano gli osservatorii, sopra i quali poteva discorrere, ho dovuto tenere un modo un poco diverso nel fare il detto confronto, sia ancora, perchè l'analisi delle osservazioni di questi ultimi mesi desidero farla più minuta, appunto avendo fra le mani maggior copia di dati.

Nota. Essendosi dovuta ritardare la stampa del bollettino per ragioni tipografiche ho creduto bene estendere a tutto l'anno 1877 la discussione dei moti microsismici, seguitandola con gli stessi criterii. Per la stessa ragione si è potuto aggiungere alla pubblicazione delle osservazioni microsismiche di Firenze per l'anno 1876 quelle dell'anno 1877.

Nel gennaio seguente il primo periodo barometrico è piccolo, perchè abbraccia soltanto due giorni, cioè il 5 e 6 ed ha confronto col periodo microsismico dal 4 al 7. Il periodo barometrico è ancor breve dal 12 al 15 e abbraccia i moti microsismici dei medesimi giorni col massimo per ciascun istrumento nel giorno 12. I tromometri però di Bologna, Velletri e Fermo tra il 14 e 15 manifestano un secondo massimo, al quale fan seguito degli altri nei giorni 16, 17 e 18 e di nuovo il 21 per Bologna e il 22 per Velletri e Fermo. Queste ultime manifestazioni possono però ritenersi sismiche, perchè non si manifestarono ad un tempo in tutti gli osservatorii. Il giorno 24 tutti i tromometri furono mossi, e sebbene a Roma il barometro non abbia segnato nessun abbassamento, ma sia rimasto stazionario, si può notare la coincidenza dell'onda barometrica, che cominciò a passare per le stazioni italiane sino dal 23 ed ebbe il massimo il giorno 26. Il 27 infatti avemmo i massimi valori tromometrici a Firenze, Bologna e il giorno 28 a Velletri e Fermo. Un ultimo periodo di moti incominciò il 29 e terminò il 3 Febbraio, ed ebbe i massimi il 31 Gennaio e il 1° del mese coincidendo coi massimi abbassamenti barometrici di questi due giorni. A Bologna, Velletri si ebbero alcuni moti isolati, e a Fermo continuarono sino al giorno 6. In questa stazione non fu risentito un abbassamento barometrico, il quale non passò la media annua a Roma che nei giorni 13 e 14; ma fu risentito in detti giorni dalle altre stazioni tromometriche.

Il barometro ricominciò a calare a Roma nel pomeriggio del 17 e la fluttuazione ebbe un massimo il giorno 18 ma riprese poi e continuò l'abbassamento più o meno sino al giorno 28, dando altri massimi nei giorni 22 e 27. I tromometri anch'essi diedero tre massimi il primo nel giorno 18; l'altro fra il 21 e 22 ed il terzo il giorno 27.

In Marzo il rapido abbassamento del giorno 1 fu annunciato dai tromometri coi moti dei primi tre giorni del mese, ma con massimi discordanti per le varie stazioni. Dal 5 al 15 un nuovo periodo di depressione atmosferica si manifestò e i minimi barometrici furono il giorno 8 e 14. I tromometri turbati in quasi tutti i detti giorni mostrarono dei massimi di due in tre giorni in ciascuna stazione, uno dei quali tra l'8 e il 9; i soli istrumenti di Bologna e Velletri notarono però dei moti sensibili il giorno del secondo minimo barometrico avvenuto il giorno 14. Il 17 il barometro calò di nuovo a Roma e ci dà forse la ragione dei moti isolati di Firenze nel giorno 16 e di Velletri nel giorno 17 e 18. L'ultimo periodo di abbassamenti barometrici seguì poi dal 18 al 26 coi massimi i giorni 20, 23 e 26. I massimi dei tromometri tutti agitati in questi giorni furono fra i giorni 19 e 20 : 21 e 22; 25 e 26.

Durante quasi tutto il mese di Aprile il barometro di Roma stette sotto la media annuale, ma i tromometri non notarono che 5 periodi di movimenti sensibili stante la minore facilità osservata in tutti gli anni, che hanno i tromometri di mostrarsi obbedienti alla pressione atmosferica nei mesi estivi. Detti cinque periodi coincidono tuttavia coi minimi barometrici verificati i giorni 4 e 6; 10; 17; 24; 30 e 1 Maggio e durarono quanto le fluttuazioni barometriche dal giorno 2 al 7; dal 9 al 12; dal 15 al 21; il giorno 24 e dal 28 al 30.

Nel Maggio continuò la poca sensibilità dei tromometri rispetto al barometro; tuttavia lasciando da parte i moti dei primi tre giorni a Fermo e a Foggia, perchè sono isolati, il periodo barometrico del 4 al 13, fu sentito un poco in ciascuna stazione; e mentre i minimi barometrici furono i giorni 6, 8 e 12, i massimi tromometrici seguirono fra il 6 e il 7; il 9 e il 10 e fra il 12 e 13, con un giorno o due di ritardo in ciascuna stazione. Di più Foggia non ebbe che un massimo solo il giorno 9 e Velletri non ebbe nessun moto sensibile i giorni 12 o 13. Il 15 di Maggio il barometro calò di nuovo a Roma di $1,^{mm}7$; ma questo abbassamento non ha riscontro che coi moti posticipati di Velletri e Foggia del 16 o 17. È da notarsi che queste sono le due stazioni che non manifestarono il massimo il giorno 13, perchè dunque non potrà dirsi che l'attività sismica, già crescente in quei giorni non ha avuto il suo massimo che nella nuova discesa del barometro, mentre l'attività microsismica delle altre stazioni rimase appena alterata da questa nuova discesa, perchè già aveva avuto il suo colmo nel giorno 13? Mi pare che la spiegazione non sia irragionevole e la possiamo ripetere per l'abbassamento barometrico che solo coincide coi moti del 20 e 21 a Velletri. Furono moti isolati quelli del 25 a Foggia, del 30 a Bologna e del 31 a Firenze e Foggia.

Giugno non ci presenta che due abbassamenti sotto la media annuale, l'uno sensibile fra il 14 e il 16, che non ha corrispondenza notevole, se non col moto tromometrico di Fermo, il quale è però in ritardo d'un giorno, sul massimo abbassamento che fu il 12. L'altro anch'esso piccolo avvenne tra il 23 e il 25 col massimo nel 24, precisamente come accadde pure per i moti tromometrici di Bologna, Fermo e Foggia. Firenze e Velletri non ebbero moti sensibili, ma tuttavia i valori tromometrici si alzarono alquanto, come può vedersi nel Bullettino dell'Osservatorio di Moncalieri diretto dal P. Denza. Lo stesso può dirsi delle osservazioni tromometriche nei giorni del primo periodo d'abbassamento barometrico. Finalmente osserveremo che anche i due moti isolati di Fermo e Foggia nei giorni 2 e 3 possono corrispondere al minimo della fluttuazione barometrica, che non oltre-

passò la media annua, ma che avvenne fra l' 1 e il 3 del mese nei varii osservatorii d'Italia.

Il mese di Luglio ci offre 5 periodi di moti sensibili tromometrici nei giorni 3–4; 9–11; 14–16; 18–20; 25–30 i primi due dei quali non corrispondono ad abbassamenti barometrici oltre la media annua; ma solo ai minimi dei giorni 2 e 8 segnati sul Bullettino del Collegio Romano. I moti tromometrici sono dunque anche questa volta in ritardo sopra i minimi barometrici di Roma, inoltre i moti tromometrici non furono sensibili, che in alcuni osservatorii, mentre gli altri non ebbero che un leggiero incremento. Il periodo dal 14 al 16 fu preceduto da un moto isolato il giorno 13 a Velletri, cui deve mettersi insieme il moto del 14 di Foggia. Questo periodo ebbe il massimo pel barometro il giorno 15, e per i tromometri il 15 o il 16. Il periodo dal 18 al 20 si manifestò principalmente a Firenze ove non era stato sensibile il primo abbassamento barometrico. Il massimo tromometrico anticipò questa volta il minimo barometrico di Roma nelle stazioni di Firenze, Bologna, Fermo e li accompagnò nella stazione di Velletri. Foggia non ebbe che un incremento insensibile il giorno 20. L' ultimo periodo barometrico dal 24 al 28 corrisponde, sebbene un poco in ritardo, al periodo ultimo tromometrico del 25 al 30. Questo periodo non si manifestò a Firenze che nel massimo diurno del giorno 26, giorno in cui anche le altre stazioni ebbero un massimo posticipato d' un giorno al minimo barometrico, che accadde a Roma il giorno 25. A Foggia però il massimo tromometrico fu il 27 e a Fermo si ebbe un altro massimo il giorno 30.

Dal mese d'Agosto in poi abbiamo ancora le osservazioni di Montefortino a cominciare dal giorno 17. In questo mese si osservano 4 abbassamenti barometrici sotto la media annuale di Roma. Il 1° fu osservato fra il 2 e il 4 ed ebbe il massimo il giorno 3 concomitante con quello tromometrico delle stazioni; meno di quella di Foggia, in cui accadde un giorno dopo. Il 2° periodo d'abbassamento fu dal 9 al 13. Questo non combina con nessun moto *sensibile* degli osservatorii, ma in tutti tra il giorno 11 e il 13 vi furono dei moti *quasi notevoli*. Lo stesso dicasi del piccolo abbassamento barometrico nel giorno 16, manifestato solo il giorno dopo a Montefortino e il periodo del 27 al 29, che non ha riscontro se non il 28 a Fermo. Il moto del 31 a Montefortino è del tutto isolato.

L'attività microsismica si è risvegliata nel Settembre 1877 come è avvenuto tutti gli anni e le osservazioni non ci manifestano, che un abbassamento barometrico a Roma oltre la media annua nel giorno 3 e un periodo più lungo di depressione dal 16 al 25. I tromometri invece ci manifestano 5 periodi

distinti. Il primo dal 2 al 6 corrisponde all' abbassamento del giorno 3. Il secondo dall'8 al 12 corrisponde ai minimi dei giorni 8 e 12. Il terzo dal 15 al 20 coi massimi fra il 17 e 18 corrisponde alla prima fluttuazione del secondo periodo barometrico, che ha due minimi il 17 e il 19: il quarto poi dal 21 al 24 ha il massimo fra il 22 e 23 e corrisponde all'ultima parte del secondo periodo barometrico, il cui minimo fu il giorno 22. Finalmente l'ultimo periodo tromometrico avvenne fra i giorni 26 e 29 col massimo tra il 27 e 28. A Montefortino cadde il 29, ma non ha riscontro che con un minimo barometrico avvenuto il 27 a Roma.

Ottobre ha due periodi sensibili di depressioni barometriche il primo dal giorno 1 all' 11, l'altro dal 25 al 27. Tuttavia la fluttuazione barometrica dei primi tre giorni del mese non ebbe riscontro con moti tromometrici, forse perchè l'attività endogena già erasi sfogata negli ultimi giorni del mese precedente. I tromometri mostraronsi però subito tutti agitati al nuovo diminuire della pressione atmosferica e diedero due massimi, l'uno verso il giorno 6 e l'altro fra il 9 e il 10, mentre il minimo barometrico fu il 9. A cominciare dal 13 il tromometro a Montefortino fu quasi sempre agitato: lo stesso avvenne a Velletri il giorno 13 e 18; a Bologna il 20; a Fermo il 18 e a Foggia il 22. Questi però furono moti isolati; devesi solo notare che il 18, giorno in cui si ebbero tre tromometri agitati e gli altri in incremento, seguì un minimo barometrico accaduto il giorno prima a Roma alle 5 pomer. Le agitazioni tromometriche del 25 corrispondono al 2.° periodo barometrico sopra accennato. Lo stesso può dirsi dei moti dal 27 al 29, sebbene questi abbiano l'aspetto di moti indipendenti dal barometro, a meno che non vogliansi unire con quelli dei primi due giorni del mese seguente, che corrispondono a un minimo barometrico del giorno 1 Novembre.

In questo nuovo mese poi i moti del 9 a Fermo e Montefortino sono isolati; incominciarono però il giorno 11 dei moti tromometrici concomitanti l'abbassamento barometrico che ebbe il suo massimo il giorno 12. I tromometri furono mossi sino al 16 e i massimi manifestaronsi sconcordanti, il che dimostra certamente la presenza di altre cause endogene in queste agitazioni. Moti isolati furono quelli del 17 a Foggia e del 18 a Montefortino. Il 21 poi tutti i tromometri ad eccezione di Foggia erano di nuovo conturbati e insieme il giorno prima era cominciato un periodo barometrico di abbassamento sotto la media annua, che ebbe i minimi nei giorni 21 e 25. Per i tromometri i massimi avvennero anche il 21 (a Velletri il 22) e il 25; Firenze però e Montefortino ebbero un massimo anche nel giorno 23.

Foggia non notò che un solo moto sensibile, e questo il giorno 24. Finalmente negli ultimi tre giorni del mese si ebbe insieme una depressione barometrica e un' agitazione di tutti e sei i tromometri; quattro di questi ebbero il massimo il giorno 30 insieme al minimo barometrico: Firenze e Bologna un giorno prima.

IX. Avendo passato in rassegna ad uno ad uno tutti i periodi di agitazione tromometrica e di abbassamento barometrico dal Dicembre 1873 al Novembre 1876, non ci resta altro che conchiudere riassumendo le principali conseguenze, che a parer nostro evidentemente emergono dalla discussione fatta.

1.° Ad abbassamenti barometrici d'una durata maggiore almeno di due o tre giorni in tutta l'Italia corrispondono sempre agitazioni sensibili o quasi sensibili dei tromometri, e questi moti durano quasi esattamente il tempo in cui il barometro si trova al disotto della media annuale.

In tutta la discussione delle osservazioni precedenti non si è visto eccezione a questo fatto, se non due o tre volte; e allora si è sempre osservato, che o l'attività sismica si è manifestata in luoghi non lontani per mezzo di terremoti, o l'eccezione è stata solo per alcuni osservatorii, non già per tutti.

2.° Al contrario nel tempo di innalzamenti duraturi del barometro, i tromometri, generalmente parlando, sono allo stato di calma.

Nelle nostre tavole avendo soltanto notati gli abbassamenti del barometro e avendo coll' esposizione fatta mese per mese verificato, che anche i moti microsismici non si manifestano generalmente in modo sensibile, che barometro basso, e verificandosi sempre che i moti microsismici a barometro alto non sono comuni a tutte le stazioni e in generale corrispondono a veri moti sismici, deve essere necessariamente vero, che a barometro normale od alto i tromometri sono calmi.

3.° I massimi microsismici quasi esattamente coincidono coi minimi barometrici di Roma, sia quando si considerino gli abbassamenti al disotto della media annua, sia quando si considerino le fluttuazioni barometriche durante un periodo sismico.

Espressamente ho notato ogni volta che vi era un periodo sismico non corrispondente ad abbassamento barometrico sotto la media annua, che i massimi tromometrici avvenivano quasi esattamente nei giorni dei minimi barometrici relativi: imperocchè non mi pare errato il giudicare, che allorquando l'attività sismica è in incremento, anche la sua sensibilità ai movimenti atmosferici cresce, come quella che non avendo più da vincere l'inerzia dell' equilibrio, si trova più facile a sentire l'influsso delle altre forze.

Lo stesso infatti avviene se mettiamo a paragone le diverse stagioni dell'anno rispetto ai moti microsismici, che in esse avvengono. L'autunno e l'inverno le manifestazioni microsismiche sono immensamente maggiori che non la primavera e l'estate; or bene la discussione stessa testè fatta per gli anni 1873–1877 e quella dell'anno 1872–73, già pubblicata dal P. Bertelli fanno vedere, come l'accordo tra gli abbassamenti barometrici e i moti microsismici è più perfetto nelle prime due stagioni; ed io ho già fatto vedere, che tali accordi ritornano assai perfetti anche per i mesi estivi, purchè si considerino moti sensibili dei valori assai minori che non l'autunno o l'inverno. Per le quali cose, a me pare sarà ben fatto nel progresso di tempo non tenere una scala intensiva costante per tutto l'anno riguardo ai moti sensibili, o non sensibili, ma variarla a seconda delle stagioni, considerando come grado di sensibilità minore o maggiore, il più o meno accordo con gli abbassamenti barometrici.

4° I moti tromometrici isolati non comuni a tutti gli osservatorii, non coincidono con abbassamenti barometrici e debbono riputarsi del tutto sismici, cioè della natura dei veri terremoti.

L'aver osservato che gli abbassamenti barometrici sono accompagnati da moti microsismici in tutti gli osservatorii e non essere i moti sensibili comuni a tutti gli osservatorii nei giorni di barometro alto o normale, ci fa lecito conchiudere che non sia la medesima causa, vale a dire l'azione meccanica atmosferica, che determini i moti isolati di alcune stazioni, e debbano questi attribuirsi perciò a cause del tutto endogene indipendenti dai movimenti atmosferici.

Queste sono le principali conseguenze che possono ricavarsi dalle osservazioni microsismiche, e sebbene non possano considerarsi come del tutto sicure, perchè ancora piccolo è il numero degli anni di osservazione, tuttavia non credo che possano essere molto lontane dal vero. Ringraziando perciò i gentili e solerti cooperatori di queste ricerche, mi lusingo che altri vorrà intraprendere i medesimi confronti con metodi diversi, ed estenderli mano mano alle nuove osservazioni, affinchè la moltiplicità dei fatti e la varietà delle considerazioni rischiari sempre più un punto abbastanza importante nelle manifestazioni endogene.

Fra le tavole aggiunte a questa memoria vi sono pure gli specchi delle osservazioni microsismiche fatte a Firenze nel 1876 e 1877. Queste fanno seguito a quelle pubblicate nella 2ª parte della memoria; si sono però tralasciate le curve a punti. Quelle degli anni seguenti sono pubblicate nel Bullettino del R. Collegio C. Alberto di Moncalieri insieme a quelle delle altre stazioni italiane.

TAV. I.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE.

GIORNI	Dicembre 73		Gennaio 74		Febbraio		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno		Luglio	
	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "	Barom.° *Roma* mm.	Trom.° *Firenze* "
1	6·0	12·1		4·8	0·34	3·6		7·3			3·3					
2		13·3		7·9		7·9		4·2			6·8	3·0				
3		12·7		6·7		5·4		5·4			3·0	3·0				
4		7·9		8·5		3·2		3·6		3·6	6·6	3·0				
5		4·8		5·4		3·0		3·6	3·9	7·9	5·2	5·0				
6		4·2		6·0				5·4	5·6	6·7	2·4	3·0				
7		8·5		4·2				3·6	3·2		4·9					
8		10·9		4·8		6·0		2·0	10·4		10·1	3·6				
9		21·2		3·0	2·7	5·4			8·7	3·0	9·9	7·3				
10		13·3		3·6	3·6	6·0	4·6	5·4	5·3	3·0	9·7	6·7				
11		8·5		7·3		9·1	6·4	10·9	10·3	6·7	4·1	6·0			1·3	
12				4·2		6·7	0·7	4·8	12·6	9·7	10·6	6·7			1·5	
13				5·4		6·7		5·4	13·9	4·2	13·8	6·0	3·1			
14				6·0		7·9		4·2	18·8	3·0		3·6	3·1	3·0		
15		4·8		4·2		4·8		4·0	9·1	4·2			0·6	3·6		
16		4·2				12·1		3·0	3·8		4·7	3·6				
17		6·7	0·7	6·0	2·0	23·0										
18		3·6	4·6	8·5	2·0	10·3		3·0								
19		3·0		4·2	7·3	6·7		3·0							1·5	
20				3·0	9·0	9·1	1·9	4·2							1·1	
21		3·6		3·0	4·8	3·6	0·1						1·7		1·3	
22				4·8	2·9	3·6							3·3	4·2		
23				3·0		3·0					4·2	3·0		4·2		
24		4·2				3·6					4·6	4·2			6·1	
25		3·6				3·6					2·9				5·5	4·2
26		3·0		4·2		3·6					5·1				5·8	7·3
27		11·5		4·2		3·6					7·9		0·6		0·6	
28	3·5	13·9	2·2	7·9	1·6	10·3		3,0	3·1				3·0			
29	5·6	10·3		9·7					1·6					7·3	1·9	
30		6·0		3·6											5·7	6·7
31		3·6		3·6											5·5	

TAV. II.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE.

GIORNI	Agosto 74			Settembre			Ottobre			Novembre		
	Barom°	Tromometro		Barom°	Tromometro		Barom°	Tromometro		Barom°	Tromometro	
	Roma mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "
1	5·1					10·2		3·0				
2	4·1							4·2				
3	2·7						2·5	7·9	18·5			
4							1·8	6·4	13·8			
5	0·4						0·6	4·8	6·5		5·0	
6	0·4	4·8					0·4		7·3			
7							0·6		9·7			9·9
8												
9	3·6	4·8	13·3									6·5
10					5·0							9·0
11		4·2	6·1		9·1	14·3			7·5	4·2		
12			6·5			9·4				10·7	3·6	9·9
13			9·0	3·0	9·7	18·2				12·1	5·4	8·0
14			6·1	1·8	6·0	11·4				18·3	10·9	18·7
15	1·3	5·5	11·6		5·0	6·5			6·3	9·9	5·4	8·5
16			6·5					12·7		10·1	5·4	8·5
17								3·6	7·0	10·7	5·4	13·8
18	1·6				4·2	0·8		1·2	6·1	3·7	3·6	9·4
19	2·0		8·7					3·0		7·6	4·2	9·10
20	0·9							4·2		16·1	12·11	25·9
21	1·1							3·6	18·2	7·6	5·4	10·9
22	0·7		12·1				5·2	3·6	16·7	4·2		
23	1·2						8·2	5·4	13·6	1·7		75
24	0·8						0·2	3·0	9·9	2·6	3·6	
25	0·9		8·7							4·2	4·8	10·9
26	1·6									3·6		
27	0·1		9·0						10·2	3·1		
28			9·4						6·8	6·6	6·7	10·2
29										3·2	4·2	10·9
30										2·1	5·0	9·4
31												

TAV. III.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Dicembre 1874				Gennaio 75				Febbraio				Marzo				Aprile				Maggio			
	Bar°	Tromom.			Bar°	Tromom.			Bar°	Tromom.			Bar°	Tromom.			Bar°	Tromom.			Bar°	Tromom.		
	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma	Roma mm.	Firenze	Bologna	Roma
1	1·3	4·2	8·2		1·8	4·8	11·6			7·9	6·8	21·8	2·3	3·6	11·9	32·1				6·2				13·0
2	2·5	6·7	14·5			3·0	8·2			3·0		8·1	7·9	10·3	11·4	17·4			6·5				6·1	
3	2·3	4·8	9·0				11·1			3·0		4·0	8·2	7·9	6·5	7·5			7·8					
4	7·0	11·5	11·4						5·4	4·2	17·9	7·6	4·1	3·6	6·7	4·2			7·0					
5	3·7	10·9	22·8				7·5		7·6	6·0	13·1	17·3	0·4	3·0	9·0	4·8	2·0	·0		7·4				
6		13·6	15·8		0·4	3·0	6·3	6·1		5·4	14·5	5·1		3 0		6·7	6·8		8 7				17·2	
7		4·2	16·0								7·3	6·5					6·8							
8		3·6	6·8						2·2	3· 6	13·8	6·4			9·3		4·2	7·9	10·9	7·8				
9	2·9	9·1	10 7	14·6					3·2			5·6			9·9									
10	4·9	8·5	18·7	14·3			8·2		6·7	3·0	6·1	8·2								5·0				
11	9·7	6·0	12·1	12·0			6·8		0·1	3·0		7·1	0·4	3·0				3·0		4·6			7·3	
12	14·6	6·0	18·9	9·4				6·8				15·6	3·1		8·5	4·0	4·4		7·5	5·1				
13	15·3	6·0	10·9	11·4					4·0		7·8	9·5	2·1	3·0	7·5	5·6	7·6	3·0	6·1	10·7				
14	12·1	3·0		17·4		10·3		21·4	6·1	5·4	12·1	14·2	3·6	9·7	9·9	7·2	1·3	6·7	16·5	24·2				
15	12·6	5·4	12·8	7·2					0·6	4·2	10·7		1·6	7·9	16·2	15·4	0·9	4·2		15·5				
16	11·8	7·3	19·6				15·5			3·0	8·5	4·0		5·4	10·2	19·5				18·1				
17		4·2	11·6	9·9	4·4		6·5	9·1	2·9		6·3				7·5					5·3			6·8	
18		11·5	17·9	11·8		7·3	10·7		4·1	6·1	11·6	22·2			14·3	4·7								
19	6·6	10·3	14·3	11·4		3·6	7·5		10·6	16·3	15·8	13·6	0·6			5·3			17·2					
20	15·6	9·1	15·0	20·6			19·9		8·9	20·0	22·8	18·6	6·7						17·7	4·4				
21	19·5	10·9	15·0	11·7		4·8			2·8	4·8	8·2	7·8	8·2										7·0	
22	13·6	11·5	17·5	15·2	7·5	10·3	12·1	14·8	3·4	3·0			7·3		9·2	18·2				6·5			9·5	
23	4·2	3·6	6·8			4·8	15·8	6·9	2·9	4·2	6·5	11·5	5·3			7·0	0·3	4·2	6·5					
24	0·8					3·9	11·9		8·3	10·9	19·6	6·1			7·2	25·7	4·8		6·8					
25		3·0	11·4			12·1	17·2	9·3	11·9	18·8	25·7	32·6				13·6	6·8	4·8	7·3	6·4			7·5	
26	3·9	5·4	8·5	14·8	0·2	7·3	17·0	5·8	6·2	3·6	8·0	6·2					5·0	4·2		5·4	1·8		18·7	
27	2·6							8·1	9·3	6·7	11·4	10·4						3·0		13·5	5·4	3·0		5·6
28	3·5	5·4	9·9	5·6		3·0		8·7	8·1	5·4	17·2	6·9	1·2	6·0	13·1	12·4				5·5	4·6			5·3
29	8·4	20·0	23·0	7·5									5·6	10·9	16·2	10·0					6·5			5·5
30	8·4	19·6	19·1	5 8				9·5					3·5	18·2	27·9	14·4					6·9	10·9	19·4	10·2
31	5·1	4·2	12·8	11·0		9·1	9·7	18·4								8·9								

TAV. IV.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Giugno 1875				Luglio				Agosto				Settembre				Ottobre				Novembre			
	Bar°	Tromometro			Bar°	Tromometro			Bar°	Tromometro			Bar°	Tromometro			Bar°	Tromometro			Bar°	Tromometro		
	Roma	Firenze	Bologna	Roma	Roma	Firenze	Bologna	Roma	Roma	Firenze	Bologna	Roma	Roma	Firenze	Bologna	Roma	Roma	Firenze	Bologna	Roma	Roma	Firenze	Bologna	Roma
	mm.	"	"	"	mm.	"	"	"	mm.	"	"	"	mm.	"	"	"	mm.	"	"	"	mm.	"	"	"
1					0·2												1·3		8·2	8·9	4·5			
2					1·1						13·7		1·0			4·1			9·0	12·8	3·0			
3	2".4				0·9				0·8							11·5								6·4
4	3·8			6·6					7·4			5·2				5·5								4·4
5	1·9								7·2	6·7	9·5	6·7												
6		3·6							3·7	6·0		6·1									1·2			
7										3·0		5·1									6·2	7·3	16·9	19·8
8																			8·2		6·5	9·1		0·9
9					2·3	6·7	7·3	9·8			10·1										1·9	6·7		6·7
10					1·9	7·3	11·6	6·7										4·8	8·6			12·1		5·6
11						3·6											5·2	5·4	13·0	3·3	4·1	12·7		15·4
12																	10·2	7·9		18·9	1·8	9·1		13·7
13					0·9												12·6	6·0	15·7	11·0		3·6		4·3
14																13·3	18·9	9·7	20·4	19·0				
15																6·9	18·4	7·3	14·5	12·3		4·8		
16	0·8				5·5			4·0								15·7	8·7	4·8		8·3				
17	0·7			6·9	6·0			4·5								6·1	1·6	5·0		4·4				
18					3·4	7·3	9·4															3·0		
19		4·8		4·2	1·3			4·2													1·3			
20		7·3	9·9		0·8														8·2	6·2	13·6	6·7		
21					2·3												0·7	3·6		4·4	12·8	6·7	8·2	4·6
22		4·2	11·6		2·4		9·0	6·7									4·8		11·8		3·6	4·2		
23		3·0	6·1	4·9	2·8			5·0								4·5	6·4	6·7	16·1	7·6	1·4			
24					1·5						9·4		1·1				3·5	10·3	15·7	24·1	0·9			
25	1·0						20·8				8·2			3·0	3·8	5·2	5·0	5·4	8·2	6·1	9·4	8·5		
26	3·4						21·9									4·5	1·1			5·0	9·9	12·7	12·2	
27	3·4														10·6	24·0					3·1	7·9		
28	2·7															4·4	6·1	12·7	22·7	13·3	9·1		9·2	
29	1·5								0·9				3·8	4·8			5·5	3·6		6·2	8·4		8·6	
30	0·3	3·0	10·7					4·2					5·0	3·6			4·8		9·4	5·7	14·1	7·3		
31										4·2		8·9					4·9			7·1				

TAV. V.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Dicembre 1875					Gennaio 1876					Febbraio					Marzo					
	Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				
	Roma mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Camerino* "	*Roma* m m.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Camerino* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Camerino* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Camerino* "	*Fermo* "
1	13·3	3·9	12·3	10·02	17·8			3·9													—
2	6·9	4·8	9·1				5·5			5·3						3·4	5·4	4·5	12·57	10·7	—
3	17·4	3·0	6·9	10·23	14·2		3·0								5·3		3·0	3·8			—
4	21·1	0·0	12·5	8·59	12·2	2·6			7·9	12·5					3·6			2·7			—
5	15·5	27·9	6·4	14·06	3·6	1·7	7·9	8·6	48·47	7·1	9·6	7·3	5·4	16·33	14·2			2·5			—
6	11·7	12·1	6·9	10·67	14·2			3·6	8·84		10·4	6·7	4·1	21·73				2·5			—
7	5·7		12·8	8·69	8·9		9·1	9·4	25·95	14·2	5·4	4·8	6·1	9·50		3·5	4·2			8·9	—
8	1·3		9·6	24·79	7·1		19·4	8·4	11·46	26·7	5·0	6·0	5·6	12·28	5·3	2·3	5·4	4·2	9·56	12·5	—
9						2·1	28·5	14·2	20·05	28·5		4·2	4·6			2·9	7·9		8·54	16·0	—
10		3·6			5·3		5·4	5·6	9·58	7·1	5·6	16·4	8·6	11·14		10·3	13·5	9·6	11·43	26·7	—
11	2·3				10·7			8·9	8·19	5·3	7·8		6·7	10·27	8·9	6·8	11·5	14·3	10·56	23·1	—
12	0·4					2·3	14·5	9·1	28·49	5·3	1·8		3·7		3·6	2·8	10·3	10·0	11·02	20·0	—
13		3·0	5·7			6·2	14·5	12·8		10·7			3·4			3·8	8·5	5·4		10·7	—
14						0·6	6·0	8 8		8·9							8·5		8·02	3·6	—
15								5·6		3·6			3·1					2·7		3·6	—
16										5·3		6·0			5·3		6·0	3·2		5·3	—
17							3·6	3·7	12·38			10·9			3·6	2·6	6·0	3·9			—
18					10·7			2·9	8·10							11·6	11·5	12·4	8·51	8·9	—
19			7·4		5·3								2·9			7·8	13·3	9·1	15·84	7·1	—
20												6·0				9·4			11·97	5·3	—
21			2·6				3·6	5·3				3·6				5·5					—
22							4·8	5·9	12·87	7·1											
23								2·9		7·1					3·6	1·1	6·7	12·9	13·43		
24								2·9			2·0	6·6	3·7	16·38	5·3	5·8	8·1	10·8		7·1	70·84
25		3·0					3·0					3·6			8·9	4·2	13·2	14·0	7·86		
26								3·2					3·4		3·6	7·7	12·9	10·8	19·10	14·2	37·50
27			4·4	24·61	7·1			3·2				7·3			5·3	2·8	3·8	6·1			
28			3·7	18.32	8·9						2·9	6·6	5·5	11·87	8·9	4·1					
29							3·0	2·7	7·69			1·2			8·9	4·9					
30								2·7								3·3					
31		3·0	7·1	12·09	8·9			2·5								7·1					

TAV. VI.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Aprile 1876						Maggio						Giugno					Luglio				
	Bar°	Tromometro					Bar°	Tromometro					Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro			
	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Camerino	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Camerino	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo
	mm.	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"
1	6·3							3·6					1·5	3·0				0·5				
2	2·7							8·5		7·99	7·1	36·25	1·4					0·4				
3	0·7							6·0					1·2					0·9				
4	0·7				3·6								0·6									
5	7·0		2·7	21·61	5·3	16·67																
6						20·08	5·3	4·2	3·4													
7	0·2				10·7		8·5	4·8	5·5		5·3	16·67										
8				45·36		19·42	9·1	6·0	9·1	10·15	14·2	22·92	1·3									
9						11·79	2·9	7·3	5·3	10·10	7·1	25·71	3·6									
10							4·8						6·1									
11							3·5			7·20		15·30	2·6	6·15	3·4		49·58					
12	1·7		2·7										2·8	6·55		7·29		0·2				36·46
13	3·8	5·95	3·3	10·73	10·7	16·67	1·7	4·2					1·9					1·3		2·7	23·69	21·00
14	5·3	5·65	6·2	7·64		37·50	7·9	3·0	7·3	13·14	3·6	38·54								2·7	20·60	20·83
15	6·2	3·63	4·4		5·3	15·63	5·0	7·2	4·5	11·79	10·7	62·00										
16	5·6	6·15	3·8	17·17		20·83						26·37										
17	1·1	3·23			12·5	44·80							7·1									
18	1·4		3·1	7·86	3·6		2·7						6·7			9·82	15·01					
19	2·6	5·85	4·8	11·44	21·4	16·67	11·5	9·1	3·6	15·72	3·6	18·96						1·1				
20						12·75	2·0	5·5	4·3	25·16		16·67						3·4				
21	4·6	3·0		19·05		11·92							0·6									
22	3·9		4·4	11·53		10·91							0·7									
23	4·6			16·21									2·1									
24	2·0	3·0	2·9	8·59		18·75		8·5					2·5									
25							1·9						3·4					2·3	3·4	5·1	6·87	
26							4·2	4·6	3·3			12·50	1·0	3·73			11·96	3·7		6·0		50·29
27	4·3				3·6		2·1	8·3		16·60	3·6	19·80		6·76	2·8		28·13	1·3				25·00
28	0·2	14·8			17·8			8·8										1·7				
29	1·2	7·4	3·6		7·1													1·6				
30		7·3			5·3	17·72																
31																						

TAV. VII.

Confronto dei moti notevoli microsismici cogli abbassamenti barometrici di Roma sotto la media annuale.

Giorni	Agosto 1876					Settembre					Ottobre					Novembre				
	Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro			
	Roma mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Fermo* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Fermo* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Monte Fortino* "	*Roma* mm.	*Firenze* "	*Bologna* "	*Velletri* "	*Fermo* "
1	0·5					2·8	5·9	9·9	6·60	54·17	0·8	6·2	5·9		31·26	10·0	4·9	4·5	29·46	—
2	0·4					1·1	11·6	3·2				4·0	3·2	8·19		5·0	7·5	4·3	37·01	—
3																	5·2	3·6	27·81	—
4																				—
5																		5·9	26·97	—
6																			18·39	21·88
7																2·0	12·4			10·41
8	0·8				15·92	5·7	7·2	6·9	6·38							6·1		3·6	21·44	43·75
9	0·1			9·50	10·58	4·8	3·8	2·9								5·8		5·3		28·19
10						1·5				14·59						3·6	4·3	4·9		51·54
11																	3·9		12·33	22·92
12						4·3											5·3	5·1	7·86	
13	0·2		4·9			3·2	4·6	4·4		11·67							5·9	6·5	9·42	73·04
14						8·0	7·3	7·4		131·97								3·3		
15						5·4	5·6			12·50	1·6							3·4		
16											3·6					1·3		5·4		
17							5·8	3·7			5·7	3·4		7·64				3·4		
18											6·8	5·6	2·9	9·23		0·6	4·5	9·1	10·63	59·71
19											8·2	3·2	2·9			1 2		3·3		30·54
20											5·4	5·9	3·7		12·50	7·4		4·3	22·75	
21											5·3	4·1	5·2	6·46		10·3	3·4	5·4	8·01	10·41
22			3·5								6·0	3·2	5·5	23·93		5·6	4·3	4·9		18·75
23	3·4			14·08	32·50								2·9			1·1	3·4	3·5	13·27	27·08
24	5·3	7·0											4·1							11·79
25	8·8	8·9	15·0	24·42	112.46						0·2	3·5	5·1							
26	3·7	4·9	2·7	11·79	21·88	1·6					1·4		4·3							
27		3·6			13·54						1·9		4·3	47·09				4·7		
28	0·7	6·4	3·6	9·26	18·58						1·2		2·9	6·75		2·8	5·7	5·6	12·77	19·46
29						0·7					0·7		4·5			3·4	5·6	6·3	8·14	37·50
30						0·5	3·4				0·8					0·6		4·7		15·30
31	1.7	10·9	4·9								6·8									

TAV. VIII.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Dicembre 1876					Gennaio 1877					Febbraio					Marzo				
	Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro				Bar°	Tromometro			
	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo
	mm.	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"
1											3·8	5·14	5·9	27·51	22·92	10·7	7·29	4·7	13·53	56·25
2												5·75	4·5	27·70	22·92		6·09		27·62	15·63
3			2·5									4·94	2·9	12·91	10·41		3·68	2·8	9·30	26·37
4	10·0	10·78	5·5	6·68	27·08		4·64	3·9	9·82						16·67					
5	6·2	5·34		10·31		1·9	7·56	4·3	8·02	10·41			3·3		20·83	5·1		5·1	44·47	
6	6·0	6·86	3·7		20·33	1·6	5·65	5·5	6·80	26·05				12·63	38·88	10·0	10·30	5·1	11·68	12·50
7	2·9	6·25	3·2										3·2			12·7	3·64	3·5	8·92	26·05
8	1·7	7·56			11·88											16·5	4·89	8·8	18·66	13·54
9	4·2															15·9		5·9	13·81	19·80
10	4·3		5·7	9·99	77·08											10·4	3·66	3·3	27·55	13·21
11	5·1		4·2		22·92								2·9			6·4		2·7	11·90	16·67
12	0·4		4·5		69·79	6·9	5·04	6·5	13·43	23·45								3·8	9·97	36·79
13					15·22	2·5				16·67	2·0	5·75	2·9	6·96		3·7				
14			5·3			0·8		2·6	12·15	10·41	2·0	5·34		7·86		3·9		2·9	8·10	
15		3·04	3·7	8·30		1·7		2·7		20·12						0·5				
16	5·0	6·96	6·0	8·69	68·86				10·12	20·83							3·67			
17	6·9	3·93	8·0	7·79	142.51			3·1	10·54	22·20		3·83	3·5	12·77	13·54	0·6			6·79	
18	6·9		2·6							26·05	2·1	5·34	6·6	12·77	50·00	0·2			7·79	
19	9·3	4·94	3·9	7·99	12·50					14·59					14·59	7·2	7·90	3·4	10·48	17·80
20	8·8	8·58	2·7	7·07	10·41					12·50	4·7	3·33			15·22	11·0	4·84	5·3	18·88	20·12
21	4·4	8·58	4·9	9·24	20·83				45·56	27·08	14·8	6 05	3·9	14·57	15·63	7·5	9·11	3·6		19·46
22	4·7	9·48	5·7	15·72	38·21			5·7		32·62	15·2	3·73	3·4	13·15	38·87	6·0	8·51	4 2	15·72	41·67
23	10.0	5·45		10·93				4·1	19·93	30·21	10·4	3·73	3·5		44·80	8·1	5·50	2·6	10·41	11·12
24	10·1	7·66	7·7	17·25	16·67		2·32	2·9	14·82	15·30	4·1					5·4	5·46	2·6	7·50	
25	6·2	5·55	3·6	11·59	22·92				9·33		3·6					4·2	5·45	4·1	10·61	
26	3·1		4·1	8·75	25·00	5·3	5·14	4·9	9·82	10·12	6·5					7·0	10·92	6·1	8·84	27·08
27		4·13		21·20	20·83	2·3	9·89	9·4	19·87	42·38	7·7	5·85	6·9	10·80	24·29		6·70		7·20	
28				6·64				6·8	21·20	70·84	6·1	11·60	3·2	8·02	17·38					
29							4·54	3·9	7·30	10·27										
30							4·84		19·25	26·37										
31						3·0	11·00	13·0	15·78	72·92										

TAV. IX.

CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Aprile 1877						Maggio						Giugno						Luglio					
	Bar°	Tromometro					Bar°	Tromometro					Bar°	Tromometro					Bar°	Tromometro				
	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia
	mm.	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"
1							6·0					13·75												
2	2·5						1·9				14·88	15·40					38·04							
3	0·1											13·20						13·20			2·9			
4	3·4	5·48	2·5		45·12		4·0														3·2			9·90
5	3·0	5·47		74·6	11·12	11·55	5 2		3·3															
6	4·3					9·35	6·9	3·73	4·3	8·94	25·08	12·10												
7	1·1			7·32		13·20	4·5	4·34				12·65												
8							5·0					15·95												
9	3·8		4·3			11·00	3·2	4·94		7·12		17·20									7·9		29·17	13·75
10	10·0	11·40	3·7	13·19			0·7	7·06	2·8	7·50		11·55										16·43		12·10
11	7·5	3·73	2·7	10·97	10·41		0·5																	10·45
12	5·4	3·13					2·6		3·7		13·87													
13	0·6						0·7	3·13														8·46		
14													0·4						1·9					11·00
15	1·3						1·7						0·8						6·7		2·6	7·04		
16	6·4		4·2		12·92					7·45		14·30	0·6				11·12		3·2		4·9		15·63	14·30
17	17·0	8·48	14·7	13·91	61·96	10·45				11·13														
18	12·8	5·24	5·7	13·16	52·08	15·95	1·8												0·2	11·20	3·3		17·38	
19	10·6	3·93	2·5	7·42	16·67	9·90	5·8												1·5	7·06		7·99		
20	10·0		2·7		56·25	10·50	8·8			8·29									1·0	5·65				
21	3·5			6·88	10·41		3·7			7·77														
22	4·7			7·20																				
23	7·3												0·3				20·29	17·05						
24	8·7	6·96	8·7	10·81	55·54								0·9		4·5		41·13		0·2					
25	4·9											18·70	0·5		3·1		11·25		2·6			8·47		
26	4·6					15·95													1·8		4·2	11·17	33·33	12·10
27	2·7																		1·8			9·02	11·76	18·15
28	3·2			6·63		10·45													0·7			8·39		16·50
29	4·4	4·64	5·1		46·95	15·40																	13·00	16·50
30	5·7	3 13				11·00			2·6														13·54	11·55
31								7·66				11·55												

TAV. X.

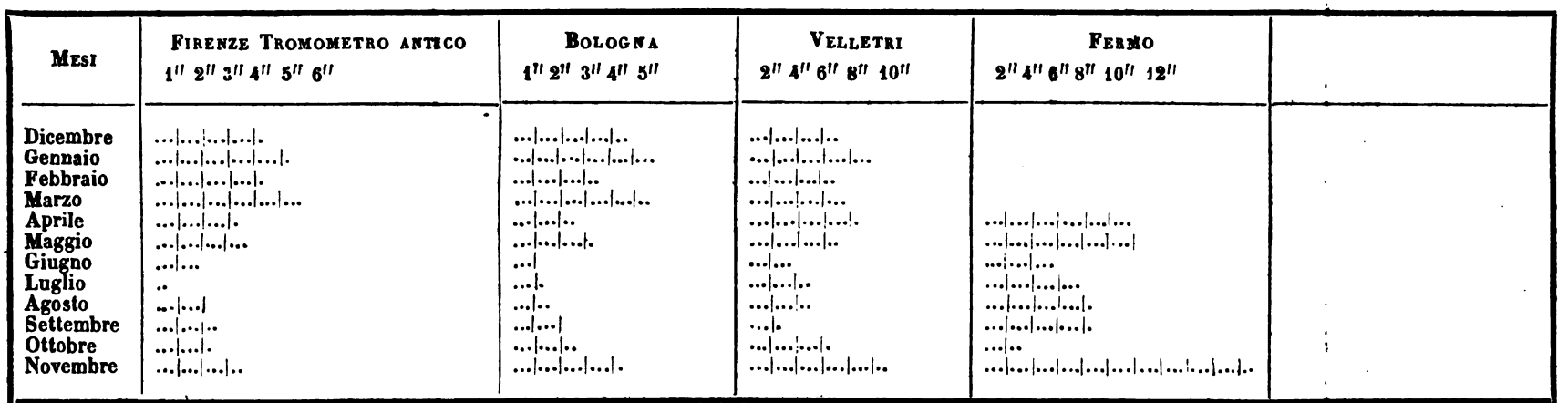
CONFRONTO DEI MOTI NOTEVOLI MICROSISMICI COGLI ABBASSAMENTI BAROMETRICI DI ROMA SOTTO LA MEDIA ANNUALE

GIORNI	Agosto 1877							Settembre							Ottobre							Novembre						
	Bar°	Tromometro						Bar°	Tromometro						Bar°	Tromometro						Bar°	Tromometro					
	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Monte Fortino	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Monte Fortino	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Monte Fortino	Roma	Firenze	Bologna	Velletri	Fermo	Foggia	Monte Fortino
	mm.	"	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	"	mm.	"	"	"	"	"	"
1							—								1·5								8·14				—	2·08
2	2·3	3·43					—		3·33	3·4				2·29	4·9										22·03		—	3·13
3	4·5	4·13	2·7	10·28	21·33		—	0·9	6·35			14·59			5·3												—	
4	0·7					13·20	—		6·76	3·7	7·37				0·8						4·17						—	
5							—			5·6		20·83			1·5		2·9	7·93	11·79								—	
6							—				18·89				4·9	9·08	4·2	21·40	20·37	15·95	5·36						—	
7							—								5·2	3·33	3·9	10·81	47·91	19·86	3·00						—	
8							—							22·79	9·8				25·00	16·45	2·08						—	
9	1·1						—		3·13						13·8	9·58	7·5	26 40	36·12	26·96	4·17					11·45	—	2·08
10	1·7						—		5·14	3·4		40·25			6·1	10·69		23·92	70·84	29·70	5·13						—	
11	2·2						—					15·63			2·3		3·3	14·05	25·00	9·90		2·1			11·39			11·46
12	2·7						—				27·40											4·8	4·13	4·9	81·34	15 54		3·21
13	1·1						—														2·20	1·2	4·34	3·1	32·47	20·83		20·83
14							—											10·01					4·64	3·1	7·69	26·46		
15							—							9·04							3·75		10·29	2·9	8·18	12·50		
16	0·3						—	0·7						2·16							3·45				7·14			2·50
17							4·17	5·1		4·4	6·74	10·41	12·10	3·75							3·75						17·05	
18								3·3			15·44	12·50	10·45					7·04	12·50		6·46							2·20
19								4·2					9·35								6·96							
20								3·4			7·86						2·7					2·9						2·08
21								2·8	7·56	3·7				4·59							2·08	9·9	7·06	6·5	8·41	38·21		31·96
22								6·1	5·65	5·9		20·83	17·05	17.71						1·00		2·2		2·7	15·14	34·71		2·79
23								5·7	8·78	11.1	6·88	12·50	20·90	2·79								2·0	3·52	2·6	9·77	10·83		35·42
24								2·9		3·9	7·66	27·08		4·17								0·3	3·33	2·6			11·55	3·45
25								1·7							1·0	3·81	2·8	20·01	12·50		2·08	10·7	14·32	8·8	37·92	61·13		195.85
26										4·4		12·50			4·8							1·3	10·39		22·76	38·87		6·96
27	0·6									5·4	23·64	16·67		2·37	2·7					9·90	4·17							
28	0·8				12·50				3·43	4·9	16·86	27·08	16·50	2·79						14·85	3·75	8·5	4·34	5·6	7·49	25·00		5·00
29	0·7									2·9	7·60	20·83		3·87				13·02		12·65	4·80	8·8	13·01	6·5	8·19	30·84	9·90	5·54
30																						11·4	6·96	3·3	16·21	60·42	11·00	7·62
31							5·00																					

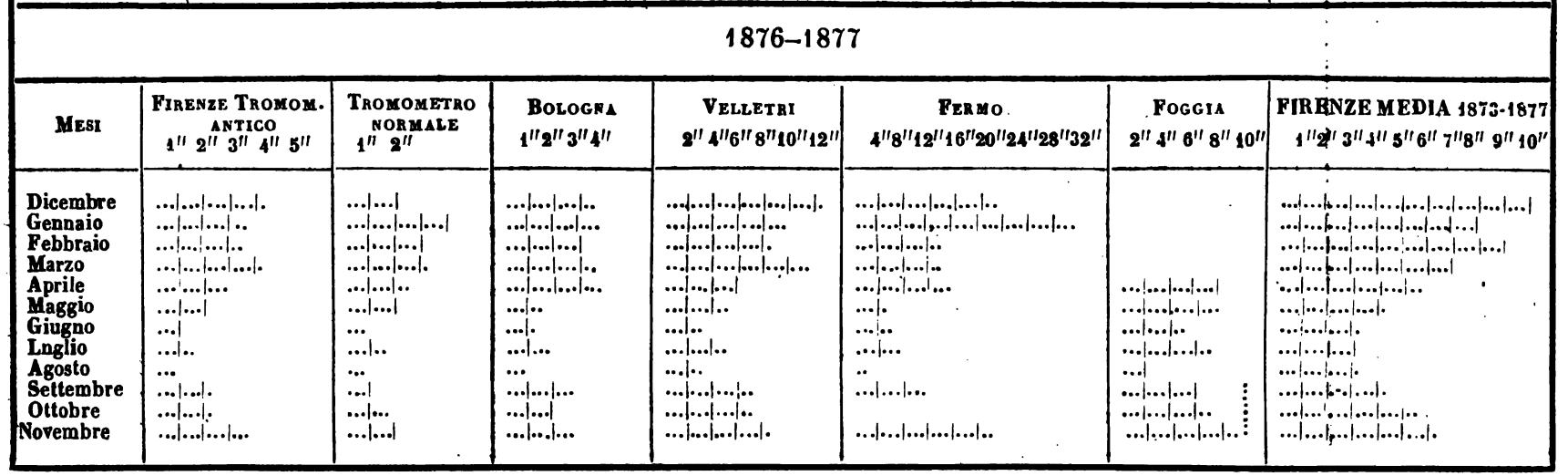
TAV. XI.

1875–1876

TAVOLA GRAFICA DEI VALORI ANGOLARI DELLE MEDIE TROMOMETRICHE MENSILI



1876–1877



TAV. XII.

OSSERVAZIONI MICROSISMICHE DEL COLLEGIO ALLA QUERCE DI FIRENZE NELL'ANNO METEORICO 1876—77.

Giorni del mese	Dicembre 1876				Gennaio 1877				Febbraio			
	Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna	
			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1	16	2·72	—	5·45	17	1·82	—	4·84	18	5·14	9·5a	9·08
2	20	1·83	—	4·24	14	1·31	—	4·84	16	5·75	2·35p	7·26
3	18	2·72	—	4·84	17	2·82	—	5·45	18	4·94	9·48a	6·05
4	37	10·77	8·20a	18·16	15	4·64	8·42p	9·68	17	1·82	—	4·24
5	25	5·34	12·2p	9·08	17	7·56	5·18a	13·93	16	1·61	—	4·24
6	19	6·86	4·12p	16·35	17	5·65	1·19p	10·89	16	1·01	—	1·82
7	18	6·25	8·51a	12·11	17	2·92	9·45	6·05	15	1·11	—	3·03
8	18	7·56	7·21p	12·11	16	2·22	11 12	6·05	14	1·12	—	4 84
9	18	1·51	—	3·03	17	0·91	—	3·03	17	1·51	—	4·84
10	19	1·41	—	4·24	15	0·40	—	1·21	17	1·51	—	3·03
11	19	1·01	—	4·84	16	1·11	—	4·84	11	1·92	—	4·84
12	19	1·41	—	4·24	19	5·04	3·59p	12·11	19	2·62	1·03p	6·66
13	18	1·11	—	4·24	17	2·32	7·55a	6·66	16	5·75	1·00p	10·29
14	16	1·71	—	4·24	15	2·82	8·9a	6·05	17	5·34	2·05p	10·90
15	16	3·04	—	5·45	19	2·22	—	4·84	16	1·01	—	3·03
16	17	6·96	4·12p	13·32	16	1·61	—	4·84	19	2·82	7·10a	12·71
17	18	3·93	5·35a	9·08	16	1·11	—	3·63	19	3·83	9·50p	18·16
18	19	1·31	—	4·24	11	2·62	—	4·84	15	5·34	5·52p	9·69
19	18	4·94	7·8a	9·08	17	1·11	—	4·24	17	0·91	—	4·24
20	17	8·58	7·38a	16·95	18	1·51	12·12p	6·05	15	3·33	9·50p	12·11
21	16	8·58	6·10p	15·14	14	4·44	—	4·84	18	6·05	5·20a	10·90
22	20	9·48	7·48p	19·37	18	2·42	8·57a	6·05	16	3·73	3·45p	8·48
23	18	5·45	6·8a	12·11	15	2·52	5·15a	6·05	15	3·73	7·33a	7·87
24	16	7·66	7·15a	18·16	15	3·33	5·15a	6·05	15	1·31	—	4·24
25	14	5·55	5·30p	11·50	12	2·72	—	5·45	15	0·72	—	3·03
26	20	1·51	7·33a	6·05	17	5·14	9·50p	18·16	16	2·82	1·58p	6·05
27	19	4·13	5·30p	9·08	18	9·89	1·57p	21·19	14	5·85	8·19a	12·71
28	14	1·61	—	5·45	13	2·72	8·15a	6·05	21	11·60	7·40p	36·32
29	15	1·21	—	3·03	17	4·54	8·32p	12·71				
30	18	0·71	—	2·42	20	4·84	12·17p	12·11				
31	15	1·31	—	4·84	18	11·01	4·20p	21·19				

Giorni del mese	Marzo				Aprile				Maggio			
	Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna	
			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1	15	7·29	7·40a	12·11	15	0·03	—	1·21	19	1·01	—	3·03
2	18	6·05	18·30a	12·11	15	0·61	—	3·03	17	2·02	—	4·24
3	20	3·68	5·22a	13·32	14	0·05	—	1·21	17	0·10	—	1·21
4	16	1·21	—	4·84	22	5·48	8·38p	12·71	17	0·30	—	1·21
5	15	1·83	—	4·24	18	5·37	4·53p	10·90	18	0·71	10·6	6·05
6	18	10·30	8·15a	18·16	16	2·46	5·8a	9·08	15	3·73	10·49	6·05
7	16	3·64	5·30a	7·87	17	1·22	—	3·63	20	4·34	7·0	9·08
8	13	4·89	5·55a	12·11	18	0·61	—	3·63	18	1·61	—	4·24
9	13	2·46	—	5·45	18	1·82	8·35p	6·05	19	4·94	9·12	9·08
10	13	3·36	5·17a	9·08	21	11·40	10·2p	24·22	14	7·06	4·34	13·92
11	15	2·43	10·10a	6·05	18	3·73	9·51a	9·08	16	2·72	7·33a	7·26
12	15	0·66	—	2·42	15	3·13	1·12a	6·66	16	1·41	—	4·24
13	18	2·45	12·7a	6·66	17	0·10	—	0·61	14	3·43	10·22a	10·90
14	17	2·46	9·44a	6·05	17	0·30	—	1·21	19	2·32	—	5·45
15	14	1·26	—	5·45	17	0·30	—	1·21	16	1·82	—	4·24
16	14	3·67	2·30a	10·90	20	1·56	—	4·84	15	1·92	—	4·24
17	17	1·83	—	4·84	22	8·48	8·1p	16·95	14	0·50	—	1·82
18	17	1·21	—	5·45	25	5·24	4·57a	12·71	15	0·91	—	3·03
19	15	7·90	8·9a	13·32	21	3·93	5·13a	9·08	15	2·02	—	4·84
20	10	4·84	7·31a	9·69	20	1·11	—	4·24	16	2·22	5·6	6·05
21	17	0·11	2·30a	16·95	19	2·22	—	5·45	17	1·82	6·28	7·26
22	21	8·51	8·50a	21·2	16	1·71	—	4·24	13	0·50	—	1·21
23	20	5·50	12·47	11·70	20	2·02	11·14a	6·05	16	0·40	—	1·82
24	19	5·46	2·34	12·11	19	6·96	7·3a	12·11	16	0·30	—	1·21
25	18	5·45	10·0	18·16	17	2·82	5·30a	6·05	17	1·31	—	3·03
26	18	10·92	10·36	16·95	19	0·50	—	3·04	17	0·30	—	1·82
27	18	6·70	7·32	12·11	15	1·92	—	4·84	14	0·10	—	0·61
28	16	1·85	—	4·84	18	1·31	10·6p	12·11	18	1·11	—	4·24
29	18	0·10	—	0·61	17	4·64	8·24a	11·50	17	1·31	—	4·24
30	15	0·72	—	5·45	18	3·18	6·0a	6·7	16	1·31	—	4·84
31	16	0·3	—	1·21					12	7·66	11·53a	18·16

TAV. XIII.

OSSERVAZIONI MICROSISMICHE DEL COLLEGIO ALLA QUERCE DI FIRENZE NELL'ANNO METEORICO 1876-1877

Giorni del mese	Giugno 1877				Luglio				Agosto			
	Osservazioni	Media diurna	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna	
			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1	16	2·32	10·13a	6·05	16	0·30	—	1·21	14	0·20	—	1·82
2	17	2·12	6·41a	6·05	13	0·30	—	1·21	19	3·43	10·21p	15·74
3	16	1·01	—	3·03	16	2·82	10·24p	13·32	18	4·13	1·51p	9·48
4	17	1·41	—	4·84	17	2·32	9·30a	7·26	18	1·01	—	3·03
5	18	0·50	—	3·63	16	1·21	—	4·84	14	0·91	—	1·82
6	19	1·31	—	4·84	11	0·30	—	1·82	19	0·50	—	2·42
7	16	0·40	—	1·82	14	0·10	—	0·61	15	1·31	—	4·84
8	17	0·30	—	1·21	13	0·40	—	2·42	16	0·50	—	1·22
9	19	0·91	—	3·03	16	1·71	—	4·84	16	0·10	—	0·61
10	15	0·40	—	1·82	18	1·01	—	3·63	15	0·38	—	1·21
11	18	0·40	—	2·42	19	0·30	—	3·03	15	0·30	—	1·21
12	16	0·10	—	1·21	15	0·40	—	0·61	15	0·91	—	2·42
13	18	0·30	—	1·82	17	0·50	—	1·21	11	0·61	—	1·82
14	13	0·10	—	0·61	15	1·01	—	1·82	15	0·10	—	0·61
15	15	0·10	—	0·61	13	0·61	—	1·82	12	0·30	—	1·82
16	18	1·01	—	3·63	18	11·20	10·5a	18·16	18	0·30	—	1·21
17	16	1·31	—	4·24	17	7·06	8·28p	18·16	12	0	—	0
18	15	1·61	—	3·63	17	5·65	7·36p	10·90	19	0·10	—	0·61
19	13	0·81	—	2·42	15	2·72	2·0p	6·05	16	0·40	—	1·82
20	16	0·40	—	1·82	15	1·61	—	4·24	17	0·10	—	1·21
21	16	0·71	—	1·21	16	0·61	—	2·42	16	0·10	—	0·61
22	16	0·30	—	1·21	15	0·30	—	1·82	17	0·30	—	1·82
23	17	1·11	—	3·03	15	0·50	—	1·82	16	0·50	—	3·03
24	16	1·31	—	3·03	15	0·10	—	0·61	18	0·30	—	1·21
25	15	1·11	—	2·42	13	0·91	—	2·42	15	0·30	—	1·82
26	17	0·71	—	3·03	13	2·62	4·45a	8·48	18	0·71	—	3·63
27	15	0·30	—	1·21	18	0·81	—	4·84	16	1·21	—	4·84
28	17	1·11	7·23a	6·05	12	0·81	—	1·82	15	0·30	—	1·21
29	16	0·40		3·03	14	0·50	—	1·82	15	0·10	—	0·61
30	15	0·10		1·21	13	0·50	—	1·21	18	0·10	—	0·61
31					17	0·40	—	1·21	17	0·20	—	1·21

Giorni del mese	Settembre				Ottobre				Novembre			
	Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna		Osservazioni	Media diurna ang.	Massima diurna	
			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.			Ora	V. ang.
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1	16	1·11	—	4·24	15	1·01	—	3·03	18	8·14	9·45a	18·16
2	15	3·33	7·35a	6·05	16	0·40	—	1·82	13	0·42	—	2·42
3	15	6·35	5·0a	12·11	16	0·50	—	1·82	14	0·73	—	2·42
4	14	6·76	4·40a	12·11	15	1·01	9·0p	7·26	15	0·12	—	1·82
5	15	0 50	—	1·82	17	2·32	9·58p	6·05	14	0·24	—	1·82
6	15	0·10	—	0·61	16	9·08	7·56p	15·14	14	0·18	—	1·21
7	15	0·20	—	1·82	15	3·33	9·26p	6·66	14	0·42	—	1·21
8	13	1·31	—	2·42	12	2·12	—	3·03	14	0·12	—	0·61
9	14	3·13	1·55a	6·05	16	9·58	9·20p	27·24	13	0·42	—	3·03
10	15	5·14	11·37a	12·11	14	10·69	3·31p	22·40	14	0·73	—	1·82
11	15	0·61	—	3·03	16	2·12	3·17p	6·05	12	2·82	7·15p	8·48
12	17	0·71	9·18p	6·05	15	0·81	—	3·03	17	4·13	6·3a	7·26
13	16	0·10	—	1·21	13	1·92	—	4·84	13	4·34	9·40p	12·11
14	15	0·10	—	0·61	14	0·91	—	2·42	14	4·64	4·6p	12·11
15	15	0·00	—	0·00	13	1·11	—	4·24	14	10·29	5·0a	21·19
16	16	0·10	—	0·61	16	1·71	7·47a	6·05	14	2·52	6·6a	6·66
17	15	0·40	—	1·82	13	1·31	—	2·42	14	2·52	12·50	12·11
18	16	1·01	—	2·42	12	1·91	—	1·82	16	1·11	8·4a	12·11
19	13	0·10	—	0·61	14	0·50	—	1·21	16	0·30	—	1·21
20	16	1·31	9·40p	6·05	14	1·11	—	3·03	15	0·71	—	4·84
21	17	7·56	8·00p	12·71	14	0·79	—	1·82	17	7·06	7·56p	15·74
22	15	5·65	9·48p	10·90	12	1·61	—	5·45	13	0·99	—	1·82
23	15	8·78	6·0a	12·71	13	0·42	—	1·82	15	3·52	5·45p	7·15
24	14	1·61	—	3·03	15	0·73	—	3·03	14	3·33	9·56p	9·69
25	16	0·10	—	0·61	14	3·81	8·30a	6·66	16	14·22	2·46p	18·76
26	13	0·91	—	4·24	10	1·27	—	2·42	13	10·39	8·25a	19·98
27	15	2·52	10·0a	7·26	13	0·61	—	1·82	15	1·31	12·50	12·11
28	10	3·43	8·35a	9·08	12	0·21	—	1·21	16	4·34	11·28a	9·08
29	13	0·40	—	1·82	14	1·03	—	1·82	13	13·01	6·25a	24·22
30	13	0	—	0	11	0·79	—	1·21	14	6·96	8·18a	12·11
31					12	0·03	—	1·21				

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Il Segretario ricordò agli adunati, come l'odierna seconda sessione dell'anno XXXI avrebbe dovuto aver luogo ai 20 del Gennaio decorso; e come a cagione degli straordinari avvenimenti pubblici il ch. p. Angelo Secchi Presidente avesse creduto opportuno di trasferirla alla seguente Domenica 27. In questo giorno poi stante l'improvviso e gravissimo peggioramento della malattia dell'illustre presidente, per spontaneo desiderio di tutti i membri fu creduto opportuno sospenderla nuovamente. Perdurando intanto lo stato aggravato e di imminente pericolo nella languente vita del P. Angelo Secchi; ed essendo sopraggiunto anche il grande lutto dei romani e dei cattolici tutti per la morte del s. Padre Papa Pio IX, vi sarebbe stata forte ragione per sospendere anche l'odierna seduta. Ma poichè troppo ne avrebbe sofferto la continuità dei lavori accademici, il Comitato giudicò di tenere una privata adunanza allo scopo soltanto di comporre il fascicolo secondo degli Atti accademici del XXXI anno; ed è in questa forma che vennero spediti gli inviti agli Accademici.

2. Relazione del segretario sulla distribuzione d'una medaglia commemorativa inviata dal s. Padre Pio IX agli accademici che contribuirono con memoria alla compilazione del volume straordinario di *triplice omaggio* offerto alla stessa Santità Sua il 19 Giugno 1877, in occasione del suo episcopale giubileo.

COMITATO SEGRETO

Il Comitato Accademico propose a socio corrispondente straniero il chmo sig. prof. Nicola Breithof dell'università cattolica di Lovanio. Fatta la votazione risultò eletto a pieni voti, essendo 10 i votanti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Prof. Mattia Azzarelli, il quale tenne la presidenza in assenza del ch. P. Angelo Secchi gravemente infermo – Conte Ab. F. Castracane degli Antelminelli – P. F. S. Provenzali – Ing. prof. A. Statuti. – P. G. Foglini – P. G. S. Ferrari – P. G. Lais – D. B. Boncompagni – Cav. G. Olivieri – Prof. M. S. de Rossi, segretario

---

L'adunanza aperta legalmente alle ore 3 ½ pom., fu chiusa alle 5 ½.

OPERE VENUTE IN DONO

1 *Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — Aus dem Jahre* 1876. — Berlin ecc. 1877. In 4.°

2. *Atti del Reale Istituto d' incoraggiamento alle scienze naturali economiche e tecnologiche di Napoli* — 2.ª Serie — Tomo XIV. — Parte I. — Napoli ecc., 1877. In 4.°

3. *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg.* — Tome XXIV. N.° 2.° In 4.°

4. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni*, ecc. — Tomo VII. — Gennaio 1874, — Tomo X. — Marzo—Luglio, Settembre Novembre 1877. — Roma ecc., 1877. In 4.°

5. *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy — Ancienne société des Sciences naturelles de Strasbourg fondée en* 1828. — Série II. — Tome III. — Fascicule VI, 10ᵉ Année. — 1877. — Paris ecc., 1877. In 8.°

6. *L'Elettricista. Rivista di scienze fisiche e loro applicazioni dedicata particolarmente all'elettricità* — Vol. II. — Num. 1. — Gennaio, Marzo 1878. — Firenze ecc., 1878 in 8.°

7. *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — November 1877. — Berlin 1878, ecc. In 8.°

8. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — Bollettino N.° 11 e 12. — Novembre e Dicembre 1877. — Roma ecc., 1877. In 8.°

9. *Triplice omaggio alla Santità di Papa Pio IX nel suo Giubileo episcopale offerto dalle tre romane accademie Pontificia di Archeologia, Insigne delle Belle Arti denominata di S. Luca, Pontificia de' Nuovi Lincei.* — Roma ecc., 1877. In 4.°

10. *Ulm Oberschwaben. Korrespondenzblatt des Vereins für kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben* — Nr. 9. 1877, In 4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE III^a DEL 17 MARZO 1878

PRESIDENZA DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Il Segretario fece notare ai colleghi, come non avesse luogo la formale partecipazione all' Accademia dell' infausta morte del suo presidente P. Angelo Secchi. Perocchè gli stretti vincoli di amicizia, che legavano tutti i membri dell' Accademia coll' illustre defunto, li avevano già chiamati ad assistere personalmente al funerale celebrato nella Chiesa di S. Ignazio. Disse peraltro esser doveroso proporre un atto manifestante il lutto accademico per la dolorosa perdita dell' infaticabile Presidente. Quindi a nome del Comitato direttivo propose che l' Accademia si astenesse dalle comunicazioni scientifiche; e stabilisse che il fascicolo degli atti, corrispondente a questa sessione, fosse unicamente dedicato alla biografia dell'illustre P. Angelo Secchi, ed all'indice dei numerosi lavori di lui. La quale proposta essendo stata unanimemente approvata, fu anche pregato il ch. P. S. Ferrari di redigere la desiderata biografia. Ma poichè la mole di tal lavoro per essere proporzionata alla importanza veramente straordinaria del soggetto esige tempo non breve, si è deciso collocarlo alla fine del volume, onde non ritardare troppo il corso della pubblicazione degli ordinari Atti accademici.

Il medesimo Segretario comunicò all'Accademia, come nella sera del Sabato 9 Marzo la Santità di N. S. Papa Leone XIII siasi degnata di ricevere in privata udienza il Comitato accademico, accogliendo con somma benignità i sentimenti di devoto ossequio e di filiale obbedienza, che i suddetti presentavano a nome dell'intero corpo accademico al nuovo Pontefice. La S. S. mostrò grande impegno per il progresso delle scienze; e in particolare ricordò l'importanza che fra esse hanno le scienze naturali coltivate dalla nostra Accademia. Quindi il medesimo S. Padre fu largo di parole atte ad incoraggiare nei loro lavori gli accademici, che benedisse con tutta l'effusione del paterno suo cuore. Non mancò in fine la Santità Sua di condolersi con l'Accademia per il grave lutto, nel quale essa si trova, a cagione dell'irreparabile perdita dell'esimio suo Presidente P. Angelo Secchi.

Il medesimo Segretario presentò la circolare a stampa inviata all'Accademia da un Comitato di discepoli del P. Angelo Secchi, con la quale vengono invitati gli amici del Secchi a contribuire ad un decoroso e solenne funerale per l'anima di lui. Contemporaneamente però fu osservato da alcuni soci, non essere conveniente che la nostra Accademia si riducesse unicamente a seguire l'invito di discepoli in una dimostrazione di affetto verso il suo presidente. Esser perciò assai più decoroso per gli accademici il farsi invece promotori dell'erezione di un monumento alla memoria di lui. Per tale monumento poi e per le trattative e la organizzazione della colletta e di quanto altro si riferisca al medesimo oggetto, viene nominata una commissione accademica composta del Comitato direttivo col suo nuovo presidente, cioè Sig. Comm. Alessandro Cialdi, Prof. Mattia Azzarelli, Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli, Prof. Michele Stefano de Rossi, segretario; e dei ch. Sig. Principe D. Baldassare Boncompagni, P. Stanislao Ferrari, P. Giuseppe Lais. Fu anche decretato che nei giornali cittadini venisse immediatamente pubblicata cotesta risoluzione accademica relativa all'erezione di un monumento alla memoria del P. Angelo Secchi.

COMUNICAZIONI

Ferrari P. Stanislao. *Distribuzione del primo annunzio della morte del P. Angelo Secchi.* — Il ch. P. S. Ferrari distribuì agli Accademici in forma di opuscolo il primo annunzio della morte del compianto P. Angelo Secchi, coi principali cenni della laboriosa vita del medesimo, pubblicato sui giornali a nome degli addetti all' Osservatorio pontificio del Collegio Romano.

Armellini Prof. Tito. *Presentazione di una sua rivista.* – Il ch. Prof. T. Armellini presentò all'Accademia e distribuì agli adunati una sua rivista dell'ultima opera del defunto nostro presidente, intitolata " *Le Stelle* "

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunivasi in Comitato segreto per procedere all'elezione del Presidente e di altri officiali dell'Accademia. Dapprima il Segretario lesse gli articoli dello Statuto, che si riferiscono alle suddette elezioni. Quindi riferendo le deliberazioni del Comitato accademico, disse come questo, interpretando il desiderio generale manifestato da tutti i soci, avesse deliberato di proporre per candidato alla presidenza l'illustre e benemerito membro della nostra Accademia l'Eccellentissimo signor Principe D. B. Boncompagni. Ma questi avendo conosciuto il desiderio dell'Accademia e preveduta la conseguente deliberazione del comitato, avea non solo fermamente dimostrato di non voler accettare la presidenza, ma eziandio caldamente pregato il Comitato Accademico di non costringerlo ad emettere una rinunzia all'onorifico incarico; del quale quantò gradiva la cortese offerta, altrettanto era risoluto non prenderne il seggio. Quindi il Comitato suo malgrado trovavasi costretto a presentare alla votazione un altro candidato, che scelse nella persona del ch. Commendatore Alessandro Cialdi, i cui meriti distintissimi e la cui anzianità nel corpo accademico rendevano sopra ogni altro meritevole del sommo grado fra i Soci. Prima di procedere alla votazione il corpo accademico deliberante, manifestando il sommo dispiacere di non poter dar luogo alla desiderata dimostrazione di stima, di affetto, di gratitudine verso l'Eccmo Sig. Principe Boncompagni, ordinò al Segretario di prendere atto di cotesti sentimenti dell'Accademia e di consegnarli a perpetua memoria nel processo verbale della riunione. Oltre a ciò ordinò pure allo stesso Segretario di notificare i detti sentimenti dell'Accademia al Sig. Principe Boncompagni per mezzo di una lettera d'officio. Fatta dipoi la votazione a forma degli statuti sulla proposta candidatura del Sig. Comm. Alessandro Cialdi, venne questi eletto a pieni voti, e poscia applaudito.

Il Sig. Comm. Cialdi dichiarò che egli non avrebbe giammai accettato la carica di Presidente, se non avesse veduto una così esplicita e ferma volontà nel Sig. Principe Boncompagni di non volere aderire al desiderio di tutta l'Accademia, che lo desiderava presidente. Ricordava inoltre essere egli stato uno dei più caldi promotori della candidatura del suddetto Sig. Principe Boncompagni.

Si passò poi alla elezione dei due membri del Comitato accademico cessati d'officio; il primo dei quali, sig. Prof. Mattia Azzarelli, non poteva essere rieletto, perchè già confermato una volta il 5 luglio 1874. Il secondo, eletto per la prima volta nella medesima data, Conte Ab. Francesco Castracane, avrebbe potuto esser confermato; dovevasi perciò procedere alla votazione sulla conferma di quest' ultimo, prima di passare ai voti i nuovi candidati per quest'ufficio proposti dal Comitato nelle persone del ch. P. Stanislao Ferrari e Cav. Augusto Statuti. Il prof. de Rossi Re in forza del § II, Tit.° IV degli Statuti, che dà facoltà ai membri ordinari di far proposte, che credansi utili, suggerì al corpo accademico, in vista dei meriti speciali del prof. Azzarelli, di confermarlo nell'ufficio, domandandone perciò al S. Padre l'approvazione unitamente alla deroga della legge imposta dallo statuto. Tale proposta non solo accettata ma fu grandemente applaudita dall'Accademia. Poscia a pieni voti fu confermato nell'officio per altro triennio il Conte Ab. Francesco Castracane.

In fine l'Accademia si occupò della nomina dei censori, i quali a forma dello statuto dovrebbero esser quattro. Atteso però il piccolo numero degli Accademici, avendone nell'ultima elezione scelti soltanto due, si giudicò ora tornare ai regolamenti. Il Comitato propose di confermare i due antichi censori, cioè il Sig. Principe Baldassare Boncompagni ed il P. Chelini; e nominare nuovi il P. Ferrari e il Cav. Statuti: furono tutti eletti a pieni voti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Comm. A. Cialdi – Prof. Mattia Azzarelli, – Conte Ab. F. Castracane degli Antelminelli – P. G. Foglini – Prof. T. Armellini – Dott. D. Colapietro – Cav. F. Guidi – Mons. F. Regnani – P. S. Ferrari – Prof. A. Statuti – Prof. V. de Rossi Re – Comm. C. Descemet – P. G. Lais – Cav. G. Olivieri – P. F. Provenzali – Prof. M. S. de Rossi, segretario.

L'adunanza aperta legalmente alle ore 4 pom., fu chiusa alle 6 ½ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino pubblicati dagli Accademici Segretari delle due Classi* — Vol. XIII, dispensa 1ª, (Novembre 1877), ecc. In 8°
2. *Atti del Reale Istituto d'incoraggiamento alle scienze naturali economiche e tecnologiche di Napoli.* — 2ª Serie — Tomo XIV. — Parte II, ecc. 1877. In 4°.
3. *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg.* — Tome XXIV. N° 3°. In 4.° ecc. Vol. XI — 31 Luglio, 31 Dicembre 1876. — Num. 7, 12. — Vol. XII — 31 Gennaio—30 Aprile 1877. — Num. 1—4. In 4°
4. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni*, ecc. — Tomo XI. — Gennaio 1878, — Roma ecc., 1878. In 4.°
5. *Bullettino Meteorologico dell'osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri*, —
6. CHAMPSEIX (André). — *La vie des cellules et l'individualité dans le regne végétal — Introduction au cours de Botanique Cryptogamique par le professeur François Ardissone traduit par André Champseix*, ecc. In 8°
7. FERRARI (G. Stanislao). — *Necrologia del P. Angelo Secchi*, ecc. In 4°
8. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* — 2ª Série — Tome II, ecc. In 8.°
9. *Reale Istituto d' incoraggiamento.* — Relazione, ecc. 1878. In 4°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVª DEL 14 APRILE 1878

PRESIDENZA DELL'EMO CARD. CAMILLO DI PIETRO

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

INVARIANTI, COVARIANTI E CONTRAVARIANTI DELLE FUNZIONI OMOGENEE

NOTA

DEL P. GIACOMO FOGLINI

Essendomi proposto, a comodo degli studiosi, di riunire insieme, di ordinare e svolgere convenientemente i capi di dottrina che negli ultimi anni sono stati introdotti di nuovo in diversi rami della Matematica, alla prima Nota intorno alle coordinate trilineari fo succedere una seconda Nota relativa agli Invarianti delle forme algebriche, cioè a quelle funzioni dei coefficienti, le quali o non si alterano punto o si rivestono solo di un fattore costante, quando si adopera una sostituzione lineare in ordine alle variabili delle medesime forme. Agli Invarianti vanno associati i Covarianti e i Contravarianti, vale a dire quelle altre funzioni delle variabili insieme e dei coefficienti, le quali hanno pure un carattere d'*invarianza* e conservano la stessa dipendenza di composizione dalla forma primitiva e dalla sua trasformata per sostituzioni lineari, sieno poi tra loro congredienti

ovvero contragredienti le due serie di variabili che appartengono a quelle funzioni e a queste forme. La Nota, che io ho l'onore di presentare all'Accademia, tratta dei diversi modi di trovare coteste funzioni rispetto a una data forma qualunque, e ne fa quindi l'applicazione specialmente alle forme binarie e ternarie dei primi gradi.

1. Chiamiamo *forma* o *quantica* una funzione omogenea di più variabili $x, y, \ldots$, come per es. $A x^2 + 2 B x y + C y^2$: le forme si dicono *binarie*, *ternarie*, *quaternarie*, etc., secondochè contengono due, tre, quattro, etc., quantità variabili; e ciascuna di esse viene detta inoltre *quadratica*, o *cubica*, o *quartica*, ..., a norma del grado secondo, o terzo, o quarto, ..., al quale si eleva.

Invariante di una data forma si appella qualunque funzione de'suoi coefficienti A, B, C, ..., alla quale riesca uguale in tutto o differente soltanto per un certo fattore costante e determinato la funzione consimile dei coefficienti A', B', C', ... di una nuova forma che si ottiene, trasformando con una sostituzione lineare tutte le variabili $x, y, z, \ldots$ della forma primitiva.

Sia data per esempio la forma generale a un numero qualunque di variabili e di grado m,

$$A x^m + m B x^{m-1} y + m C x^{m-1} z + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} H x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)}{2} K x^{m-2} z^2 + \ldots + \ldots,$$

dove ai termini successivi sono preposti i medesimi coefficienti numerici m, $\frac{m(m-1)}{2}$, ... che nello sviluppo della potenza $(x + y + z + \ldots)^m$: alle variabili $x, y, z, \ldots$ contenute nella medesima forma si attribuiscano i valori

$$[1] \quad \begin{cases} x = l_1 x' + m_1 y' + n_1 z' + \ldots, \\ y = l_2 x' + m_2 y' + n_2 z' + \ldots, \\ z = l_3 x' + m_3 y' + n_3 z' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

espressi linearmente per le nuove variabili $x', y', z', \ldots$; si otterrà, mediante la sostituzione, una nuova forma dello stesso grado

$$A' x'^m + m B' x'^{m-1} y' + m C' x'^{m-1} z' + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} H' x'^{m-2} y'^2 + \frac{m(m-1)}{2} K' x'^{m-2} z'^2 + \ldots + \ldots$$

Ora denotiamo col simbolo φ due funzioni consimili dei coefficienti letterali della forma data e di quella dedotta, con n un numero qualunque, e con Δ il determinante

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_2 & m_2 & n_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_3 & m_3 & n_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

che ha per elementi i rispettivi coefficienti delle espressioni [1], e che si addimanda il *modulo della trasformazione* o *della sostituzione*: la funzione φ (A, B, C, . . . , H, K, . . .) sarà un invariante della data forma generale, quando si adempie la condizione

$$\varphi\ (A', B', C', \ldots, H', K', \ldots) = \Delta^n \times \varphi\,(A, B, C, \ldots, H, K, \ldots),$$

ovvero

$$\varphi\ (A', B', C', \ldots, H', K', \ldots) = \varphi\,(A, B, C, \ldots, H, K, \ldots).$$

Avendo luogo quella prima equazione, sussisterà questa seconda allorchè si abbia $n = o$, ovvero si abbia $\Delta = 1$ e la sostituzione sia perciò *unimodulare*: nel secondo caso l'invariante φ si dice *assoluto*, cioè tale che non è punto modificato per la trasformazione della data quantica.

2. Che poi rispetto ai coefficienti delle diverse forme o quantiche si dieno delle funzioni tali che soddisfino alla predetta condizione ed abbiano la proprietà d'*invarianza*, lo possiamo dimostrare col fatto, togliendo ad esame qualche forma speciale. Consideriamo a cagione di esempio la forma binaria quadratica

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2:$$

se in questa si effettua la sostituzione [1] che nel caso attuale si riduce ai due valori

$$x = l_1 x' + m_1 y' \,,\; y = l_2 x' + m_2 y',$$

risulterà la nuova forma

$$(A\, l_1^2 + 2\, B\, l_1\, l_2 + C\, l_2^2)\, x'^2 + 2\,[A\, l_1\, m_1 + B\,(l_1\, m_2 + l_2\, m_1) + C\, l_2\, m_2\,]\, x' y'$$
$$+ (A\, m_1^2 + 2\, B\, m_1\, m_2 + C\, m_2^2) y'^2,$$

ossia

$$A'\, x'^2 + 2\, B'\, x' y' + C' y'^2$$

quando si rappresentino con A', B', C' i coefficienti letterali dei rispettivi tre termini. Ora se noi prendiamo il discriminante $(A'\, C' - B'^2)$ di questa nuova forma, abbiamo immediatamente

$$(A'\, C' - B'^2) = (A\, l_1^2 + 2\, B\, l_1\, l_2 + C\, l_2^2)\,(A\, m_1^2 + 2\, B\, m_1\, m_2 + C\, m_2^2)$$
$$- (A\, l_1\, m_1 + B\, l_1\, m_2 + B\, l_2\, m_1 + C\, l_2\, m_2)^2$$
$$= \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 \times (A\, C - B^2) = \Delta^2 \times (A\, C - B^2).$$

Adunque essendo uguale un tale discriminante o funzione dei coefficienti alla funzione corrispondente o al discriminante della forma primitiva, moltiplicato per il quadrato del modulo $\Delta = l_1\, m_2 - l_2\, m_1$ di trasformazione, nè segue secondo la definizione che il discriminante $(A\, C - B^2)$ della forma proposta è anche un invariante della medesima forma.

Nello stesso modo si troverebbe che per la forma binaria cubica $A\, x^3 + 3\, B\, x^2 y + 3\, H\, x y^2 + K y^3$ è un invariante il suo discriminante $A^2\, K^2 + 4 A H^3 + 4\, B^3\, K - 3\, B^2\, H^2 - 6\, A\, B\, H\, K$, e che per la forma ternaria quadratica $G\, x^2 + H y^2 + K z^2 + 2\, P\, x y + 2\, Q\, x\, z + 2\, R\, y\, z$ è pure un invariante il discriminante $G\, H\, K + 2\, P\, Q\, R - G\, R^2 - H\, Q^2 - K\, P^2$: il primo invariante è di quarto grado relativamente ai coefficienti della forma alla quale appartiene, il secondo invariante è di terzo grado; tutti due sono funzioni omogenee, come anche il precedente che è una funzione di secondo grado. Dopo di avere dichiarato che cosa s'intenda per funzioni invarianti di una data forma, in-

dichiamo subito qualche metodo per formare coteste funzioni, o per dedurle da quelle che sono già formate e conosciute, avvertendo che in questa trattazione ci ha servito di scorta principalmente la classica Opera (*Leçons d'Algèbre Supérieure* etc.) del Sig. G. Salmon.

3. Ci restringeremo per ora alle forme binarie, e supporremo ciò che sarà dimostrato più tardi, vale a dire che ogni termine dell'invariante di una forma qualunque è di uno stesso grado per rispetto ai coefficienti della medesima. A fine di esporre con chiarezza il primo metodo che consiste in una equazione differenziale, premettiamo le seguenti considerazioni intorno alla forma

$$[2] \qquad A_0 x^m + m A_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + A_m y^m,$$

che è binaria e di grado m in generale.

1° Se la funzione $\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m)$ è un invariante della forma [2], in ciascun termine di quella funzione la somma degli indici sarà costante. Infatti senza far variare la x, nella forma si sostituisca ky alla semplice y; si avrà una trasformata, e sarà k il modulo della trasformazione: quindi poichè la funzione φ è per ipotesi un invariante, una funzione consimile dei coefficienti della trasformata dovrà esprimersi giusta la definizione col prodotto della prenominata φ per una potenza del modulo k, per esempio col prodotto $k^s \varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Ma sostituire nella forma [2] la quantità ky alla variabile y, è lo stesso che sostituirvi invece dei coefficienti letterali $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ rispettivamente gli altri coefficienti $k^0 A_0, k A_1, k^2 A_2, \ldots, k^m A_m$, lasciando intatta la y; sicchè nella trasformata la funzione dei coefficienti consimile a quella che si è supposta invariante in ordine alla forma primitiva, non è altro che $\varphi(k^0 A_0, k A_1, k^2 A_2, \ldots, k^m A_m)$: sussisterà dunque l'identità

$$\varphi(k^0 A_0, k A_1, k^2 A_2, \ldots, k^m A_m) = k^s \varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m).$$

Di qui si raccoglie che in ciascun termine della funzione $\varphi(k^0 A_0, k A_1, \ldots)$, corrispondente a ciascun termine dell'altra funzione $\varphi(A_0, A_1, \ldots)$, è costantemente la stessa la somma s degli esponenti delle diverse potenze di k, dalle quali si trovano moltiplicati i coefficienti primitivi A_0, A_1, etc.; e siccome gl'indici di queste ultime quantità sono identici agli esponenti delle potenze di k per cui sono rispettivamente moltiplicate, così è pur co-

stante la somma degli indici in ciascun termine della funzione invariante $\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m)$.

2° Essendo m il grado della forma binaria [2], se si dinota con μ quello di un suo invariante φ per rispetto ai coefficienti, la somma costante degli indici in ciascun termine di questo invariante sarà uguale ad $\frac{1}{2}\,m\,\mu$. Di vero se noi nella forma cangiamo x in y' ed y in x', o semplicemente x in y ed y in x, avremo un'altra trasformata, e il modulo della nuova trasformazione sarà

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

quindi per la sostituzione la funzione φ non varierà che nel segno, quando si trovi moltiplicata per una potenza dispari del modulo, e rimarrà sempre la stessa in valore assoluto. Ora la sostituzione della y in vece della x, e per converso della x in vece della y, torna a una inversione di tutti i coefficienti letterali della forma [2] che diviene

$$A_m\,x^m + m\,A_{m-1}\,x^{m-1}\,y + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,A_{m-2}\,x^{m-2}\,y^2 + \ldots + A_0\,y^m,$$

e perciò torna allo stesso che a un cangiamento di ciascun coefficiente A_ν nell'altro $A_{m-\nu}$. Dunque la funzione invariante $\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m)$ dovrà rimanere identica a sè medesima, quando in essa si scambiano A_0 in A_m, A_1 in A_{m-1}, etc.; conseguentemente la somma costante degli indici dei coefficienti compresi in qualsivoglia termine di φ prima dello scambio sarà uguale alla somma degli indici dei coefficienti compresi pure in un termine qualunque di φ dopo lo scambio. Laonde se si chiamano $p, q, r, \ldots$ que' primi indici, saranno $(m-p)$, $(m-q)$, $(m-r)$, ... questi secondi, e si avrà l'equazione

$$p + q + r + \ldots = (m-p) + (m-q) + (m-r) + \ldots;$$

ossia

$$p + q + r + \ldots = \tfrac{1}{2}\,m\,\mu,$$

essendo tanti i termini in ciascun membro della penultima equazione quante sono le unità contenute nel grado μ dell'invariante φ.

4. Di nuovo se nella forma binaria [2] si pone $x + k\,y$ invece della va-

riabile x, lasciando intatta la y, ovvero si pone $y + k x$ invece dell'altra variabile y senza toccare la x, la funzione invariante φ dei coefficienti della [2] non dovrà punto mutarsi per la trasformazione di questa, e rimarrà la stessa nelle due sostituzioni; giacchè nell' una e nell' altra sostituzione il modulo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix}$$

non è altro che l' unità: cerchiamo le condizioni alle quali deve soddisfare in questi due casi la funzione φ, affinchè resti la medesima nelle sopraddette trasformazioni e sia perciò un invariante.

1° Sostituito il binomio $x + k y$ alla semplice x, la forma [2] del numero precedente, dopo che sieno state svolte le diverse potenze del binomio e raccolti in un solo i termini simili, diviene

$$A_0 x^m + m (A_1 + k A_0) x^{m-1} y + \frac{m (m-1)}{1 . 2} (A_2 + 2 k A_1 + k^2 A_0) x^{m-2} y^2$$

$$+ \frac{m (m-1) (m-2)}{1 . 2 . 3} (A_3 + 3 k A_2 + 3 k^2 A_1 + k^3 A_0) x^{m-3} y^3 + \ldots ;$$

e così le mutazioni stanno tutte nei coefficienti A_1, A_2, A_3, ..., che divengono rispettivamente $A_1 + k A_0$, $A_2 + 2 k A_1 + k^2 A_0$, $A_3 + 3 k A_2 + 3 k^2 A_1 + k^3 A_0$, etc.: queste stesse mutazioni s' introdurranno nella funzione φ dei medesimi coefficienti, la quale per conseguenza si potrà sviluppare dopo le mutazioni secondo la formola di Taylor, e si cangerà nella seguente

$$\varphi + \left[k A_0 \frac{d \varphi}{d A_1} + (2 k A_1 + k^2 A_0) \frac{d \varphi}{d A_2} \right.$$

$$\left. + (3 k A_2 + 3 k^2 A_1 + k^3 A_0) \frac{d \varphi}{d A_3} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{1}{1 . 2} \left[k A_0 \frac{d \varphi}{d A_1} + (2 k A_1 + k^2 A_0) \frac{d \varphi}{d A_2} \right.$$

$$\left. + (3 k A_2 + 3 k^2 A_1 + k^3 A_0) \frac{d \varphi}{d A_3} + \ldots \right]^2 + \ldots ,$$

dove la notazione esponenziale è simbolica. Si ordini questa nuova funzione secondo le potenze ascendenti di k; risulterà

$$\varphi + \left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots\right) k$$

$$+ \left[\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_1 \frac{d\varphi}{dA_3} + 6A_2 \frac{d\varphi}{dA_4} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots\right)^2\right] k^2 + \ldots :$$

avvertendo che la quantità k è indeterminata ed arbitraria, bisognerà che si annullino separatamente tutti i coefficienti delle diverse potenze di k, affinchè la funzione φ rimanga la medesima prima e dopo la trasformazione; sarà dunque la φ un invariante della forma [2], quando soddisfa alle equazioni differenziali

$$A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots = 0,$$

$$\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_1 \frac{d\varphi}{dA_3} + 6A_2 \frac{d\varphi}{dA_4} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots\right)^2 = 0,$$

. . . . . .

Ma notiamo che il primo membro della seconda equazione il cui sviluppo è questo

$$\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_1 \frac{d\varphi}{dA_3} + 6A_2 \frac{d\varphi}{dA_4} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(A_0^2 \frac{d^2\varphi}{dA_1^2} + 4A_1^2 \frac{d^2\varphi}{dA_2^2} + \ldots + 4A_0 A_1 \frac{d^2\varphi}{dA_1 dA_2} + \ldots\right),$$

si può anche scrivere

$$\tfrac{1}{2}\left(A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots\right)$$

$$\times \left(A_0 \frac{d}{dA_1} + 2A_1 \frac{d}{dA_2} + 3A_2 \frac{d}{dA_3} + \ldots\right),$$

purchè col simbolo compreso nella seconda parentesi si operi sopra il polinomio della prima parentesi, considerando in questo polinomio successivamente come variabili i due fattori letterali di ciascun termine: dunque la seconda equazione (e lo stesso si dimostra in somigliante modo per tutte le equazioni susseguenti) si verificherà necessariamente, quando sia verificata la prima. In conclusione la condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione φ non si alteri punto per la sostituzione $x + ky$ in luogo della x, introdotta nella forma binaria [2], consiste nell' avveramento dell' unica equazione

$$[3] \qquad A_0 \frac{d\varphi}{dA_1} + 2A_1 \frac{d\varphi}{dA_2} + 3A_2 \frac{d\varphi}{dA_3} + \ldots + mA_{m-1} \frac{d\varphi}{dA_m} = 0$$

2° Similmente sostituita la quantità $y + kx$ invece della y, la forma [2] si trasmuta in un'altra

$$\left[A_0 + mkA_1 + \frac{m(m-1)}{2} k^2 A_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} k^3 A_3 + \ldots\right] x^m$$

$$+ m\left[A_1 + (m-1)kA_2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} k^2 A_3 + \ldots\right] x^{m-1} y$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\left[A_2 + (m-2)kA_3 + \frac{(m-2)(m-3)}{2} k^2 A_4 + \ldots\right] x^{m-2} y^2 + \ldots :$$

perciò la funzione φ dei coefficienti primitivi diventa

$$\varphi + \left[\left(mkA_1 + \frac{m(m-1)}{2} k^2 A_2 + \ldots\right) \frac{d\varphi}{dA_0}\right.$$

$$+ \left((m-1)kA_2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} k^2 A_3 + \ldots\right) \frac{d\varphi}{dA_1}$$

$$+\left((m-2)\,k\,A_3+\frac{(m-2)\,(m-3)}{2}\,k^2\,A_4+\ldots\right)\frac{d\,\varphi}{d\,A_2}+\ldots\Big]+\ldots;$$

e perchè sia un invariante, dovrà pur soddisfare alla equazione

$$[4]\qquad m\,A_1\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_0}+(m-1)\,A_2\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_1}+(m-2)\,A_3\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_2}+\ldots+A_m\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_{m-1}}=0.$$

Ma qui osserviamo che una funzione invariante φ della forma [2], come abbiamo mostrato di sopra (3 . 2°), non si altera in valore quando si scambia ciascun coefficiente A_ν in $A_{m-\nu}$: ne segue che se si verifica l'equazione [3] per la funzione φ, si verificherà ancora, lasciando intatta la medesima φ e scambiando l'indice ν in $m-\nu$ in ciascuno dei coefficienti A_0, A_1, etc. che appariscono esplicitamente nella [3] e dei loro differenziali $d\,A_1$, $d\,A_2$, etc. Ora il risultato di questo cangiamento non è altro che la formola [4] scritta in ordine inverso: dunque soddisfatta l'equazione [3], resterà pur soddisfatta l'altra equazione [4]; e quindi basterà che si adempia la prima condizione [3], affinchè la funzione φ sia un invariante.

5. Dopo tali premesse, è facile l'assegnare un primo metodo per trovare gl' invarianti di una data forma binomia. Volendosi un invariante φ di grado μ, e relativo a una forma di grado m, i coefficienti A della forma saranno $m+1$ di numero, e coi successivi indici da *zero* sino ad m inclusive; in ciascun termine della φ entreranno come fattori un numero μ di questi coefficienti che vi possono essere ripetuti una o più volte, e la somma dei loro indici dovrà essere (3) costantemente $=\frac{1}{2}\,m\,\mu$; da ultimo la medesima funzione φ avrà manifestamente tanti termini, quanti sono i modi diversi di comporre il numero $\frac{1}{2}\,m\,\mu$ con μ numeri compresi tra *zero* ed m inclusivamente. Mediante queste considerazioni che sono una conseguenza dei principii ora esposti, potremo subito notare la parte letterale di un invariante che abbia un dato grado nei coefficienti della forma, alla quale appartiene: se per esempio si cercano gl' invârianti che abbiamo indicato più sopra (2), cioè l' invariante φ_1 di secondo grado di una forma binaria quadratica e l'invariante φ_2 di quarto grado di una forma binaria cubica, significheremo colle lettere β, γ, δ, ε, η altrettanti coefficienti numerici da determinarsi, e giusta le precedenti considerazioni noteremo le parti letterali dei due invarianti scrivendo

$$\varphi_1 = \beta A_0 A_2 + \gamma A_1 A_1 = \beta A_0 A_2 + \gamma A_1^2 ,$$

$$\varphi_2 = \beta A_0 A_0 A_3 A_3 + \gamma A_0 A_2 A_2 A_2 + \delta A_0 A_1 A_2 A_3 + \varepsilon A_1 A_1 A_1 A_3 + \eta A_1 A_1 A_2 A_2$$

$$= \beta A_0^2 A_3^2 + \gamma A_0 A_2^3 + \varepsilon A_1^3 A_3 + \eta A_1^2 A_2^2 + \delta A_0 A_1 A_2 A_3 ;$$

giacchè in ciascun termine la somma $\frac{1}{2} m \mu$ degli indici, deve essere 2 quanto al primo invariante φ_1 e deve essere 6 quanto all'altro invariante φ_2.

Per determinare poi i coefficienti numerici β, γ, etc., abbiamo la condizione [3] del numero precedente, alla quale deve soddisfare ciascuno dei due invarianti: e poichè si ha $m = 2$ rispetto a φ_1, ed $m = 3$ rispetto a φ_2, perciò quella condizione nei due casi particolari vuol dire che operando noi col simbolo

$$A_0 \frac{d}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d}{d A_2}$$

sopra la espressione di φ_1, e sopra la espressione di φ_2 operando coll'altro simbolo

$$A_0 \frac{d}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d}{d A_3},$$

sieno identicamente nulli i due risultati che quinci si ottengono. Avremo pertanto con queste operazioni per qualunque valore dei coefficienti letterali A_0, A_1, A_2, etc., in ordine all' invariante φ_1 la identità

$$2 (\gamma + \beta) A_0 A_1 = 0 ,$$

e in ordine all'altro invariante φ_2 la identità

$$(3 \varepsilon + 2 \delta) A_0 A_1^2 A_3 + (2 \eta + 6 \gamma + 3 \delta) A_0 A_1 A_2^2$$
$$+ (\delta + 6 \beta) A_0^2 A_2 A_3 + (4 \eta + 3 \varepsilon) A_1^3 A_2 = 0 :$$

nei due membri identicamente nulli debbono uguagliarsi a *zero* i coefficienti numerici di tutti e singoli i termini; perciò fatto per esempio $\beta = 1$, avremo $\gamma = -1$ rispetto all'invariante φ_1, e per risguardo a φ_2 troveremo $\delta = -6$, $\varepsilon = 4$, $\eta = -3$, $\gamma = 4$. Laonde gl' invarianti cercati saranno

$$\varphi_1 = A_0 A_2 - A_1^2 ,$$

$$\varphi_2 = A_0^2 A_3^2 + 4 A_0 A_2^3 + 4 A_1^3 A_3 - 3 A_1^2 A_2^2 - 6 A_0 A_1 A_2 A_3 ,$$

che sono appunto i discriminanti delle due rispettive forme quadratica e cubica: fatto $y = 1$, le due forme uguagliate a *zero* rappresenteranno geometricamente, la prima un sistema di due punti e la seconda un sistema di tre punti sopra l'asse delle x; e le due $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ saranno la condizione perchè nelle rispettive forme riescano uguali due radici, ovvero perchè nei detti sistemi coincidano l'uno sopra l'altro due punti.

Se col metodo attuale si calcolasse un invariante φ_3 di terzo grado per una forma binaria di quarto grado che si suppone sempre scritta nei successivi termini coi corrispondenti coefficienti numerici del binomio newtoniano, si troverebbe la espressione

$$\varphi_3 = A_0 A_2 A_4 + 2 A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3;$$

e per la medesima forma si troverebbe l'invariante di secondo grado

$$\varphi_4 = A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2 .$$

6. Osserviamo che nell'invariante qualunque φ di una forma binaria essendo necessariamente un numero intero la somma costante degli indici di ciascun termine, ed esprimendosi (3. 2.) cotesto numero col prodotto $\frac{1}{2} m \mu$, ne segue che il grado m della forma rispetto alle variabili e il grado μ dell'invariante rispetto ai coefficienti letterali, non possono essere ambidue numeri dispari; e così apparisce manifesto che una forma binaria di grado dispari non ha invariante se non di grado pari.

Ancora osserviamo che non alterandosi punto in valore (*ibid.*) e rimanendo identica a sè medesima la funzione invariante φ se in essa si scambia ciascun coefficiente A_ν nell'altro $A_{m-\nu}$, ne segue parimenti che nel determinare i coefficienti numerici β, γ, etc. giusta il metodo del numero precedente, debbono risultare uguali tra loro i coefficienti di quei termini della φ, le cui parti letterali si mutano a vicenda l'una nell'altra quando in esse si scambia ciascun indice ν in $m - \nu$, come appunto vediamo verificato negli invarianti superiori φ_2 e φ_3.

7. Ma quello che vogliamo notare soprattutto, si è che trovato un invariante di una forma unica per es. col metodo ora esposto, possiamo trovare facilmente uno o più invarianti di un sistema di forme dello stesso grado. Sieno date, a cagione d'esempio, le due forme binarie quadratiche

$$[5] \qquad \begin{cases} A_0\, x^2 + 2\, A_1\, x\, y + A_2\, y^2\,, \\ B_0\, x_2 + 2\, B_1\, x\, y + B_2\, y^2\,; \end{cases}$$

e designato con ρ un numero qualunque, si scriva la forma composta

$$[\omega] \qquad (A_0 + \rho\, B_0)\, x^2 + 2\,(A_1 + \rho\, B_1)\, x\, y + (A_2 + \rho\, B_2)\, y^2\,,$$

e quindi (5) si scriva pure il suo invariante

$$[\omega'] \qquad (A_0 + \rho\, B_0)\,(A_2 + \rho\, B_2) - (A_1 + \rho\, B_1)^2\,:$$

questo, sviluppato che sia, si riduce al trinomio

$$[\omega''] \qquad (A_0\, A_2 - A_1^2) + (A_2\, B_0 + A_0\, B_2 - 2\, A_1\, B_1)\,\rho + (B_0\, B_2 - B_1^2)\,\rho^2\,;$$

e poichè già sappiamo che il primo e il terzo termine di un tale trinomio sono due invarianti relativi alla prima delle due forme date e alla seconda moltiplicata per ρ, perciò sarà pure un invariante il secondo termine, cioè senza il fattore arbitrario sarà un invariante la quantità

$$[6] \qquad A_2\, B_0 + A_0\, B_2 - 2\, A_1\, B_1$$

che come funzione dei coefficienti delle due forme proposte, appartiene al sistema [5] delle medesime forme.

Per dare di tutto ciò una ragione che sia fondata sopra la definizione degli invarianti e valga altresì per un sistema di due forme di qualunque grado, si rifletta che essendo la funzione $[\omega']$ l'invariante della forma $[\omega]$, la medesima funzione, moltiplicata per il quadrato del modulo Δ di trasformazione, sarà uguale per definizione a una funzione consimile dei coefficienti letterali della trasformata di $[\omega]$, cioè sarà uguale alla espressione

$$[\omega'''] \qquad (A'_0 + \rho\, B'_0)\,(A'_2 + \rho\, B'_2) - (A'_1 + \rho\, B'_1)^2.$$

Pertanto si stabilisca l'equazione tra $[\omega''']$ ed $[\omega']$ moltiplicata per Δ^2, e i due membri svolti si ordinino secondo le potenze ascendenti della quantità ρ: siccome questa è arbitraria, così nei due membri dovranno essere uguali tra loro i coefficienti delle stesse potenze di ρ; e di tal modo ciascuna delle funzioni racchiuse nelle parentesi in $[\omega'']$, moltiplicata per Δ^2, risulterà uguale a una funzione consimile dei coefficienti delle trasformate delle due

forme [5], vale a dire ciascuna di quelle prime funzioni sarà un invariante. Ondechè generalmente, data una forma di qualunque grado che abbia per coefficienti A_0, A_1, etc., e trovato un invariante φ della medesima, per trovare uno o più invarianti di questa e insieme di un'altra forma dello stesso grado che abbia per coefficienti B_0, B_1, etc., basterà che in φ alle quantità A_0, A_1, ... si sostituiscano rispettivamente le altre $A_0 + \rho B_0$, $A_1 + \rho B_1$, ...; i coefficienti delle diverse potenze di ρ nello sviluppo della nuova funzione saranno altrettanti invarianti, dei quali alcuni apparterranno alle due forme separate ed altri alle due forme unite.

Ritornando all'invariante [6] del sistema [5], dimostriamo che la riduzione a *zero* di un tale invariante è la condizione da verificarsi, affinchè con $y = 1$ sieno armonicamente coniugate tra loro le due coppie di punti rappresentati sopra l'asse delle x dalle due forme [5], cioè dalle due equazioni

$$A_0 x^2 + 2 A_1 x + A_2 = 0 \,, \quad B_0 x^2 + 2 B_1 x + B_2 = 0.$$

Sieno M, N i due punti rappresentati dalla prima equazione, ed M_1, N_1 i punti rappresentati dalla seconda: m, n sieno le distanze di quei primi punti dalla origine, ossia le due radici della prima equazione; ed m_1, n_1 le distanze dei secondi punti pur dalla origine, ossia le radici della seconda equazione. La condizione perchè i punti M, N sieno armonicamente coniugati coi punti M_1, N_1, sta nella relazione

$$\frac{M M_1}{M N_1} = - \frac{N M_1}{N N_1},$$

la quale corrisponde all'altra relazione

$$\frac{m_1 - m}{n_1 - m} = - \frac{m_1 - n}{n_1 - n};$$

questa poi, quando sia svolta, può scriversi nel seguente modo:

$$\left(m n + m_1 n_1\right) - \frac{1}{2}\left(m + n\right)\left(m_1 + n_1\right) = 0 \,.$$

Ora giusta la teoria delle equazioni di secondo grado, abbiamo

$$m n = \frac{A_2}{A_0}, \; m_1 n_1 = \frac{B_2}{B_0}, \; m + n = - \frac{2 A_1}{A_0}, \; m_1 + n_1 = - \frac{2 B_1}{B_0} \,.$$

Dunque la condizione perchè i quattro punti predetti sieno in rapporto armonico, si ridurrà in fine alla equazione

$$A_2 B_0 + A_0 B_2 - 2 A_1 B_1 = 0.$$

Questa stessa condizione deve verificarsi affinchè le due forme [5], uguagliate a *zero*, sieno armonicamente coniugate l'una coll'altra.

8. Per trovare un invariante del sistema delle tre forze binarie di secondo grado

$$[7] \qquad \begin{cases} A_0 x^2 + 2 A_1 x y + A_2 y^2 , \\ B_0 x^2 + 2 B_1 x y + B_2 y^2 , \\ C_0 x^2 + 2 C_1 x y + C_2 y^2 , \end{cases}$$

possiamo considerare semplicemente la forma pure binaria

$$(A_0 + B_0) x^2 + 2 (A_1 + B_1) x y + (A_2 + B_2) y^2,$$

e giusta la regola del numero precedente scrivere l'invariante di questa e della terza forma data, cioè

$$(A_2 + B_2) C_0 + (A_0 + B_0) C_2 - 2 (A_1 + B_1) C_1.$$

Sarà quindi la funzione

$$A_2 C_0 + A_0 C_2 - 2 A_1 C_1 + B_2 C_0 + B_0 C_2 - 2 B_1 C_1$$

un invariante del sistema delle tre forme proposte; e questo non è che la somma degli invarianti che rispettivamente appartengono al sistema della prima e terza, della seconda e terza forma.

Ma anche il determinante che ha per elementi i coefficienti delle tre forme [7], è un invariante del loro sistema. Imperocchè fatta la sostituzione lineare

$$x = l_1 x' + m_1 y' , \quad y = l_2 x' + m_2 y' ,$$

la prima di quelle forme si trasmuta in quest'altra

$$A'_0 x'^2 + 2 A'_1 x' y' + A'_2 y'^2,$$

dove come nel numero (2) i valori dei rispettivi coefficienti sono

$$A'_0 = A_0 l_1^2 + 2 A_1 l_1 l_2 + A_2 l_2^2,$$

$$A'_1 = A_0 l_1 m_1 + A_1 (l_1 m_2 + l_2 m_1) + A_2 l_2 m_2 ,$$

$$A'_2 = A_0\, m_1^2 + 2\, A_1\, m_1\, m_2 + A_2\, m_2^2 :$$

somiglianti a questi sono i valori dei nuovi coefficienti B'_0, B'_1, B'_2, e C'_0, C'_1, C'_2 nelle trasmutazioni delle altre due forme; e perciò atteso il teorema che risguarda la moltiplicazione dei determinanti, avremo

$$\begin{vmatrix} A'_0 & A'_1 & A'_2 \\ B'_0 & B'_1 & B'_2 \\ C'_0 & C'_1 & C'_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} A_0 l_1^2 + 2 A_1 l_1 l_2 + A_2 l_2^2, & A_0 l_1 m_1 + A_1 (l_1 m_2 + l_2 m_1) + A_2 l_2 m_2, & A_0 m_1^2 + 2 A_1 m_1 m_2 + A_2 m_2^2 \\ B_0 l_1^2 + 2 B_1 l_1 l_2 + B_2 l_2^2, & B_0 l_1 m_1 + B_1 (l_1 m_2 + l_2 m_1) + B_2 l_2 m_2, & B_0 m_1^2 + 2 B_1 m_1 m_2 + B_2 m_2^2 \\ C_0 l_1^2 + 2 C_1 l_1 l_2 + C_2 l_2^2, & C_0 l_1 m_1 + C_1 (l_1 m_2 + l_2 m_1) + C_2 l_2 m_2, & C_0 m_1^2 + 2 C_1 m_1 m_2 + C_2 m_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1^2 & 2\, l_1\, l_2 & l_2^2 \\ l_1\, m_1 & l_1\, m_2 + l_2\, m_1 & l_2\, m_2 \\ m_1^2 & 2\, m_1\, m_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^3 \times \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

Adunque, poichè il primo fattore di questo ultimo prodotto è una potenza del modulo di trasformazione, giusta la defizione degli invarianti apparisce chiaro che il determinante dei coefficienti delle tre forme [7] è un invariante. Quando un tale determinante è nullo, i sei punti che possono essere rappresentati dalle tre forme sopra una stessa retta, formeranno parte di un sistema in involuzione, come crediamo bene di dichiarare nei due numeri che seguono.

9. Due sistemi di punti in linea retta si dicono *omografici*, allorquando le distanze x ed x' di due punti considerati l'uno nel primo e l'altro nel secondo sistema, da una origine fissa, sono connesse tra loro da una relazione algebrica di tal natura che ad ogni valore della x corrisponda sempre un valore ed un solo valore della x', e conseguentemente ad ogni punto di uno dei due sistemi corrisponda pur sempre un punto ed un punto solo dell'altro sistema. La

predetta relazione dovrà dunque essere di primo grado in x ed x', e nella massima generalità sarà

$$[8] \qquad H x x' + K x + P x' + Q = 0.$$

In generale sono differenti tra loro i valori x, x', che soddisfanno a questa equazione; ma vi hanno due valori della prima variabile, ai quali corrispondono i medesimi valori per la seconda: sono essi le due radici a, b della equazione quadratica

$$H x^2 + (K + P) x + Q = 0;$$

ed essendo tutti i punti situati sopra una stessa retta, quelli determinati dai due valori a, b in un sistema, saranno comuni e coincideranno con quelli che loro corrispondono nell'altro sistema.

Dalla condizione [8] si deduce che quattro punti qualunque, presi nel primo sistema, hanno un rapporto anarmonico uguale a quello dei punti corrispondenti nel secondo sistema. Infatti sieno α, β, λ, μ le distanze x di quattro punti del primo sistema dalla origine, ed α', β', λ', μ' sieno le distanze x' dei punti che corrispondono a quei primi nel secondo sistema. In virtù della definizione o della equazione [8] si avranno le quattro espressioni

$$\alpha = -\frac{P\alpha' + Q}{H\alpha' + K}, \quad \beta = -\frac{P\beta' + Q}{H\beta' + K},$$

$$\lambda = -\frac{P\lambda' + Q}{H\lambda' + K}, \quad \mu = -\frac{P\mu' + Q}{H\mu' + K}:$$

quindi

$$\alpha - \beta = \frac{P\beta' + Q}{H\beta' + K} - \frac{P\alpha' + Q}{H\alpha' + K} = \frac{(KP - HQ)(\beta' - \alpha')}{(H\beta' + K)(H\alpha' + K)},$$

$$\alpha - \lambda = \frac{(KP - HQ)(\lambda' - \alpha')}{(H\lambda' + K)(H\alpha' + K)}, \quad \mu - \beta = \frac{(KP - HQ)(\beta' - \mu')}{(H\beta' + K)(H\mu' + K)},$$

$$\mu - \lambda = \frac{(KP - HQ)(\lambda' - \mu')}{(H\lambda' + K)(H\mu' + K)};$$

per conseguenza

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\lambda}=\frac{(H\lambda'+K)(\beta'-\alpha')}{(H\beta'+K)(\lambda'-\alpha')},\quad \frac{\mu-\beta}{\mu-\lambda}=\frac{(H\lambda'+K)(\beta'-\mu')}{(H\beta'+K)(\lambda'-\mu')},$$

e in fine

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\lambda}:\frac{\mu-\beta}{\mu-\lambda}=\frac{\alpha'-\beta'}{\alpha'-\lambda'}:\frac{\mu'-\beta'}{\mu'-\lambda'}.$$

I due membri di quest'ultima equazione non sono altro che i rapporti anarmonici dei quattro punti presi nel primo sistema e dei quattro punti corrispondenti nel secondo sistema; e per definizione di due sistemi omografici di punti in linea retta, potremmo adottare questa medesima uguaglianza di rapporti anarmonici, la quale, adoperando le indeterminate x ed x' in vece di μ e μ', ci condurrebbe poi a una equazione della stessa forma di [8].

10. Se poniamo $P=K$, la equazione [8] diviene semplicemente

$$[9]\qquad Hxx'+K(x+x')+Q=0.$$

Ora siccome è simmetrica cotesta relazione rispetto alle variabili x ed x', così è manifesto che se x' prende il valore α' quando si assegna un valore particolare α alla x, viceversa la x prenderà il valore α' quando il predetto valore α si attribuisce alla x'; vale a dire nella retta, sopra la quale sono situati i due sistemi, ad un punto determinato da una quantità arbitraria α, corrisponde sempre uno stesso punto determinato dalla lunghezza α', qualunque sia dei due sistemi quello nel quale si considera il medesimo punto: in tal caso i due sistemi omografici si dicono formare un sistema di punti in involuzione, o semplicemente una *involuzione*; e la relazione che li collega tra loro, è appunto la equazione soprascritta [9].

Pertanto un sistema in involuzione si compone di coppie di punti corrispondenti, le cui rispettive distanze α ed α', β e β', λ e λ', etc. dalla origine in una stessa retta verificano l'equazione [9]; e come in due sistemi omografici, così pure in un sistema di punti in involuzione il rapporto anarmonico di quattro di essi punti è sempre uguale al rapporto anarmonico dei loro corrispondenti. Le due coppie di punti coincidenti, che si determinano coi due valori uguali della x ed x', cioè colle due radici a, a' della quadratica

$$Hx^2+2Kx+Q=0,$$

le chiameremo i *fuochi* del sistema in involuzione: sono sempre distinti tra loro i due fuochi reali o imaginarii, eccetto se $K^2 - HQ = 0$ nel quale caso non ha più luogo l'involuzione; e il punto medio tra i due fuochi, quello cioè che viene determinato da $x = -\frac{K}{H}$, lo diremo *centro* della involuzione. In questa due punti corrispondenti, qualunque essi sieno, formano sempre un gruppo armonico coi due fuochi. In vero sono generalmente x ed x' le distanze di due punti corrispondenti dalla origine fissa, come sono a ed a' le distanze dei due fuochi dalla medesima origine: nella ultima equazione quadratica saranno

$$a + a' = -\frac{2K}{H}, \quad aa' = \frac{Q}{H},$$

ossia

$$K = -\frac{H}{2}(a + a'), \quad Q = H\,a\,a';$$

e quindi colla sostituzione di questi due valori l'equazione [9] diventa

$$2\,xx' - (x + x')\,(a + a') + 2\,aa' = 0,$$

ossia

$$(x - a)\,(x' - a') + (x - a')\,(x' - a) = 0.$$

Da questa equazione proviene

$$\frac{x - a}{x - a'} \times \frac{x' - a'}{x' - a} + 1 = 0,$$

ovvero

$$\frac{x - a}{x - a'} : \frac{x' - a}{x' - a'} = -1$$

che è appunto il rapporto armonico che abbiamo asserito.

È ora facile il vedere come fatto $y = 1$, le tre coppie di punti che possono essere rappresentate sopra l'asse delle x dalle tre forme [7], cioè dalle tre equazioni

$$A_0\, x^2 + 2\, A_1\, x + A_2 = 0\,,$$

$$B_0\, x^2 + 2\, B_1\, x + B_2 = 0\,,$$

$$C_0\, x^2 + 2\, C_1\, x + C_2 = 0\,,$$

saranno in involuzione quando si riduca a *zero* il determinante costituito dai coefficienti delle medesime forme. Imperocchè se noi dalla origine dinotiamo con δ, δ' le distanze dei due punti rappresentati dalla prima delle tre equazioni, ossia le radici della medesima equazione, avremo $\delta\delta' = \frac{A_2}{A_0}$ e $\delta + \delta' = -\frac{2\,A_1}{A_0}$; e poichè se i due punti formano parte di un sistema in involuzione, i due valori δ e δ' debbono soddisfare alla equazione [9] quando sieno sostituiti in luogo delle rispettive x ed x', perciò per questa prima coppia e in somigliante modo per le altre due coppie di punti in involuzione dovranno sussistere le relazioni

$$Q\, A_0 - 2\, K\, A_1 + H\, A_2 = 0\,,$$

$$Q\, B_0 - 2\, K\, B_1 + H\, B_2 = 0\,,$$

$$Q\, C_0 - 2\, K\, C_1 + H\, C_2 = 0.$$

Eliminando da queste le tre quantità Q, K, H, o i rapporti di due di loro alla terza, abbiamo

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

che sarà la condizione necessaria affinchè le tre coppie di punti formino parte di un sistema in involuzione. Questa stessa è la condizione per la involuzione, relativamente alle tre forme [7] uguagliate a *zero*.

11. Accenniamo un altro metodo, il quale si adopera per dimostrare che sotto una certa condizione sono invarianti le funzioni simmetriche delle differenze tra le radici di una equazione ordinaria a una sola incognita, ed

anche di una forma qualunque binaria. Diremo radici di una forma binaria

$$A\,x^m + B\,x^{m-1}y + C\,x^{m-2}y^2 + \ldots + K\,y^m,$$

le radici della equazione

$$[\theta] \qquad z^m + \frac{B}{A}\,z^{m-1} + \frac{C}{A}\,z^{m-2} + \ldots + \frac{K}{A} = 0$$

in $\frac{x}{y} = z$, la quale equazione proviene dalla forma divisa per Ay^m ed uguagliata a *zero*: trattandosi di rapporti tra le variabili x ed y, se indichiamo con z_r una radice qualunque della equazione $[\theta]$, sarà questa soddisfatta per tutti que' lavori x_r ed y_r, per i quali sussiste $x_r = y_r\,z_r$; e se si dinotano rispettivamente con

$$z_1 = \frac{x_1}{y_1},\ z_2 = \frac{x_2}{y_2},\ z_3 = \frac{x_3}{y_3}, \ldots, z_m = \frac{x_m}{y_m}$$

le m radici della medesima equazione, potrà essa porsi come è noto sotto la forma

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_3}{y_3}\right)\ldots\left(\frac{x}{y} - \frac{x_m}{y_m}\right) = 0,$$

ovvero

$$[10] \qquad (y_1\,x - x_1\,y)\,(y_2\,x - x_2\,y)\,(y_3\,x - x_3\,y)\ldots(y_m\,x - x_m\,y) = 0$$

dopo che sia stata liberata da tutti i suoi denominatori.

Ora in questa forma diciamo che ogni determinante simile ad $x_1\,y_2 - y_1\,x_2$, è un invariante. Imperocchè posta la sostituzione lineare

$$x = m\,X + n\,Y,\ y = \mu\,X + \nu\,Y,$$

abbiamo la trasformazione per es. del primo e del secondo fattore

$$y_1\,x - x_1\,y = y_1\,(m\,X + n\,Y) - x_1\,(\mu\,X + \nu\,Y)$$

$$= (m\,y_1 - \mu\,x_1)\,X - (\nu\,x_1 - n\,y_1)\,Y = Y_1\,X - X_1\,Y,$$

$$y_2\,x - x_2\,y = (m\,y_2 - \mu\,x_2)\,X - (\nu\,x_2 - n\,y_2)\,Y = Y_2\,X - X_2\,Y,$$

dove sono

$$Y_1 = m y_1 - \mu x_1 , \; X_1 = \nu x_1 - n y_1 , \; Y_2 = m y_2 - \mu x_2 , \; X_2 = \nu x_2 - n y_2 :$$

somiglianti a queste sono le espressioni di Y_3, X_3, . . . nella trasformazione degli altri fattori lineari del primo membro [10], il quale sarà quindi trasmutato nel prodotto

$$(Y_1 X - X_1 Y)\,(Y_2 X - X_2 Y)\,(Y_3 X - X_3 Y) \ldots (Y_m X - X_m Y).$$

È poi il determinante

$$X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = (\nu x_1 - n y_1)\,(m y_2 - \mu x_2) - (m y_1 - \mu x_1)\,(\nu x_2 - n y_2)$$

$$= m \nu (x_1 y_2 - y_1 x_2) - n \mu (x_1 y_2 - y_1 x_2) = \begin{vmatrix} m & n \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \times (x_1 y_2 - y_1 x_2);$$

vale a dire la funzione $X_1 Y_2 - Y_1 X_2$ che spetta ai coefficienti della trasformata, non differisce che per un fattore costante, modulo della stessa trasformazione, da una funzione consimile $x_1 y_2 - y_1 x_2$ che risguarda i coefficienti della forma primitiva [10]: è dunque questa ultima funzione un invariante; e nella medesima maniera si dimostrano invarianti le altre funzioni o determinanti $x_1 y_3 - y_1 x_3$, $x_2 y_3 - y_2 x_3$, etc.

12. Ne viene per conseguenza che ogni espressione composta di parti simile ad $(x_1 y_2 - y_1 x_2)$, sarà un invariante. Ora ogni funzione simmetrica delle differenze tra le radici della equazione superiore [8] si riduce a una espressione composta di parti simili ad $(x_1 y_2 - y_1 x_2)$, purchè ciascuna radice entri uno stesso numero di volte in ciascun termine della funzione. Così, per esempio, se z_1, z_2, z_3, z_4 sono le radici di una equazione biquadrata, la funzione simmetrica

$$\sum (z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4)$$

che è la somma dei prodotti delle differenze, in ciascun termine della quale somma tutte le radici compariscono ciascuna una volta, si può ridurre alla espressione composta di quelle parti che abbiamo detto,

$$\sum (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,(x_3 y_4 - y_3 x_4),$$

sostituendovi $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$, . . . in luogo di z_1, z_2 . . . , e liberando il risul-

tato dalle frazioni mediante la moltiplicazione, per il prodotto $y_1 y_2 y_3 y_4$: una tale riduzione non si potrebbe però ottenere, se z_1, z_2, etc. fossero radici di una equazione superiore al quarto grado, ovvero se nella equazione di quarto grado invece della prefata funzione si considerasse la funzione $\sum (z_1 - z_2)$; perchè in questo ultimo caso liberando il risultato della sostituzione dalle frazioni, rimarrebbero due fattori y in ciascun termine, e si avrebbe

$$\sum y_3 y_4 \, (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Dunque ogni funzione simmetrica delle differenze tra le radici di una equazione ordinaria $[\theta]$ è un invariante, quando ciascuna radice si presenti lo stesso numero di volte in ciascun termine della funzione; e una forma binaria, ottenuta dalla $[\theta]$ col sostituire il rapporto $\frac{x}{y}$ alla semplice z e col liberare quinci il risultato dalle frazioni, avrà per invarianti ciò che risulta dalle predette funzioni simmetriche, dopo che in esse a ciascuna radice z_r sia siato sostituito il rapporto $\frac{x_r}{y_r}$ e siano fatte sparire le frazioni.

13. Veniamo adesso a un'altra specie di funzioni, la cui dipendenza da una o più forme date si conserva la stessa nel modo di composizione, quando si adoperi per le date forme e per le funzioni dipendenti una medesima sostituzione lineare. Pertanto dicesi *Covariante* di una forma una tale funzione φ dei suoi coefficienti A, B, C, . . . , e delle variabili $x, y, z, \ldots$, la quale moltiplicata per una certa potenza del modulo Δ di una sostituzione lineare, riesca uguale a una funzione consimile φ dei coefficienti A', B', C', . . . , e delle variabili $x', y', z', \ldots$ di quella nuova forma che risulta dalla forma primitiva per la detta sostituzione lineare; sicchè abbiasi la equazione

$$\varphi\,(A', B', C', \ldots, x', y', z', \ldots) = \Delta^n \times \varphi\,(A, B, C, \ldots, x, y, z, \ldots),$$

ovvero anche

$$\varphi\,(A', B', C', \ldots, x', y', z', \ldots) = \varphi\,(A, B, C, \ldots, x, y, z, \ldots)$$

nella ipotesi di $\Delta = 1$, o di una sostituzione unimodulare.

Così, per cagione di esempio, nella forma binaria di terzo grado

$$A\,x^3 + 3\,B\,x^2 y + 3\,C\,x y^2 + D\,y^3$$

si adoperi la sostituzione lineare

$$x = \lambda x' + \mu y', y = y',$$

la quale non conduce a calcoli assai lunghi e complicati; la forma si muterà in quest'altra

$$A' x'^3 + 3 B' x'^2 y' + 3 C' x' y'^2 + D' y'^3,$$

dove i valori dei nuovi coefficienti sono i seguenti:

$$A' = \lambda^3 A, \; B' = \lambda^2 \mu A + \lambda^2 B,$$

$$C' = \lambda \mu^2 A + 2 \lambda \mu B + \lambda C, \; D' = \mu^3 A + 3 \mu^2 B + 3 \mu C + D.$$

Quindi, attesi anche i due valori

$$x' = \frac{x - \mu y}{\lambda}, \; y' = y,$$

e fatte tutte le operazioni e riduzioni ben note, dedurremo la eguaglianza

$$(A' C' - B'^2) x'^2 + (A' D' - B' C') x' y' + (B' D' - C'^2) y'^2$$
$$= \lambda^2 [(AC - B^2) x^2 + (AD - BC) x y + (BD - C^2) y^2];$$

e poichè la quantità λ è il modulo della attuale trasformazione, si conchiuderà giusta la definizione che la funzione, la quale si trova moltiplicata per λ^2 nel secondo membro, è rispetto alla forma proposta un covariante di secondo grado quanto ai coefficienti e quanto alle variabili.

14. I metodi onde si fa uso per formare i covarianti di una binaria, sono analoghi a quelli che abbiamo già svolto (*num.* 3 *e segg.*) relativamente alla formazione degli invarianti. Quanto al primo metodo, supponiamo anche qui ciò che sarà dichiarato dipoi, vale a dire che i covarianti sono funzioni omogenee in ordine ai coefficienti delle forme alle quali si riferiscono; e che perciò se una data forma o tutti i suoi coefficienti si moltiplicano per una stessa quantità costante, anche i covarianti della forma resteranno moltiplicati in tutti i termini per una medesima potenza di quella costante: ciò supposto, osserviamo le cose che seguono.

1.° Denoti ε una quantità costante: se per ε^m si moltiplica la forma binaria

$$[11] \qquad A_0 x^m + m A_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{2} A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

la medesima potrà essere scritta sotto l'aspetto

$$A_0 (\varepsilon x)^m + m \varepsilon A_1 (\varepsilon x)^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{2} \varepsilon^2 A_2 (\varepsilon x)^{m-2} y^2 + \ldots ;$$

e si vede che dall' una forma si passa all'altra, cangiando x nella nuova variabile εx, e ciascun coefficiente letterale A_ν della prima in $\varepsilon^\nu A_\nu$: colle stesse mutazioni si otterrà un covariante C' della seconda da un corrispondente covariante C della prima forma. Quindi se $A_p A_q A_r \ldots \times x^\alpha y^{m-\alpha}$ è un termine qualunque del covariante C, quello che gli corrisponde in C' sarà evidentemente

$$\varepsilon^{p+q+r+\ldots+\alpha} A_p A_q A_r \ldots \times x^\alpha y^{m-\alpha} :$$

ma, come abbiamo detto, un tale termine non può differire dal termine corrispondente di C che per un fattore costante, il quale è lo stesso in tutti gli altri termini; dunque nella ultima espressione è costante il primo fattore o potenza di ε, e conseguentemente in ciascun termine del covariante C della forma primitiva è pur costante la somma $p + q + r + \ldots + \alpha$ che risulta dalla somma degli indici nei coefficienti e dell'esponente nella variabile x.

2.° Per trovare la espressione di questa somma costante, sia μ il grado del covariante C rispetto ai coefficienti della forma binaria di grado m alla quale appartiene, e sia pure n il grado del medesimo covariante per rispetto alle variabili x ed y. Si trasmutino nella forma proposta la x in y e la y in x: allora, essendo $= -1$ il modulo della trasformazione, il covariante C non si altera punto in valore assoluto, nel tempo stesso che ciascun suo coefficiente A_ν si scambia in $A_{m-\nu}$, come abbiamo già dichiarato (3. 2.°) in proposito degli invarianti. Per la qual cosa nel covariante C il coefficiente $A_p A_q A_r \ldots$ della x^α, fatta la trasformazione, si troverà prefisso naturalmente (*ibid.*) alla potenza $x^{n-\alpha}$, divenendo $A_{m-p} A_{m-q} A_{m-r} \ldots$; e perla identità del covariante C nei due casi, dovrà essere la somma costante

$$\alpha + p + q + r + \ldots = (n - \alpha) + (m - p) + (m - q) + (m - r) + \ldots$$

ovvero

$$\alpha + p + q + r + \ldots = \tfrac{1}{2} (n + m \mu),$$

essendo tante le m da aggiungersi quante sono le unità contenute nel grado μ relativo ai coefficienti della forma.

15. Ancora osserviamo che se un covariante C della forma binaria [11] si esprima con

$$C = H_0 x^n + n H_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} H_2 x^{n-2} y^2 + \dots ,$$

dove i coefficienti H_0, H_1, H_2, ... sono tutte funzioni degli altri coefficienti A_0, A_1, A_2,... che appartengono alla predetta forma, dovranno essere soddisfatte le seguenti equazioni:

$$[12] \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 \dfrac{d H_0}{d A_1} + 2 A_1 \dfrac{d H_0}{d A_2} + 3 A_2 \dfrac{d H_0}{d A_3} + \dots = 0 , \\[2ex] A_0 \dfrac{d H_1}{d A_1} + 2 A_1 \dfrac{d H_1}{d A_2} + 3 A_2 \dfrac{d H_1}{d A_3} + \dots = H_0 , \\[2ex] A_0 \dfrac{d H_2}{d A_1} + 2 A_1 \dfrac{d H_2}{d A_2} + 3 A_2 \dfrac{d H_2}{d A_3} + \dots = 2 H_1 , \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\[2ex] A_0 \dfrac{d H_n}{d A_1} + 2 A_1 \dfrac{d H_n}{d A_2} + 3 A_2 \dfrac{d H_n}{d A_3} + \dots = n H_{n-1} \end{array} \right.$$

S'immagini di fatti che nel covariante C sia mutata la variabile x in $x + ky$. Egli è evidente che il risultato di questa sostituzione in C si ottiene ugualmente, se la medesima sostituzione si adoperi invece nella forma corrispondente [11] e si determini quindi il covariante della trasformata: ma la sostituzione della $x + ky$ alla semplice x nella forma binaria [11], equivale (4. 1°) a un cangiamento dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ... negli altri rispettivi $A_1 + kA_0$, $A_2 + 2kA_1 + k^2 A_0$, $A_3 + 3kA_2 + 3k^2 A_1 + k^3 A_0$, ... introdotto nella medesima forma e perciò anche nel suo covariante C: si otterrà dunque uno stesso risultato, sia che nel covariante C venga scambiata la x in $x + ky$, sia che vengano scambiate in esso le quantità A_0, A_1, etc. in $A_1 + kA_0$, $A_2 + 2kA_1 + k^2 A_0$, etc. Ora fatto in C il primo scambio e ordinati i termini giusta le potenze ascendenti di k, abbiamo per risultato la espressione

$$C + \left[n H_0 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} 2 H_1 x^{n-2} y^2 + \dots \right] k$$

$$+\left[\frac{n(n-1)}{2} H_0 x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} 3 H_1 x^{n-3} y^3 + \ldots\right] k^2 + \ldots;$$

fatto poi nel medesimo C o nei suoi coefficienti H_0, H_1, H_2, etc. il secondo scambio e sviluppato ciascun dei nuovi coefficienti per la formola di Taylor con quello ordinamento e riduzione di termini che nel numero (4. 1°) abbiamo eseguito relativamente a una funzione consimile φ, proviene in fine per risultato il polinomio convenientemente ordinato

$$C + \left[\left(A_0 \frac{d H_0}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d H_0}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d H_0}{d A_3} + \ldots\right) x^n\right.$$

$$+ n \left(A_0 \frac{d H_1}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d H_1}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d H_1}{d A_3} + \ldots\right) x^{n-1} y$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{2} \left(A_0 \frac{d H_2}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d H_2}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d H_2}{d A_3} + \ldots\right) x^{n-2} y^2 + \ldots\right] k$$

$$+ \left[\tfrac{1}{2}\left(A_0 \frac{d H_0}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d H_0}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d H_0}{d A_3} + \ldots\right)\right.$$

$$\times \left(A_0 \frac{d}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d}{d A_3} + \ldots\right) x^n$$

$$\left. + \frac{n}{2}\left(\ldots\ldots\right)\left(\ldots\ldots\right) x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2.2}\left(\ldots\ldots\right)\left(\ldots\ldots\right) x^{n-2} y^2 + \ldots\right] k^2 + \ldots,$$

dove coi punti racchiusi nelle doppie parentesi s'intende un prodotto analogo a quello che è scritto nel termine precedente, mutato solamente H_0 in H_1 ovvero H_2, etc. Dovendo questi risultati essere identici, saranno pure identici tra loro nei due polinomi i moltiplicatori delle stesse potenze di x ed y, e di k: limitandoci ai termini nei quali si trovano le medesime potenze delle variabili x, y e la prima potenza della quantità indeterminata k, ne deduciamo immediatamente le equazioni [12] che sono state scritte poco avanti.

Non si lasci di avvertire che quando sono verificate le condizioni [12] coi valori dei coefficienti H_0, H_1, H_2,... da determinarsi per esse, allora nei due risultati ottenuti da C colla duplice sostituzione che abbiamo detto, riescono necessariamente identici tutti gli altri termini tra loro corrispondenti. Consideriamo a cagione di esempio i due termini che nei due risultati con-

tengono il fattore $x^{n-2} y^2 k^2$: nell'uno di questi termini il coefficiente è $\frac{n(n-1)}{2} H_0$, nell'altro è poi il coefficiente

$$\frac{n(n-1)}{2.2}\left(A_0 \frac{d H_2}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d H_2}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d H_2}{d A_3} + \ldots\right)$$
$$\times \left(A_0 \frac{d}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d}{d A_3} + \ldots\right);$$

ma questo secondo coefficiente, attesa la terza e la seconda delle equazioni [12], si riduce alla espressione $\frac{n(n-1)}{2} H_0$ del primo coefficiente: dunque verificate le condizioni [12], sono identici tra loro i due termini che abbiamo considerato, e così pure a due a due tutti gli altri termini corrispondenti, e perciò i due polinomii che sono risultati da C per la duplice sostituzione.

16. Fatte le precedenti osservazioni, ecco come si trovano i covarianti di una data forma binaria. Supponiamo, per esempio, che si cerchi il covariante

$$C = H_0 x^2 + 2 H_1 x y + H_2 y^2$$

di secondo grado sì per rispetto alle variabili come per rispetto ai coefficienti, il quale appartenga alla forma cubica

$$A_0 x^3 + 3 A_1 x^2 y + 3 A_2 x y^2 + A_3 y^3.$$

I coefficienti H_0, H_1, H_2 di C nei loro termini si compongono ciascuno di due fattori letterali A che spettano alla cubica, e di uno dei coefficienti numerici β, β', β'', etc; però in ciascun termine del covariante C la somma degli indici dei due fattori A e dell'esponente di x deve (14) essere uguale ad $\frac{1}{2}(n + m\mu)$, espressione che nel caso presente si riduce alla cifra 4, essendo $n = 2$, $m = 3$, $\mu = 2$: formando nei modi possibili questa determinata somma con due indici dei quattro coefficienti della cubica e coll'esponente della x nei successivi termini di C, vediamo che i rispettivi coefficienti di x^2, $x y$, y^2 nel richiesto covariante saranno,

$$H_0 = \beta A_0 A_2 + \beta' A_1 A_1, \; H_1 = \beta'' A_0 A_3 + \beta''' A_1 A_2, \; H_2 = \beta^{IV} A_1 A_3 + \beta^{V} A_2 A_2$$

e così il covariante medesimo resterà determinato quanto alla parte letterale.

Perchè poi sia anche determinato quanto ai coefficienti numerici β, β', etc, conforme alle tre prime condizioni [12], si operi col simbolo

$$A_0 \frac{d}{d A_1} + 2 A_1 \frac{d}{d A_2} + 3 A_2 \frac{d}{d A_3}$$

sopra i tre coefficienti H_0, H_1, H_2 già determinati nella parte letterale, e i risultati si facciano rispettivamente uguali alle espressioni dei secondi membri di quelle condizioni: otterremo le tre equazioni

$$(2\beta + 2\beta') A_0 A_1 = 0, \quad (\beta - 3\beta'' - \beta''') A_0 A_2 + (\beta' - 2\beta''') A_1 A_1 = 0,$$

$$(2\beta'' - \beta^{IV}) A_0 A_3 + (2\beta''' - 3\beta^{IV} - 4\beta^{V}) A_1 A_2 = 0;$$

e poichè devono esse sussistere per qualunque valore di A_0, A_1, etc., perciò si eguaglierà a zero il coefficiente numerico di ciascuno dei loro termini, e con $\beta = 1$ se ne ricaveranno i valori a questo relativi

$$\beta' = -1, \ \beta'' = \tfrac{1}{2}, \ \beta''' = -\tfrac{1}{2}, \ \beta^{IV} = 1, \ \beta^{V} = -1.$$

Se ne faccia la sostituzione nelle espressioni superiori di H_0, H_1, H_2, e le nuove espressioni si sostituiscano in C nel luogo dei coefficienti che erano prima indeterminati: proverrà determinatamente il covariante cercato della forma cubica binaria, cioè il covariante

$$C = (A_0 A_2 - A_1^2) x^2 + (A_0 A_3 - A_1 A_2) x y + (A_1 A_3 - A_2^2) y^2,$$

che è appunto quello di cui abbiamo fatto uso (13) come di esempio nella definizione.

17. Di più notiamo che se nella espressione generale del covariante C (15) si muta la y in $y + k x$, si ha lo stesso risultato che si otterrebbe (4. 2°), cangiando nelle funzioni H_0, H_1, etc. i coefficienti A_0, A_1, A_2, etc. della forma primitiva [11] rispettivamente negli altri

$$A_0 + m k A_1 + \frac{m(m-1)}{2} k^2 A_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} k^3 A_3 + \ldots,$$

$$A_1 + (m-1) k A_2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} k^2 A_3 + \ldots,$$

$$A_2 + (m-2)\,k\,A_3 + \frac{(m-2)\,(m-3)}{2}\,k^2\,A_4 + \ldots,$$

. . . . . :

saranno dunque identici i due polinomii che risultano da C mediante i prefati cangiamenti, cioè i due polinomii ordinati secondo le potenze di k,

$$C + \Big[n\,H_1\,x^n + n\,(n-1)\,H_2\,x^{n-1}\,y$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2}\,H_3\,x^{n-2}\,y^2 + \ldots\Big]k + \Big[\ldots\ldots\Big]k^2 + \ldots,$$

$$C + \Big[\Big(m\,A_1\,\frac{d\,H_0}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_0}{d\,A_1} + (m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_0}{d\,A_2} + \ldots\Big)x^n$$

$$+ n\,\Big(m\,A_1\,\frac{d\,H_1}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_1}{d\,A_1} + (m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_1}{d\,A_2} + \ldots\Big)x^{n-1}\,y$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{2}\Big(m\,A_1\,\frac{d\,H_2}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_2}{d\,A_1}$$

$$(m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_2}{d\,A_2} + \ldots\Big)x^{n-2}\,y^2 + \ldots\Big]k + \Big[\ldots\ldots\Big]k^2 + \ldots;$$

e se ne dedurranno le equazioni differenziali

$$m\,A_1\,\frac{d\,H_0}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_0}{d\,A_1} + (m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_0}{d\,A_2} + \ldots = n\,H_1,$$

$$m\,A_1\,\frac{d\,H_1}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_1}{d\,A_1} + (m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_1}{d\,A_2} + \ldots = (n-1)\,H_2,$$

$$m\,A_1\,\frac{d\,H_2}{d\,A_0} + (m-1)\,A_2\,\frac{d\,H_2}{d\,A_1} + (m-2)\,A_3\,\frac{d\,H_2}{d\,A_2} + \ldots = (n-2)\,H_3,$$

. . . . . .

tra i coefficienti H_0, H_1, H_2, etc. del covariante C che si hanno a determinare.

Ma si avverta che quando sia determinato il primo coefficiente H_0 in modo da soddisfare alla prima delle equazioni [12], tutti gli altri coefficienti e termini del covariante si potranno conoscere facilmente. Imperocchè ponendo per ragione di brevità il simbolo

$$[13] \qquad m A_1 \frac{d}{d A_0} + (m-1) A_2 \frac{d}{d A_1} + (m-2) A_3 \frac{d}{d A_2} + \ldots = \frac{d}{d\omega},$$

dalle precedenti equazioni noi abbiamo

$$n H_1 = \frac{d H_0}{d\omega}, \; n(n-1) H_2 = n \frac{d H_1}{d\omega} = \frac{d^2 H_0}{d\omega^2},$$

$$n(n-1)(n-2) H_3 = n(n-1) \frac{d H_2}{d\omega} = \frac{d^3 H_0}{d\omega^3}, \ldots\ldots;$$

e quindi l'espressione generale del covariante C del numero (15) diverrà

$$C = H_0 x^n + \frac{d H_0}{d\omega} x^{n-1} y + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{d\omega^2} x^{n-2} y^2 + \frac{1}{2.3} \frac{d^3 H_0}{d\omega^3} x^{n-3} y^3 + \ldots,$$

e si potrà determinare, conosciuto il coefficiente H_0.

Si voglia trovare, per la forma binaria cubica già considerata

$$A_0 x^3 + 3 A_1 x^2 y + 3 A_2 x y^2 + A_3 y^3,$$

un covariante

$$C = H_0 x^3 + \frac{d H_0}{d\omega} x^2 y + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{d\omega^2} x y^2 + \tfrac{1}{6} \frac{d^3 H_0}{d\omega^3} y^3$$

che sia di terzo grado in ordine alle variabili ed anche in ordine ai coefficienti. Abbiamo in questo caso $\frac{1}{2}(n + m\mu) = 6$, e perciò (14 . 2°) nel coefficiente H_0 la somma degli indici dei fattori A dovrà essere 3, il quale coefficiente avrà per conseguenza la forma

$$H_0 = \beta A_0 A_0 A_3 + \beta' A_0 A_1 A_2 + \beta'' A_1 A_1 A_1 :$$

sopra questa espressione operando in conformità della prima delle equazioni [12], abbiamo quindi

$$(3\beta + \beta') A_0^2 A_2 + (2\beta' + 3\beta'') A_0 A_1^2 = 0;$$

e poiché con $\beta = 1$ si hanno in questa equazione $\beta' = -3$, $\beta'' = 2$, perciò il valore determinato del primo coefficiente del covariante sarà

$$H_0 = A_0^2 A_3 - 3 A_0 A_1 A_2 + 2 A_1^3.$$

Ora poi se operiamo tre volte di seguito sopra questa funzione H_0 col simbolo [13] che nel presente caso si ristringe ai tre termini

$$3 A_1 \frac{d}{d A_0} + 2 A_2 \frac{d}{d A_1} + A_3 \frac{d}{d A_2} = \frac{d}{d \omega},$$

verremo a determinare gli altri coefficienti, ossia i tre valori

$$\frac{d H_0}{d \omega} = 3 A_0 A_1 A_3 - 6 A_0 A_2^2 + 3 A_1^2 A_2,$$

$$\frac{d^2 H_0}{d \omega^2} = 12 A_1^2 A_3 - 6 A_0 A_2 A_3 - 6 A_1 A_2^2,$$

$$\frac{d^3 H_0}{d \omega^3} = 18 A_1 A_2 A_3 - 6 A_0 A_3^2 - 12 A_2^3;$$

conseguentemente resterà determinato in tutto il covariante richiesto che sarà

$$C = (A_0^2 A_3 - 3 A_0 A_1 A_2 + 2 A_1^3) x^3 + 3 (A_0 A_1 A_3 - 2 A_0 A_2^2 + A_1^2 A_2) x^2 y$$
$$+ 3 (2 A_1^2 A_3 - A_0 A_2 A_3 - A_1 A_2^2) x y^2 + (3 A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - 2 A_2^3) y^3.$$

18. Col secondo metodo, adoperato già per certi invarianti speciali nel numero [11], si dimostra altresì che sono covarianti tutte le funzioni simmetriche, formate colle differenze delle radici di una equazione in z tra loro e colle differenze tra la medesima z e una o più radici, quando in ciascun termine di quelle funzioni entri ciascuna radice lo stesso numero di volte.

Sieno z_1, z_2, z_3, ... le radici della equazione; si ponga $z = \frac{x}{y}$, e per conseguenza $z_1 = \frac{x_1}{y_1}$, $z_2 = \frac{x_2}{y_2}$, etc.: la equazione si potrà scrivere sotto la forma omogenea, e il suo primo membro si ridurrà (11) al prodotto

$$(y_1 x - x_1 y)(y_2 x - x_2 y)(y_3 x - x_3 y) \ldots .$$

Si consideri ora, rispetto a una tale equazione, la funzione simmetrica $\sum (z-z_1)(z_2-z_3)\ldots$ nella quale ciascun termine contenga ciascuna radice uno stesso numero di volte: si ridurrà essa pure (12) a forma omogenea, scrivendo

$$[\eta] \qquad \sum (y_1 x - x_1 y)(x_2 y_3 - y_2 x_3)\ldots.$$

Adoperata la sostituzione lineare per le variabili x ed y, della quale abbiamo fatto uso nel precitato numero (11), quel primo membro si trasformerà nel prodotto

$$(Y_1 X - X_1 Y)\ (Y_2 X - X_2 Y)\ (Y_3 X - X_3 Y)\ldots,$$

e questa funzione nella somma

$$[\eta'] \qquad \sum (Y_1 X - X_1 Y)\ (X_2 Y_3 - Y_2 X_3)\ldots:$$

ma (*ibid.*) nei termini corrispondenti delle due somme o funzioni $[\eta']$ ed $[\eta]$, i primi fattori sono uguali tra loro, e ciascuno degli altri fattori in $[\eta']$ è uguale in $[\eta]$ al fattore corrispondente, moltiplicato per il modulo Δ della sostituzione: sarà dunque la funzione $[\eta']$ uguale alla funzione consimile $[\eta]$, moltiplicata per una potenza di Δ; e perciò, giusta la definizione, la funzione simmetrica $[\eta]$ sarà un covariante. È poi chiaro che questa funzione simmetrica risguarda le differenze delle radici di una equazione tra loro stesse, e le differenze tra l'incognita della equazione ed una o più radici; le quali per altro abbiamo supposto che comparissero ciascuna lo stesso numero di volte in ciascun termine della funzione. Così, per esempio, la funzione $\sum (z-z_1)^2\ (z_2-z_3)^2$ sarà un covariante di una forma o equazione di terzo grado: ma cesserà di essere covariante, se si riferisca a una equazione di grado superiore al terzo.

19. È qui da notare che ogni invariante di un covariante qualunque, è anche un invariante della forma alla quale appartiene il covariante. Sieno in fatti

$$A\,x^m + m\,B\,x^{m-1}y + \ldots,\quad H\,x^n + n\,K\,x^{n-1}y + \ldots,$$

$$A'\,x'^m + m\,B'\,x'^{m-1}y' + \ldots,\quad H'\,x'^n + n\,K'\,x'^{n-1}y' + \ldots,$$

una forma e un suo covariante a un numero qualunque di variabili, e ciò che divengono la stessa forma e covariante per una sostituzione lineare che

per più semplicità possiamo supporre unimodulare: un invariante del covariante sarà una tale funzione F dei coefficienti del medesimo, che dia luogo (1) alla equazione

$$F\,(H', K', \ldots) = F\,(H, K, \ldots)\,.$$

Ma i coefficienti H, K, ... del covariante sono funzioni dei coefficienti A, B, ... della forma primitiva, e funzioni consimili dei coefficienti A', B', ... della forma mutata per la sostituzione sono (13) i coefficienti H', K', ... del covariante pur trasformato; sicchè dovranno aversi insiememente

$$H = f\,(A, B, \ldots),\ H' = f\,(A', B', \ldots),\ K = f_1\,(A, B, \ldots),\ K' = f_1\,(A', B', \ldots), \ldots :$$

fatta la sostituzione di questi valori nella equazione precedente, sarà dunque

$$\varphi\,(A', B', \ldots) = \varphi\,(A, B, \ldots);$$

vale a dire che un invariante F (H, K, ...) di un covariante non è altro che un invariante φ (A, B, ...) della forma primitiva.

Così, a cagione di esempio, il covariante di secondo grado nei coefficienti e nelle variabili

$$(A_0\,A_2 - A_1^2)\,x^2 + (A_0\,A_3 - A_1\,A_2)\,x\,y + (A_1\,A_3 - A_2^2)\,y^2,$$

che è stato trovato nel numero (16) e si riferisce a una forma binaria cubica, ha per suo invariante (5) la funzione

$$(A_0\,A_2 - A_1^2)\,(A_1\,A_3 - A_2^2) - \tfrac{1}{4}\,(A_0\,A_3 - A_1\,A_2)^2;$$

ossia, fatta la riduzione e mutati i segni di tutti i termini dopo la moltiplicazione per 4,

$$A_0^2\,A_3^2 + 4\,A_0\,A_2^3 + 4\,A_1^3\,A_3 - 3\,A_1^2\,A_2^2 - 6\,A_0\,A_1\,A_2\,A_3:$$

ora questo è appunto (*ibid.*) un invariante della cubica binaria. — Di pari modo ogni covariante di un altro covariante, apparterrà pure alla forma primitiva.

20. Finora abbiamo supposto che le variabili di una forma e delle funzioni da essa dipendenti fossero trasformate con una medesima sostituzione lineare, ossia che le due serie di variabili fossero, come suol dirsi, *congredienti*: ma può accadere che due serie di variabili sieno *contragredienti*,

tali cioè che mentre si trasformano linearmente le variabili $x, y, z, \ldots$ con una data sostituzione, restino trasformate con una sostituzione reciproca od inversa certe altre variabili $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ che per qualche relazione sono connesse colle prime. Saranno pertanto contragredienti le due serie, se adoperando per le prime variabili la sostituzione

$$x = l_1 x' + m_1 y' + n_1 z' + \ldots, \; y = l_2 x' + m_2 y' + n_2 z' + \ldots,$$

$$z = l_3 x' + m_3 y' + n_3 z' + \ldots, \ldots\ldots,$$

le seconde si trovino trasformate coll'altra sostituzione pure lineare

$$\alpha = \tfrac{1}{\Delta}(L_1 \alpha' + M_1 \beta' + N_1 \gamma' + \ldots), \; \beta = \tfrac{1}{\Delta}(L_2 \alpha' + M_2 \beta' + N_2 \gamma' + \ldots),$$

$$\gamma = \tfrac{1}{\Delta}(L_3 \alpha' + M_3 \beta' + N_3 \gamma' + \ldots), \ldots\ldots,$$

ovvero nel caso di Δ (modulo della prima sostituzione) uguale alla unità,

$$\alpha = L_1 \alpha' + M_1 \beta' + N_1 \gamma' + \ldots, \; \beta = L_2 \alpha' + M_2 \beta' + N_2 \gamma' + \ldots,$$

$$\gamma = L_3 \alpha' + M_3 \beta' + N_3 \gamma' + \ldots, \ldots\ldots;$$

e in questa seconda sostituzione gli elementi $L_1, M_1, \ldots, L_2, M_2, \ldots$ del determinante-modulo sono i reciproci degli elementi di Δ, vale a dire sono i minori che si ottengono dal determinante per la soppressione delle linee orizzontale e verticale, le quali s'incontrano in l_1, ovvero in m_1, etc.

Per addurre un esempio di cui presto ci serviremo, una funzione $f(x, y, z, \ldots)$ si trasformi colla prima sostituzione lineare; le derivate della funzione rispetto a ciascuna delle variabili $x, y, z, \ldots$ si troveranno trasformate per la sostituzione reciproca, e perciò le stesse variabili colle rispettive derivate della funzione formeranno due serie contragredienti. Di vero in virtù della predetta sostituzione essendo nella funzione f le variabili $x, y, z, \ldots$ funzioni esse stesse delle altre variabili indipendenti $x', y', z', \ldots$, abbiamo dal calcolo differenziale le formole

$$\frac{df}{dx'} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dx'} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx'} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx'} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dy'} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dy'} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dy'} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy'} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dz'} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dz'} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dz'} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dz'} + \ldots,$$

. . . . . ;

e quindi attesi i valori

$$\frac{dx}{dx'} = l_1, \quad \frac{dy}{dx'} = l_2, \quad \frac{dz}{dx'} = l_3, \ldots,$$

$$\frac{dx}{dy'} = m_1, \quad \frac{dy}{dy'} = m_2, \quad \frac{dz}{dy'} = m_3, \ldots,$$

$$\frac{dx}{dz'} = n_1, \quad \frac{dy}{dz'} = n_2, \quad \frac{dz}{dz'} = n_3, \ldots,$$

. . . . . ;

che nella sostituzione si derivano dalle espressioni delle x, y, z, etc., in funzione delle x', y', z', etc., avremo conseguentemente

$$\frac{df}{dx'} = l_1\frac{df}{dx} + l_2\frac{df}{dy} + l_3\frac{df}{dz} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dy'} = m_1\frac{df}{dx} + m_2\frac{df}{dy} + m_3\frac{df}{dz} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dz'} = n_1\frac{df}{dx} + n_2\frac{df}{dy} + n_3\frac{df}{dz} + \ldots,$$

. . . . . .

Da queste equazioni coll'uso dei determinanti, si ricavano immediatamente le espressioni delle derivate

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta}\left(L_1\frac{df}{dx'} + M_1\frac{df}{dy'} + N_1\frac{df}{dz'} + \ldots\right), \text{ etc.};$$

ovvero nel caso di $\Delta = 1$,

$$\frac{df}{dx} = L_1\frac{df}{dx'} + M_1\frac{df}{dy'} + N_1\frac{df}{dz'} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dy} = L_2 \frac{df}{dx'} + M_2 \frac{df}{dy'} + N_2 \frac{df}{dz'} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dz} = L_3 \frac{df}{dx'} + M_3 \frac{df}{dy'} + N_3 \frac{df}{dz'} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

le quali espressioni sono manifestamente inverse di quelle che sono state assegnate per la trasformazione alle variabili x, y, z, etc. Possiamo dunque conchiudere che le variabili $x, y, z, \ldots$, e i simboli $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}, \cdots$ di derivazioni da effettuarsi sopra una funzione di quelle, costituiscono due serie contragredienti di variabili.

21. Ciò posto, per trovare con un metodo più generale gli invarianti e i covarianti di una forma qualunque, notiamo che quando si trasformano gli elementi variabili di un dato determinante con una sostituzione lineare, la quale sia la stessa per gli elementi di ciascuna linea, allora il dato determinante si trasforma in un altro che sarà composto colle nuove variabili in un modo identico a quello di prima, e da esso differirà solo per un fattore costante che è il modulo della trasformazione: ciò è chiaro se nel determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots \\ x_3 & y_3 & z_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

si trasformino gli elementi di ciascuna linea orizzontale con una sostituzione lineare, somigliante a quella che abbiamo adoperato per la trasformazione delle variabili $x, y, z, \ldots$ al principio del numero precedente, e se si attenda quindi alla regola sopra la moltiplicazione dei determinanti come nel numero (8) in un caso analogo. Ma in una funzione qualunque F delle variabili $x_1, y_1 \ldots, x_2, y_2, \ldots$, etc., i simboli $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \ldots, \frac{d}{dx_2},$

$\frac{d}{dy_2}, \ldots,$ etc. di derivazioni relative alla F, si trasformano tutti (20) con una stessa sostituzione lineare, quantunque inversa di quella con cui vengono trasformate le variabili $x_1, y_1, \ldots, x_2, y_2, \ldots,$ etc.: dunque ciò che abbiamo ora notato, avrà pur luogo in ordine al determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} & \ldots \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} & \ldots \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} & \frac{d}{dz_3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

applicato alla funzione F; e ciò che abbiamo notato, torna a dire che un tale determinante sarà un invariante, o meglio un simbolo di un'operazione invariante da farsi sopra la predetta funzione F. È poi evidente che sarà pure un simbolo invariante una potenza qualunque del medesimo determinante, ovvero un prodotto di più determinanti o delle potenze di più determinanti, i quali sieno tutti simili a quello che abbiamo scritto ultimamente.

Ne segue che se noi operiamo per esempio col simbolo

$$[14] \quad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} \end{vmatrix}^p \times \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} \end{vmatrix}^q \times \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} \end{vmatrix}^r \times \ldots$$

sopra un dato sistema di forme binarie che abbiano i rispettivi coefficienti distinti con diverso numero di apici e le variabili x ed y distinte cogli indici 1, 2, 3, etc., potendosi queste forme considerare complessivamente come una funzione F delle variabili $x_1, y_1, x_2, y_2,$ etc., otterremo per risultato un invariante o un covariante del sistema, secondo che dopo l'operazione differenziale compariranno ancora o dispariranno le quantità variabili. Parimenti se col simbolo

$$[15] \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} & \frac{d}{dz_3} \end{vmatrix}^p \times \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} & \frac{d}{dz_3} \\ \frac{d}{dx_4} & \frac{d}{dy_4} & \frac{d}{dz_4} \end{vmatrix}^q \times \ldots$$

si opera sopra un sistema di forme ternarie, il risultato sarà pure un invariante o un covariante del medesimo sistema; e così di seguito per i sistemi di altre forme che contengano un numero maggiore di variabili.

Si distinguono nelle successive forme del sistema le variabili x ed y cogli indici successivi 1, 2, 3, etc., affinchè si vegga subito in quali di quelle forme si debbono effettuare le derivazioni parziali, indicate dal simbolo invariante di operazione: ma esaguita ogni operazione e riduzione, si possono togliere tutti gl'indici, come dalle variabili delle forme primitive, così da quelle dei covarianti che ne sono risultati per il sistema; perchè è chiaro che se una funzione delle $x_1, y_1 \ldots, x_2, y_2, \ldots$, etc. è un covariante di un sistema di forme che abbiano anche diversi indici nelle variabili, sarà pure un covariante del sistema quando si faccia astrazione da tutti gl'indici nelle forme primitive e nei risultati finali, non alterandosi punto nei due casi i coefficienti della funzione per una medesima sostituzione lineare ed unimodulare delle quantità variabili. Se poi vogliamo un invariante o un covariante di una sola forma o funzione V delle variabili $x, y, z, \ldots$, formeremo da questa un sistema di funzioni somiglianti $V_1, V_2, V_3, \ldots$, ponendo successivamente diversi numeri di apici nei coefficienti e diversi indici nelle variabili della forma data V; indi opereremo sopra il sistema di forme distinte $V_1, V_2, V_3, \ldots$ in quel modo che si è detto poc'anzi; faremo in fine che queste nuove forme divengano identiche alla V, col sopprimere tutti gli apici negli invarianti ottenuti ed anche tutti gl'indici nei covarianti: ciò che si presenta alla vista dopo una tale soppressione, sarà manifestamente un invariante o un covariante dell'unica forma V.

22. Per trovare con questo metodo l'invariante, a cagione di esempio, della forma binaria quadratica $A x^2 + 2 B xy + C y^2$, scriveremo le due forme simili

$$[16] \qquad A' x_1^2 + 2 B' x_1 y_1 + C' y_1^2 , \; A'' x_2^2 + 2 B'' x_2 y_2 + C'' y_2^2 ;$$

e ad esse applicheremo il simbolo

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \frac{d^2}{dy_2^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{d^2}{dy_1^2} - 2 \frac{d^2}{dx_1 dy_1} \frac{d^2}{dx_2 dy_2},$$

che è lo stesso simbolo [14] per $p = 2$, $q = r = \ldots = 0$: il risultato della operazione, libero dal fattore 4 comune a tutti i termini, sarà $A' C'' + A'' C' - 2 B' B''$. È questo un invariante delle due forme che abbiamo scritte a norma della forma data; e soppressi gli apici a tutte le lettere, avremo come invariante della stessa forma proposta, senza il fattore comune 2, la espressione già nota $A C - B^2$.

Se poi sopra le due forme quadratiche, distinte cogli indici nelle variabili, operiamo coll'altro simbolo

$$[17] \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} \end{vmatrix} = \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1},$$

otterremo per un covariante delle medesime, libero dai fattori numerici, la funzione

$$(A' B'' - A'' B') x_1 x_2 + (A' C'' - B' B'') x_1 y_2$$
$$+ (B' B'' - A'' C') x_2 y_1 + (B' C'' - B'' C') y_1 y_2 ;$$

la quale, tolti tutti gl'indici, diviene

$$(A' B'' - A'' B') x^2 + (A' C'' - A'' C') xy + (B' C'' - B'' C') y^2,$$

e in tal modo apparterrà come covariante alle due quadratiche quando sieno scritte esse pure senza gl'indici nelle variabili.

Alle due forme [16] si unisca la terza forma

$$A''' x_3^2 + 2 B''' x_3 y_3 + C''' y_3^2 :$$

operando sopra di esse con tutta la parte notata nel simbolo [14], e nella ipotesi che $p = q = r = 1$, risulterà un invariante del sistema delle tre

forme binarie e quadratiche; cioè lasciati i fattori numerici comuni a tutti i termini, risulterà

$$A' (B'' C''' - B''' C'') + B' (A''' C'' - A'' C''') + C' (A'' B''' - A''' B''),$$

che è il determinante costituito dai coefficienti letterali delle tre forme, e che noi abbiamo già veduto (8) per altro modo essere un invariante del sistema.

Similmente si trovano col presente metodo generale gl'invarianti e i covarianti delle forme binarie di grado superiore al secondo; di questi già ne abbiamo altrove (5, 16, 17) indicati o trovati alcuni con metodi speciali e proprii delle forme binarie. Ma per addurre anche un esempio relativo alle altre forme, consideriamo una ternaria quadratica

$$V = G x^2 + H y^2 + K z^2 + 2 P x y + 2 Q x z + 2 R y z,$$

e svolta la parte

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} & \frac{d}{dz_3} \end{vmatrix}^2$$

del simbolo generale [15], operiamo con essa sopra le tre forme V_1, V_2, V_3, simili alla V, e distinte tra loro per gli indici diversi nelle variabili e per i numeri corrispondenti di apici nei coefficienti G, H, etc.: tolto il fattore 8 comune a tutti i termini, la espressione risultante

$$\begin{aligned} & G' (H'' K''' + H''' K'' - 2 R'' R''') + H' (G'' K''' + G''' K'' - 2 Q'' Q''') \\ & \quad + K' (G'' H''' + G''' H'' - 2 P'' P''') \\ & + 2 P' (Q'' R''' + Q''' R'' - K'' P''' - K''' P'') + 2 Q' (P'' R''' + P''' R'' - H'' Q''' - H''' Q'') \\ & \quad + 2 R' (P'' Q''' + P''' Q'' - G'' R''' - G''' R'') \end{aligned}$$

sarà un invariante del sistema delle medesime tre forme ternarie e quadratiche. Supponendo che le tre forme sieno identiche alla V per la soppres-

sione di tutti gl'indici ed apici, l'invariante apparterrà a questa ultima forma, e si ridurrà alla espressione già indicata nel numero (2)

$$G\,H\,K + 2\,P\,Q\,R - G\,R^2 - H\,Q^2 - K\,P^2,$$

dopo che sia stata divisa per il fattore 6 comune a tutti i termini: l'annullamento di un tale invariante o discriminante della ternaria quadratica V, ci esprime la condizione alla quale devono soddisfare i coefficienti della forma, affinchè l'equazione $V = 0$ rappresenti un sistema di due rette (Vedi Atti di questa Accademia, An. XXX. pag. 189). Se lo stesso simbolo di operazione che ci ha dato un invariante della ternaria di secondo grado, si applicasse a una forma pure ternaria di grado superiore, si avrebbe per risultato un covariante di questa.

23. Per ragione di compendio si rappresenta con $\overline{12}$ il determinante o simbolo [17], con $\overline{12}^p$ la potenza p^{sima} del medesimo, e conseguentemente con $\overline{12}^p \times \overline{13}^q \times \overline{23}^r \times \ldots$ il simbolo operativo [14]: così pure il simbolo generale [15] si rappresenterà con $\overline{123}^p \times \overline{234}^q \times \ldots$, e analoga a questa sarà la rappresentazione degli altri simboli di operazione per gl'invarianti e covarianti delle forme.

Ma crediamo qui di avvertire che i simboli $\overline{12}^p$, $\overline{123}^p, \ldots$ applicati a una forma unica, non ci possono dare nessun invariante o covariante della medesima, quando l'esponente p è un numero dispari. Perocchè per applicare per es. il simbolo $\overline{123}^p$ a una forma unica, nel risultato dell'operazione si hanno a togliere tutti gl'indici alle variabili, sicchè in questo caso significano in fine e devono condurre a una stessa cosa i due simboli $\overline{123}^p$ e $\overline{213}^p$: ma i due determinanti designati dai simboli $\overline{123}$ e $\overline{213}$, come quelli che differiscono tra loro per il solo scambio di due linee, sono uguali ed opposti di segno; e così pure uguali e di segni contrarii sono le due potenze $\overline{123}^p$, $\overline{213}^p$, quando p è un numero dispari: dunque perchè questi ultimi simboli, applicati a una forma unica, ne conducano a una medesima cosa, bisognerà che il risultato della operazione fatta coll'uno o l'altro di essi sopra la forma si riduca identicamente a *zero* nella detta ipotesi; e perciò con p dispari non si potrà ottenere alcun invariante o covariante di una sola forma mediante i simboli operativi $\overline{12}^p$, $\overline{123}^p, \ldots$. È per questa ragione che nel secondo e nel terzo esempio del numero precedente, nei quali si è operato coi rispettivi simboli compendiati $\overline{12}$ e $\overline{12} \,.\, \overline{13} \,.\, \overline{23}$, i risultati non possono applicarsi a una sola forma.

24. Ancora notiamo ciò che è stato supposto altrove (3. 14), e si intende chiaramente nel presente metodo, vale a dire che gl'invarianti e i

covarianti di una forma o di un sistema di forme sono funzioni omogenee rispetto ai coefficienti delle medesime, e che il grado di omogeneità è sempre uguale al numero delle cifre numeriche diverse che si trovano nel simbolo compendiato di operazione. Consideriamo, per esempio, il simbolo [14], limitandoci alla parte che in esso è segnata esplicitamente: poichè un termine qualunque nello sviluppo della potenza $(a+b)^p$ si può notare colla espressione $K' a^\alpha b^\beta$, nella quale K' è un coefficiente numerico variabile col posto del termine, ed α e β soddisfano alla condizione $\alpha+\beta=p$; perciò nello sviluppo del primo fattore del simbolo [14], ossia della potenza p^{sima} del binomio [17], il termine generale sarà

$$K' \frac{d^p}{d x_1^\alpha \, d y_1^\beta} \times \frac{d^p}{d x_2^\beta \, d y_2^\alpha}.$$

Così pure indicando con K'' e K''' due altri coefficienti numerici, e con γ e δ, μ e ν tali altri esponenti che soddisfino alle condizioni $\gamma+\delta=q$, $\mu+\nu=r$, le due espressioni

$$K'' \frac{d^q}{d x_1^\gamma \, d y_1^\delta} \times \frac{d^q}{d x_2^\delta \, d y_3^\gamma}, \quad K''' \frac{d^r}{d x_2^\mu \, d y_2^\nu} \times \frac{d^r}{d x_3^\nu \, d y_3^\mu}$$

saranno i rispettivi termini generali negli sviluppi del secondo e terzo fattore del simbolo [14]; se dunque rappresentiamo con K il prodotto dei prefati coefficienti numerici, il termine generale nello sviluppo del medesimo simbolo [14] sarà il seguente:

$$[18] \qquad K \frac{d^{p+q}}{d x_1^{\alpha+\gamma} \, d y_1^{\beta+\delta}} \times \frac{d^{p+r}}{d x_2^{\beta+\mu} \, d y_2^{\alpha+\nu}} \times \frac{d^{q+r}}{d x_3^{\delta+\nu} \, d y_3^{\gamma+\mu}}.$$

Espressioni a questa somiglianti si avrebbero se nel simbolo [14] si considerassero quattro o più fattori, ovvero si considerasse il simbolo [15] relativo a forme ternarie, o anche un altro simbolo relativo a forme che contengano un maggior numero di variabili; e così le conseguenze che si deducono per le binarie dalla espressione del termine generale che abbiamo ora scritto, varranno ancora per le forme di un numero qualunque di variabili.

Ora dal termine generale [18] si deduce che applicando il simbolo [14] a tre forme binarie V_1, V_2, V_3, ogni termine del risultato avrà come fat-

tore una derivata di ciascuna delle medesime forme: ma ogni derivata ha seco congiunto al primo grado un coefficiente della rispettiva forma: dunque ogni termine del predetto risultato (invariante o covariante) conterrà come fattori tanti coefficienti al primo grado quante sono le forme alle quali si è applicato il simbolo, cioè ne conterrà tanti quante sono le cifre numeriche diverse nel simbolo compendiato che nel caso nostro è semplicemente $\overline{12}^p . \overline{13}^q . \overline{23}^r$; giacchè a questo numero di cifre diverse corrisponde il numero di quelle forme. Supponendo identiche le forme V_1, V_2, V_3, risulterà sotto le condizioni accennate nel numero precedente un invariante o covariante di una forma unica V, e sarà una funzione omogenea rispetto ai coefficienti della medesima; e quando si vuole che questa funzione invariante o covariante di una o più forme sia di un dato grado, per es. di secondo grado, nei coefficienti, converrà operare con un simbolo, per es. $\overline{12}^2$ ovvero $\overline{12}$, rappresentato in compendio da tante cifre numeriche diverse quante sono le unità contenute nel dato grado.

Ancora dal termine generale [18] si scorge che operando col simbolo [14] sopra le dette tre forme, l'ordine delle derivate, contenute in ogni termine del risultato, per ciascuna forma è costante ed uguale alla somma degli esponenti da cui nel simbolo compendiato $\overline{12}^p . \overline{13}^q . \overline{23}^r$ sono affetti i gruppi nei quali entra l'indice della medesima forma. Ne viene che per avere un invariante di un sistema di forme, si dovrà operare con un simbolo tale che per ciascuna cifra numerica del suo compendio la somma degli esponenti dei gruppi nei quali si trova la medesima cifra, sia uguale al grado della forma che ha una tale cifra per indice; e per avere un covariante, basterà che per una o più cifre quella somma di esponenti sia minore del grado della forma corrispondente: così i simboli $\overline{12}^2$, $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{23}^2$, $\overline{123}^3$ ci danno rispettivamante l'invariante di una o due binarie quadratiche, di una o di tre binarie di quarto grado, di un sistema di tre ternarie cubiche; come pure i simboli $\overline{12}$, $\overline{12}^2 . \overline{13}$, $\overline{123} . \overline{234}$ ci daranno i rispettivi covarianti di due forme binarie di secondo grado, di una o di tre binarie di terzo grado, di un sistema di quattro ternarie cubiche.

25. Fermandoci di nuovo sopra le forme binarie, possiamo ora mostrare che ad ogni invariante dall'*ennesimo* grado di una binaria di grado *m* corrisponde sempre un altro invariante dell'*emmesimo* grado di una binaria di grado *n*. Consideriamo, per esempio, il simbolo $\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2$, che contenendo tre cifre diverse, colla somma 4 negli esponenti di ciascuna, rappresenta nella sua applicazione un invariante di terzo grado relativamente

ai coefficienti di una binaria di quarto grado, come è stato testè dichiarato. Concepiamo pure un equazione di terzo grado in z che abbia per radici le tre quantità z_1, z_2, z_3, e nel simbolo assunto a ciascuno dei gruppi $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{31}$ sostituiamo la differenza corrispondente di due delle tre radici predette: avremo la funzione simmetrica

$$(z_1 - z_2)^2 \ (z_2 - z_3)^2 \ (z_3 - z_1)^2,$$

la quale (12) è un invariante per sè stessa e dà luogo a un invariante della forma binaria di terzo grado che si ottiene dalla equazione contemplata, col porre il rapporto $\frac{x}{y}$ in luogo della incognita z. Or bene questo invariante della forma binaria di terzo grado deve ascendere al grado quarto, rispetto ai coefficienti della stessa forma o della corrispondente equazione: perchè nella funzione simmetrica superiore essendo 4 il massimo degli esponenti di ciascuna radice, dovrà consistere nel numero 4 il grado di essa quando alle radici si sostituiscono i loro valori in funzione dei coefficienti della equazione; se non fosse così, poichè i coefficienti di una equazione equivalgono alla somma delle radici o dei prodotti di esse a due a due, a tre a tre, etc., e sono ciascuno una funzione di primo grado in ordine a ciascuna radice, ne seguirebbe che sostituendo di nuovo ai coefficienti i proprii valori, la funzione simmetrica delle radici che abbiamo notata di sopra, non risulterebbe più di quarto grado per rispetto a ciascuna radice ma di grado minore o maggiore di 4. Conchiudiamo che dunque all'invariante del terzo grado di una forma binaria biquadratica corrisponde viceversa un invariante del quarto grado di una forma binaria cubica.

Il ragionamento è generale e si applica a un invariante di grado qualunque n nei coefficienti, il quale si ottenga operando convenientemente col simbolo $\overline{12}^p . \overline{23}^q . \overline{34}^r \ldots$ sopra di una forma binaria di grado m: nel simbolo le cifre numeriche diverse saranno n di numero, e ciascuna di esse vi si troverà ripetuta un numero m di volte. Se quindi dinotiamo con z_1, z_2, z_3, z_4, etc. le n radici di una equazione di grado *ennesimo*, la funzione simmetrica

$$(z_1 - z_2)^p \ (z_2 - z_3)^q \ (z_3 - z_4)^r \ldots$$

sarà un invariante di una forma binaria di grado n che si deduce dalla

equazione, e un tale invariante ascenderà al grado m per rispetto ai coefficienti della forma o della equazione; giacchè m è appunto il massimo degli esponenti, di cui riesce dotata ciascuna radice nella precedente funzione simmetrica. Onde in generale ad ogni invariante di grado n relativamente ai coefficienti di una binaria di grado m, corrisponde sempre un altro invariante di grado m in ordine ai coefficienti di una binaria di grado n; cioè una forma di grado m possiede tanti invarianti dell'*ennesimo* grado nei coefficienti, quanti sono gli invarianti dell'*emmesimo* grado che possiede rispetto ai suoi coefficienti una forma binaria di grado n. Questo è il teorema, o *la legge di reciprocità* del Sig. Hermite.

La forma binaria biquadratica che abbiamo considerato da principio, ha nei suoi coefficienti, oltre all'invariante di terzo grado, anche un invariante di secondo grado (5); avrà quindi, come invariante dipendente da questi due, il prodotto dell'uno per l'altro, ovvero il prodotto di una potenza del primo per una potenza qualunque del secondo: conseguentemente la medesima forma dovrà avere rispetto ai suoi coefficienti tanti invarianti di un dato grado n, quante sono le soluzioni intere che ammette la equazione indeterminata $3x+2y=n$; ed altrettanti saranno pure, giusta la legge ora esposta, gl'invarianti di quarto grado nei coefficienti che ha una binaria di grado n. — Così anche una binaria di secondo grado ha bensì per invariante indipendente soltanto il suo discriminante (*ibid.*), quello cioè che si deduce dal quadrato $(z_1-z_2)^2$ della differenza tra le radici della corrispondente equazione quadratica, ed è di secondo grado nei coefficienti; ma è evidente che indicando con k un numero qualunque intero e positivo, saranno pure invarianti della medesima forma quelli che derivano da $(z_1-z_2)^{2k}$: ne segue che dunque ogni binaria di grado pari $2k$ ha un invariante di secondo grado, simboleggiato da $\overline{12}^{2k}$; e che le sole binarie di grado pari hanno un tale invariante, perchè altrimenti una binaria quadratica potrebbe avere un invariante di grado dispari nei coefficienti.

26. La stessa regola ha pur luogo nei covarianti di un dato grado in x ed y. Consideriamo in generale il covariante che risulta dalla applicazione del simbolo $\overline{12}^{\lambda}.\ \overline{23}^{\mu}.\ \overline{34}^{\nu}\ldots$ a una forma binaria di grado m. Supponendo che le cifre numeriche diverse sieno n di numero in questo simbolo, e che le medesime cifre $1, 2, 3, \ldots$ si trovino in esso ripetute rispettivamente un numero $a, b, c, \ldots$ di volte, il covariante sarà di grado n per riguardo ai coefficienti della forma primitiva, e di grado

$$(m-a)+(m-b)+(m-c)+\ldots=mn-(a+b+c+\ldots)$$

per riguardo alle variabili x ed y: la ragione della prima asserzione è evidente per ciò che è stato detto nel numero (24); e quella della seconda asserzione apparisce pur manifesta quando si rifletta che colla applicazione del simbolo la forma viene a differenziarsi a volte di seguito per causa della cifra 1, b volte per causa della cifra 2, etc. Si concepisca ora una equazione di grado *ennesimo* in z, le cui n radici sieno z_1, z_2, z_3, z_4, ...; e sulla norma del simbolo di operazione si formi la funzione simmetrica

$$[19] \quad \sum (z_1 - z_2)^{\lambda} (z_2 - z_3)^{\mu} (z_3 - z_4)^{\nu} \ldots (z - z_1)^{m-a} (z - z_2)^{m-b} (z - z_3)^{m-c} \ldots :$$

cotesta funzione è per sè stessa un covariante (18) della equazione che abbiamo concepito, ed è di grado $(m-a) + (m-b) + (m-c) + \ldots$ in z; dà luogo per conseguenza a un covariante della forma di grado n che si deduce dalla medesima equazione, e un tale covariante rimane nello stesso grado in x ed y che il covariante considerato da principio nel simbolo di operazione. Il grado però del medesimo covariante per rispetto ai coefficienti della equazione in z, o della forma corrispondente in x ed y, sarà precisamente il numero m; perchè è chiaro che nello sviluppo della funzione simmetrica precedente ciascun termine consiste in una potenza della z, moltiplicata per una funzione simmetrica delle radici z_1, z_2, z_3, etc., e nel complesso di tali funzioni è m il massimo esponente di ciascuna delle radici: si può questo vedere più chiaramente in particolare per es. nella funzione simmetrica $(z_1 - z_2)^2 (z - z_1)^2 (z - z_2)^2$, covariante di quarto grado rispetto alle radici z_1, z_2 di una quadratica, e corrispondente al covariante $\overline{12}^2$ di secondo grado rispetto ai coefficienti di una binaria biquadratica; in ambidue i covarianti il grado relativo alle variabili è 4. Se m è il grado della funzione [19] per risguardo a ciascuna radice, sarà pure m il grado nei coefficienti della forma binaria che si deduce dalla equazione, alla quale appartiene la medesima funzione [19]: di modo che ad ogni covariante di grado n rispetto ai coefficienti di una forma binaria di grado m, corrisponde sempre un covariante di grado m in ordine ai coefficienti di un'altra binaria di grado n, rimanendo in ambidue lo stesso il grado relativamente alle variabili; e così una forma binaria dell' *emmesimo* grado ha tanti covarianti di grado n nei coefficienti quanti sono i covarianti di grado m che ha per rispetto ai coefficienti una binaria dell'*ennesimo* grado.

Se prendiamo ad esempio la forma quadratica che abbiamo testè considerato in particolare, essa non possiede altri covarianti se non quelli che ri-

sultano dal prodotto di una potenza qualunque μ del suo discriminante per una potenza ν della stessa forma; e questi covarianti, introducendovi le radici z_1 e z_2 della equazione da cui proviene la forma, hanno generalmente per tipo la espressione

$$(z_1 - z_2)^{2\mu} \; (z - z_1)^{\nu} \; (z - z_2)^{\nu}.$$

Ora in tale funzione le radici z_1 e z_2 entrano al grado $2\mu + \nu$, e la variabile z entra al grado 2ν; quindi i covarianti di una binaria quadratica essendo di grado $2\mu + \nu$ nei coefficienti e di grado 2ν in x ed y, ne segue che ogni binaria del grado $2\mu + \nu$ avrà un covariante del secondo grado nei coefficienti e del grado pur 2ν in x ed y: ponendo $\nu = 1$, noi conchiuderemo che ogni forma binaria di grado dispari possiede un covariante del secondo grado sì nei coefficienti come nelle variabili.

27. La serie dei simboli compendiati $\overline{12}^2$, $\overline{12}^4$, $\overline{12}^6$,... che applicati a a una binaria ci dànno un invariante di secondo grado nei coefficienti delle rispettive forme di secondo, di quarto, di sesto grado, etc., ci darà pure (24) i covarianti delle forme che abbiano il proprio grado rispettivamente superiore al secondo, al quarto, al sesto, etc.: cotesti covarianti sono indicati dalle espressioni

$$[20] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 V}{dx^2} \dfrac{d^2 V}{dy^2} - \left(\dfrac{d^2 V}{dx\, dy}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{d^4 V}{dx^4} \dfrac{d^4 V}{dy^4} - 4 \dfrac{d^4 V}{d x^3\, dy} \dfrac{d^4 V}{dx\, dy^3} + 3 \left(\dfrac{d^4 V}{d x^2\, d y^2}\right)^2, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

le quali si ottengono, sviluppando i predetti simboli e applicandoli alla forma binaria V. Ora le medesime espressioni non sono altro, che gl'invarianti dei corrispondenti *emananti* della forma, quando questi vengano considerati come funzioni delle sole variabili esplicite.

A dichiarazione di un tale asserto, diciamo che se in una binaria V si pone $x + h\,x$ in vece della semplice x, ed $y + h\,y$ in vece della y, nello sviluppo della funzione giusta la serie di Taylor i coefficienti letterali delle diverse potenze della h, cioè i coefficienti $\left(x \dfrac{d}{d\,x} + y \dfrac{d}{d\,y}\right)^n V$, sono distinti

col nome *di emananti* della forma, e si dicono dell'ordine primo, secondo etc., a norma delle unità che si contengono nell'esponente n. Ora ciascuno degli emananti è un covariante della forma, alla quale appartiene. Perchè se noi nella funzione V trasformiamo le variabili colla sostituzione lineare

$$x = l_1 x' + m_1 y', \; y = l_2 x' + m_2 y',$$

le due derivate della medesima funzione rispetto alle nuove variabili saranno (20)

$$\frac{dV}{dx'} = l_1 \frac{dV}{dx} + l_2 \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dy'} = m_1 \frac{dV}{dx} + m_2 \frac{dV}{dy}:$$

dalle quali, supposto che la sostituzione sia unimodulare, si ricavano poi le formole

$$\frac{dV}{dx} = m_2 \frac{dV}{dx'} - l_2 \frac{dV}{dy'}, \quad \frac{dV}{dy} = l_1 \frac{dV}{dy'} - m_1 \frac{dV}{dx'};$$

e queste poichè possono scriversi nel seguente modo

$$\frac{dV}{dy} = l_1 \frac{dV}{dy'} + m_1 \times \left(-\frac{dV}{dx'}\right), \; -\frac{dV}{dx} = l_2 \frac{dV}{dy'} + m_2 \times \left(-\frac{dV}{dx'}\right),$$

ci mostrano che le due derivate $\frac{dV}{dy}$ e $-\frac{dV}{dx}$ si trasformano colla medesima sostituzione che le due variabili x ed y, e con queste sono perciò congredienti. Saranno dunque un simbolo di operazione invariante (21) il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dy} & -\frac{d}{dx} \\ x & y \end{vmatrix} = x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy},$$

e le sue potenze; e applicati cosiffatti simboli alla forma binaria V, ci daranno altrettanti covarianti della medesima forma, contenendosi nel risultato le due variabili x ed y.

Generalmente se la forma V abbraccia un numero qualunque di variabili $x, y, z, \ldots$, è per sè evidente che si ottiene sempre lo stesso risultato, sia che nella forma si mettano prima $x + h\,x$, $y + h\,y$, $z + h\,z$, etc. in luogo colle rispettive x, y, z, etc., e si trasformino poi le variabili nelle nuove $x', y', z', \ldots$ con una stessa sostituzione lineare, sia che si compiano prima queste sostituzioni nella forma e si pongano poi $x' + h\,x'$, $y' + h\,y'$, $z' + h\,z'$, etc. invece delle x', y', z', etc. Ciò vuol dire che se la forma V per la sostituzione lineare diviene V', il risultato che emerge dal porre $x + h\,x$, $y + h\,y$, etc. nella V e dal fare quindi le sostituzioni lineari, è identico a quello che si avrebbe col porre nella V' in vece delle x', y', etc. rispettivamente le quantità $x' + h\,x', y' + h\,y'$, etc.; e così uguagliando tra loro nei due risultati i cofficienti delle stesse potenze della quantità indeterminata h, conchiuderemo che gli emananti

$$\left(x\,\frac{d}{dx} + y\,\frac{d}{dy} + z\,\frac{d}{dz} + \ldots\right)^n \mathrm{V},$$

per la trasformazione delle variabili mediante una sostituzione lineare, divengono

$$\left(x'\,\frac{d}{dx'} + y'\,\frac{d}{dy'} + z'\,\frac{d}{dz'} + \ldots\right)^n \mathrm{V}'$$

e sono perciò giusta la definizione tutti covarianti della forma V. E qui è bene il ricordare che quando si opera per es. sopra una funzione omogenea di tre variabili o sopra una forma ternaria col simbolo $x\,\frac{d}{dx} + y\,\frac{d}{dy} + z\,\frac{d}{dz}$, senz'altro si ottiene per risultato la stessa funzione moltiplicata per un fattore numerico.

28. Per compiere la dichiarazione di ciò che abbiamo asserito di sopra, sappiamo finora che l'emanante di un ordine qualunque n, cioè

$$[21] \qquad \frac{d^n \mathrm{V}}{dx^n}\,x^n + n\,\frac{d^n \mathrm{V}}{dx^{n-1}\,dy}\,x^{n-1}\,y + \ldots,$$

quando si trasformano con una sostituzione lineare tutte le variabili, diviene

$$\frac{d^n V'}{d x'} x'^n + n \frac{d^n V'}{d x'^{n-1} d y'} x'^{n-1} y' + \ldots .$$

Supponiamo che trasformando in esso le sole esplicite, si abbia per risultato la espressione

$$A x'^n + n B x'^{n-1} y' + \ldots ;$$

dovranno essere i coefficienti A, B, etc., funzioni tali delle variabili $x, y, \ldots$, che quando anche queste sieno trasformate colla detta sostituzione lineare, divengano quei coefficienti rispettivamente $\frac{d^n V'}{dx'^n}, \frac{d^n V'}{dx'^{n-1} dy'}$; etc.: ma se nell'emanante [21] si considerano come variabili le sole $x, y, \ldots$ esplicite, un suo invariante è una funzione dei coefficienti $\frac{d^n V}{d x^n}, \frac{d^n V}{dx^{n-1} dy}$, etc., la quale nel caso per es. di una sostituzione unimodulare riesce uguale a una funzione consimile di A, B, etc.: dunque il medesimo invariante sarà tale funzione dei coefficienti $\frac{d^n V}{d x^n}, \frac{d^n V}{dx^{n-1} dy}$, etc., dell'emanante proposto, che quando per la sostituzione unimodulare si trasformano anche in questi come in A, B, etc., le variabili $x, y, \ldots$, risulterà uguale a una funzione consimile delle derivate $\frac{d^n V'}{dx'^n}, \frac{d^n V'}{dx'^{n-1} dy'}$, etc.; e così per definizione (13) ogni invariante di un dato emanante che si consideri come funzione delle sole variabili esplicite, è un covariante della forma primitiva.

Se ora noi prendiamo in una data forma binaria i successivi emananti di ordine pari ma inferiore al grado della stessa forma, e quindi in ciascuno di questi emananti troviamo l'invariante di secondo grado per rispetto ai coefficienti con uno dei metodi già esposti, ovvero lo formiamo colla legge già nota (5) per le forme quadratiche e biquadratiche, otterremo per risultati le soprascritte espressioni [20] di altrettanti covarianti della data binaria, ovvero di un'altra forma binaria la quale abbia il suo grado rispettivamente superiore al secondo, al quarto, etc. Risguardo poi a una forma ternaria V di qualunque grado, prendiamo l'emanante per es. di secondo ordine

$$\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz} \right)^2 V ,$$

e considerando come variabili le sole esplicite x, y, z, formiamo il suo invariante o discriminante

$$\frac{d^2 V}{dx^2}\frac{d^2 V}{dy^2}\frac{d^2 V}{dz^2} + 2\frac{d^2 V}{dx\,dy}\frac{d^2 V}{dx\,dz}\frac{d^2 V}{dy\,dz}$$

$$-\frac{d^2 V}{dx^2}\left(\frac{d^2 V}{dy\,dz}\right)^2 - \frac{d^2 V}{dy^2}\left(\frac{d^2 V}{dx\,dz}\right)^2 - \frac{d^2 V}{dz^2}\left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right)^2$$

giusta la legge veduta alla fine del numero (22) per una ternaria quadratica: sarà questa la espressione come dell'invariante di una forma ternaria di secondo grado, così di un covariante di una ternaria di grado qualunque ma superiore al secondo; il suo simbolo compendiato è $\overline{123}^2$. Nella stessa maniera si trovano per questa forma e per le altre composte di un maggior numero di variabili, i covarianti che provengono dai successivi emananti di ordine pari, posto che si conoscano gl'invarianti di queste ultime funzioni.

29. Date le forme V', V'', V''',... che contengano altrettante variabili x, y, z,..., abbiamo notato (20) che le serie delle loro derivate rispetto a ciascuna variabile sono contragredienti colla serie delle stesse quantità variabili, e perciò congredienti tutte tra loro; sarà dunque (21) un simbolo di operazione invariante il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dV'}{dx} & \frac{dV'}{dy} & \frac{dV'}{dz} & \cdots \\ \frac{dV''}{dx} & \frac{dV''}{dy} & \frac{dV''}{dz} & \cdots \\ \frac{dV'''}{dx} & \frac{dV'''}{dy} & \frac{dV'''}{dz} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Esso è detto di Jacobi o *Jacobiano* delle forme proposte, e non è altro se non il determinante che risulta da n funzioni lineari ad n variabili, vale a dire è il determinante degli emananti di primo ordine

$$x\frac{dV'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}+z\frac{dV'}{dz}+\ldots$$

$$x\frac{dV''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}+z\frac{dV''}{dz}+\ldots,$$

$$x\frac{dV'''}{dx}+y\frac{dV'''}{dy}+z\frac{dV'''}{dz}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

che appartengono alle forme date e si considerano come funzioni delle sole variabili esplicite: lo stesso determinante, contenendo in sè le variabili, sarà un covariante del dato sistema di forme.

Data poi una sola forma V a un numero qualunque di variabili, si prendano le derivate parziali $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$,..., che riescono generalmente altrettante funzioni delle variabili, x, y, z, etc., e per il sistema di queste funzioni derivate si calcoli il determinante di Jacobi che nel caso presente ci si offre sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2V}{dx^2} & \frac{d^2V}{dx\,dy} & \frac{d^2V}{dx\,dz} & \ldots \\ \frac{d^2V}{dx\,dy} & \frac{d^2V}{dy^2} & \frac{d^2V}{dy\,dz} & \ldots \\ \frac{d^2V}{dx\,dz} & \frac{d^2V}{dy\,dz} & \frac{d^2V}{dz^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix};$$

sarà questo un covariante del sistema delle prime derivate, o semplicemente un covariante della forma proposta. È detta funzione di Hesse o *Essiana* della medesima forma, e non è altro se non il discriminante dell'emanante di secondo ordine

$$\left(x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}+z\frac{dV}{dz}+\ldots\right)^2=x^2\frac{d^2V}{dx^2}$$

$$+ y^2 \frac{d^2 V}{dy^2} + z^2 \frac{d^2 V}{dz^2} + \ldots + 2 xy \frac{d^2 V}{dx\, dy} + 2 x z \frac{d^2 V}{dx\, dz} + \ldots,$$

risguardato sempre come funzione delle sole variabili esplicite: lo sviluppo del determinante *Essiano* consiste nella prima delle espressioni [20] per una forma binaria, nella espressione notata alla fine del numero precedente per una ternaria, e così di seguito nel discriminante del rispettivo emanante di secondo ordine per un'altra forma a maggior numero di variabili.

Per applicare a qualche esempio la teoria precedente, il determinante di Jacobi

$$\frac{d V'}{dx} \frac{d V''}{dy} - \frac{d V'}{dy} \frac{d V''}{dx}$$

per il sistema delle due forme binarie quadratica e cubica

$$V' = A x^2 + 2 B x y + C y^2,$$
$$V'' = H x^3 + 3 K x^2 y + 3 P x y^2 + Q y^3,$$

tolto il fattore 6 comune a tutti i termini e fatta la loro riduzione, sarà il seguente covariante di terzo grado nelle variabili

$$(AK - BH) x^3 + (2 AP - BK - CH) x^2 y + (AQ + BP - 2 CK) x y^2 + (BQ - CP) y^3.$$

La funzione *Essiana*, mediante l'applicazione della prima delle espressioni [20], poste nel numero (27), per la forma binaria cubica

$$V = A x^3 + 3 B x^2 y + 3 H x y^2 + K y^3,$$

senza il fattore comune sarà il covariante quadratico

$$(AH - B^2) x^2 + (AK - BH) x y + (BK - H^2) y^2;$$

e per la forma biquadratica

$$V = A x^4 + 4 B x^3 y + 6 C x^2 y^2 + 4 H x y^3 + K y^4,$$

sarà il covariante

$$(AC - B^2) x^4 + 2 (AH - BC) x^3 y + (AK + 2 BH - 3 C^2) x^2 y^2$$
$$+ 2 (BK - C H) x y^3 + (CK - H^2) y^4.$$

Formando il determinante *Jacobiano* di ciascuna delle due forme e della corrispondente funzione *Essiana*, troveremo per la forma cubica e la sua *Essiana* il covariante di terzo grado

$$(A^2 K + 2 B^3 - 3 ABH) x^3 + 3 (B^2 H + ABK - 2 AH^2) x^2 y$$
$$+ 3 (2 B^2 K - B H^2 - AHK) x y^2 + (3 BHK - AK^2 - 2 H^3) y^3;$$

e per la forma biquadratica e la sua *Essiana* troveremo pure il covariante *Jacobiano*, che è di sesto grado per rispetto alle variabili ed ha per coefficienti nei successivi termini le rispettive quantità

$$A^2 H + 2 B^3 - 3 ABC, \quad A^2 K + 2 ABH + 6 B^2 C - 9 AC^2,$$
$$5 ABK + 10 B^2 H - 15 ACH, \quad 10 B^2 K - 10 A H^2,$$
$$15 BCK - 5 AHK - 10 BH^2, \quad 9 C^2 K - AK^2 - 2 BHK - 6 C H^2,$$
$$3 CHK - 2 H^3 - BK^2.$$

30. Veniamo in fine alle funzioni contravarianti di una o più forme date. Sieno $x, y, z, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ due serie di variabili, delle quali la seconda si trasformi con una sostituzione lineare reciproca (20) di quella onde viene trasformata la prima serie; e sia φ (A, B, ..., $\alpha, \beta, \ldots$) una funzione dei coefficienti A, B, ... di una forma o quantica F in x, y, z, etc., e delle variabili α, β, γ, etc.: si dirà φ una funzione *contravariante* della F, se adoperando le prefate sostituzioni inverse, conservi la stessa dipendenza di composizione dalla trasformata di F che aveva da questa quantica prima della trasformazione; ovvero in altri termini, se alla medesima funzione φ riesca uguale o differisca solo per un fattore costante una consimile funzione φ (A', β', .., $\alpha', \beta', \ldots$) dei coefficienti della trasformata di F, e delle nuove variabili α', β', γ', etc. rispetto alla seconda delle due serie primitive.

Data, a cagione di esempio, la forma ternaria di secondo grado

$$[F] \qquad G x^2 + H y^2 + K z^2 + 2 P x y + 2 Q x z + 2 R y z$$

la quale uguagliata a *zero* non è che l'equazione trilineare di una sezione conica, se si prende la funzione mista

$$[\rho] \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z$$

che fatta uguale a zero rappresenta una retta, essendo α, β, γ le coordinate tangenziali di questa, è noto dalla Geometria (*Ved.* Atti di questa Accademia, An. XXX. Pag. 180) che la condizione da verificarsi, affinchè la retta $[\rho]$ sia tangente alla conica $[F]$, consiste nell'annullamento della funzione

$$[\varphi] \quad \begin{cases} (R^2 - HK)\,\alpha^2 + (Q^2 - GK)\,\beta^2 + (P^2 - GH)\,\gamma^2 \\ + 2\,(KP - QR)\,\alpha\beta + 2\,(HQ - PR)\,\alpha\gamma + 2\,(GR - PQ)\,\beta\,\gamma. \end{cases}$$

Ora se noi adoperiamo per le variabili x, y, z la sostituzione lineare di di modulo Δ, cioè la sostituzione

$$x = l_1\,x' + m_1\,y' + n_1\,z',\ y = l_2\,x' + m_2\,y' + n_2\,z', z = l_3\,x' + m_3\,y' + n_3\,z',$$

la forma $[F]$ diviene evidentemente

$$G'\,x'^2 + H'\,y'^2 + K'\,z'^2 + 2\,P'\,x'\,y' + 2\,Q'\,x'\,z' + 2\,R'\,y'\,z';$$

e la funzione $[\rho]$ si trasforma in quest'altra

$$\alpha\,(l_1\,x' + m_1\,y' + n_1\,z') + \beta\,(l_2\,x' + m_2\,y' + n_2\,z') + \gamma\,(l_3\,x' + m_3\,y' + n_3\,z'),$$

ovvero

$$\alpha'\,x' + \beta'\,y' + \gamma'\,z',$$

quando si faccia

$$\alpha' = l_1\,\alpha + l_2\,\beta + l_3\,\gamma,\ \beta' = m_1\,\alpha + m_2\,\beta + m_3\,\gamma,\ \gamma' = n_1\,\alpha + n_2\,\beta + n_3\,\gamma,$$

e per conseguenza

$$\alpha = \tfrac{1}{\Delta}\,(L_1\,\alpha' + M_1\,\beta' + N_1\,\gamma'),\ \beta = \tfrac{1}{\Delta}\,(L_2\,\alpha' + M_2\,\beta' + N_2\,\gamma'),\ \gamma = \tfrac{1}{\Delta}\,(L_3\,\alpha' + M_3\,\beta' + N_3\,\gamma')$$

Si vede dunque che trasformando le coordinate di un punto qualunque della conica con una sostituzione lineare, le coordinate tangenziali della retta $[\rho]$ restano trasformate (20) colla sostituzione inversa, e che nella trasformazione ambedue le funzioni $[F]$ e $[\rho]$ conservano la stessa forma di prima: quindi la espressione analitica della condizione, perchè la retta rappresentata dalla trasformata di $[\rho]$ sia tangente alla conica rappresentata

dalla trasformata di [F], conserverà pure la stessa forma di prima, e sarà la [φ] accentuata in ogni lettera ed uguagliata a zero. La funzione [φ] non differirà dalla nuova funzione [φ'] che per un fattore costante che è una potenza del modulo di sostituzione, e sarà un *contravariante* della forma data [F].

31. Dopo ciò, per indicare un modo di trovare i contravarianti di una data forma, osserviamo che nelle forme binarie le quantità contravarianti α, β si trovano rispetto alle x ed y in quella medesima condizione, nelle quale rispetto a queste stesse variabili si trovano le derivate parziali di 1° ordine della funzione V considerata nel numero (27); e perciò β e $-\alpha$ sono congredienti con x e y, e ambedue le coppie di variabili corrispondenti si trasformano con una stessa sostituzione lineare. Quindi se la funzione φ (A, B,..., x, y) per una sostituzione per esempio unimodulare si trasforma in φ (A', B',..., x'. y') ed è un covariante di una data forma binaria, la funzione φ (A, B,..., β, $-\alpha$) si trasformerà nell'altra φ (A', B',..., β', $-\alpha'$) e sarà per definizione un contravariante della medesima binaria: dunque, nelle forme binarie, non vi ha essenziale distinzione tra i *covarianti* e i *contravarianti*; e per avere queste seconde funzioni, basterà che in quelle prime si sostituiscano rispettivamente β, $-\alpha$ in luogo delle variabili x ed y.

Quanto alle altre forme, consideriamo le ternarie V_1, V_2, V_3,..., nelle quali sieno distinti cogli indici corrispondenti 1, 2, 3,.., le variabili x, y, z: essendo la serie α, β, γ contragrediente per ipotesi colle serie di variabili

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \text{etc.},$$

sarà congrediente (20) colle altre serie

$$\frac{d\,V_1}{dx_1}, \frac{d\,V_1}{dy_1}, \frac{d\,V_1}{dz_1};\ \frac{d\,V_2}{dx_2}, \frac{d\,V_2}{dy_2}, \frac{d\,V_2}{dz_2};\ \text{etc.}:$$

dunque come nel caso degli invarianti e covarianti (21), così nel caso attuale sarà un simbolo di un'operazione invariante da farsi sopra le forme ternarie V_1, V_2, V_3, etc. il prodotto

di forme sarà senz'alcun dubbio un *contravariante*; altrimenti ciò che si ottiene dall'applicazione del simbolo, conterrà anche le variabili x, y, etc., e sarà un *covariante misto* del sistema: così abbiamo veduto, ed è conforme alla conclusione ora dedotta, che operando col simbolo $\overline{\alpha 12}^2$ sopra due ternarie quadratiche, si ha per risultato un contravariante delle due forme e quindi anche di una forma unica; operando collo stesso simbolo sopra due forme di grado superiore al secondo, si avrebbe un covariante misto del sistema ed anche in fine di una sola forma.

33. Il simbolo [22], col quale nel numero (31) abbiamo operato sopra le due ternarie quadratiche V_1 e V_2 per dedurne un contravariante, collo sviluppo del quadrato si può scrivere nel seguente modo:

$$[23] \qquad C_0\,\alpha^2 + C_1\,\beta^2 + C_2\,\gamma^2 + C_3\,\alpha\beta + C_4\,\alpha\gamma + C_5\,\beta\gamma.$$

Parimenti se insieme colle medesime due forme consideriamo anche la terza

$$V = G\,x^2 + H\,y^2 + K\,z^2 + 2\,P\,x\,y + 2\,Q\,x\,z + 2\,R\,y\,z,$$

per avere un invariante del sistema di tutte tre le forme, converrà operare sopra di esse (24) col simbolo $\overline{123}^2$, ossia col simbolo

$$[24] \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \end{vmatrix}^2;$$

e questo, sviluppato che sia, si può anche mettere sotto l'aspetto

$$C_0\,\frac{d^2}{dx^2} + C_1\,\frac{d^2}{dy^2} + C_2\,\frac{d^2}{dz^2} + C_3\,\frac{d^2}{dx\,dy} + C_4\,\frac{d^2}{dx\,dz} + C_5\,\frac{d^2}{dy\,dz}$$

dove i coefficienti C_0, C_1, etc. sono gli stessi che nel simbolo contravariante [23]. Ora, a fine di trovare espressioni opportune di questi coefficienti, osserviamo che dalla forma V si hanno le derivate

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 2\,G,\ \frac{d^2 V}{dy^2} = 2\,H,\ \frac{d^2 V}{dz^2} = 2\,K,$$

$$\frac{d^2 V}{dx\,dy} = 2\,P,\ \frac{dV^2}{dx\,dz} = 2\,Q,\ \frac{d^2 V}{dy\,dz} = 2\,R;$$

e che perciò chiamando I l'invariante che risulta dalla applicazione dell'ultimo simbolo alle tre forme quadratiche V, V_1, V_2, senza il fattore 2 comune a tutti i termini, si avrà

$$I = C_0\,G + C_1\,H + C_2\,K + C_3\,P + C_4\,Q + C_5\,R:$$

conseguentemente differenziando rispetto ai coefficienti di V, otterremo

$$C_0 = \frac{dI}{dG},\ C_1 = \frac{dI}{dH},\ C_2 = \frac{dI}{dK},\ C_3 = \frac{dI}{dP},\ C_4 = \frac{dI}{dQ},\ C_5 = \frac{dI}{dR};$$

e se le tre forme fossero identiche, allora per ragione della simmetria del simbolo [24] le C_0, C_1, etc., sarebbero ripetute ciascuna tre volte nella derivata corrispondente dell'invariante I, e si avrebbe $C_0 = \frac{1}{3}\frac{dI}{dG}$, $C_1 = \frac{1}{3}\frac{dI}{dH}$, etc.: attesi dunque cotesti valori, il contravariante [23] diverrà

$$[25] \qquad \alpha^2 \frac{dI}{dG} + \beta^2 \frac{dI}{dH} + \gamma^2 \frac{dI}{dK} + \alpha\beta\frac{dI}{dP} + \alpha\gamma\frac{dI}{dQ} + \beta\gamma\frac{dI}{dR}$$

dopo la soppressione del fattore comune $\frac{1}{3}$, e apparterrà alla forma ternaria quadratica V quando a questa appartenga pure l'invariante I. Da tutto questo che abbiamo discorso e possiamo applicare a un'altra forma qualunque, s'inferisce che da un simbolo, per esempio $\overline{123}^2$, di un invariante si passa a quello $\overline{\alpha 12}^2$ di un contravariante, col sostituire a una cifra del primo simbolo una variabile contravariante α; e che senza effettuare l'operazione $\overline{\alpha 12}^2$ sopra la forma V, si possono dedurre uno o più contravarianti della medesima V da un suo invariante già noto I, mediante la espressione [25] o una potenza qualunque $\left(\alpha^2 \frac{d}{dG} + \beta^2 \frac{d}{dH} + \ldots\right)^n$ I di tale espressione. A cosiffatti contravarianti, dedotti da un invariante, si attribuisce il nome di *evettanti* della forma V, o del suo invariante I.

In generale possiamo dichiarare la medesima cosa nel modo che segue. Data una forma

$$A\,x^m + m\,B\,x^{m-1}\,y + m\,C\,x^{m-1}\,z + \frac{m\,(m-1)}{2}\,D\,x^{m-2}\,y^2 + \ldots$$

di grado qualunque m, sia

$$I = \varphi\,(A,\ B,\ C,\ \ldots)$$

un invariante di essa: aggiungendo alla forma il prodotto di una quantità arbitraria h per la potenza *emmesima* della funzione mista $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z$, la quale per la trasformazione delle variabili x, y, z, rimane invariata (30) nella composizione al pari della data forma, avremo un invariante analogo

$$\varphi\,(A + h\,\alpha^m,\ B + h\,\alpha^{m-1}\,\beta,\ C + h\,\alpha^{m-1}\,\gamma, \ldots)$$

in ordine alla nuova forma o quantica

$$A\,x^m + m\,B\,x^{m-1}\,y + m\,C\,x^{m-1}\,z + \ldots + h\,(\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z)^m.$$

Questa ultima funzione φ, moltiplicata per una certa potenza del modulo di sostituzione, è uguale a una funzione consimile dei coefficienti della trasformata della nuova quantica; e svolta l'una e l'altra funzione secondo la serie di Taylor, dovranno essere uguali tra loro nei due membri della uguaglianza i coefficienti delle stesse potenze della quantità arbitraria h: ciò vuol dire che indicato con n un numero qualunque intero e positivo, le espressioni

$$\left(\alpha^m \frac{d}{d\,A} + \alpha^{m-1}\,\beta\,\frac{d}{d\,B} + \alpha^{m-1}\,\gamma\,\frac{d}{d\,C} + \alpha^{m-2}\,\beta^2\,\frac{d}{d\,D} + \ldots\right)^n I$$

si possono considerare come tutti invarianti rispetto alla nuova quantica, e sono tutti *contravarianti* della forma data da principio, o *evettanti* del suo invariante I.

Per $n = 1$, si avrebbe l'evettante di primo ordine, il quale relativamente alla ternaria quadratica V, considerata di sopra, coincide colla funzione [25]: e poichè l'invariante di una tale forma è quello trovato alla fine del numero (22), cioè il discriminante

$$I = \begin{vmatrix} G & P & Q \\ P & H & R \\ Q & R & K \end{vmatrix};$$

perciò, eseguita l'operazione [25], per l'evettante di questo risulterà coi segni mutati la funzione contravariante [φ] indicata nel numero (30), la quale può essere messa sotto forma del determinante

$$E = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & G & P & Q \\ \beta & P & H & R \\ \gamma & Q & R & K \end{vmatrix}.$$

Se si forma il discriminante I_1 di E, o della funzione [φ], e se ne calcola quindi l'evettante E_1 a norma del simbolo [25], sarà E_1 un contravariante di [φ], o un covariante della forma primitiva V, e si troverà $E_1 = I \times V$; e come la funzione E, ovvero [φ], si deduce dalla forma V, così questa si può viceversa dedurre da quella con riguardo all'invariante I.

34. Nello stesso modo si trovano gli *evettanti* delle forme binarie, o dei loro invarianti; ma in questo caso, essendo β e $-\alpha$ congredienti (31) con x ed y, ovvero α e β congredienti con $-y$ ed x, nell'evettante di una binaria o nel suo simbolo potremo sostituire ad α e β rispettivamente le variabili $-y$ ed x, e quindi effettuare le operazioni indicate nel simbolo. Così, per esempio, la binaria cubica

$$A x^3 + 3 B x^2 y + 3 H x y^2 + K y^3$$

ha per suo invariante (2 . 5) il discriminante

$$I = A^2 K^2 + 4 A H^3 + 4 B^3 K - 3 B^2 H^2 - 6 A B H K,$$

e per evettante di 1° ordine la espressione

$$\alpha^3 \frac{dI}{dA} + \alpha^2 \beta \frac{dI}{dB} + \alpha \beta^2 \frac{dI}{dH} + \beta^3 \frac{dI}{dK}:$$

posto $-y$ in vece di α, ed x invece di β, l'evettante diviene

$$-y^3 \frac{dI}{dA} + y^2 x \frac{dI}{dB} - y x^2 \frac{dI}{dH} + x^3 \frac{dI}{dK};$$

ed eseguite le derivazioni sopra la funzione invariante I, risulterà dopo

la soppressione del fattore comune 2, l'evettante cercato

$$(3\,BHK - AK^2 - 2\,H^3)\,y^3 + 3\,(2\,B^2K - AHK - BH^2)\,y^2\,x$$
$$+ 3\,(ABK - 2\,AH^2 + B^2H)\,y\,x^2 + (A^2K - 3\,ABH + 2\,B^3)\,x^3,$$

il quale, come abbiamo già osservato (31), coincide colla funzione covariante di terzo grado che è stata trovata altrove (17).

Ancora dal simbolo di un invariante di una data forma binaria si ricava immediatamente il simbolo con cui dobbiamo operare sopra la forma, per ottenere l'evettante corrispondente. Imperocchè se nel fattore per esempio $\overline{24}$ del simbolo compendiato di un invariante si sostituisce alla cifra 4 (e così in ogni altro fattore che contenga la medesima cifra) la variabile contravariante α, si ottiene (33) il simbolo di un contravariante della forma o di un suo evettante per rispetto al dato invariante: ora il medesimo fattore simbolico, per una tale sostituzione divenendo $\overline{\alpha 2}$, e per lo svolgimento scrivendosi $\alpha \frac{d}{dy} - \beta \frac{d}{dx}$, si trasforma dipoi nel binomio $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}$ col porre $-y$ ed x in luogo di α e β, e col mutare i segni ai due termini risultanti; e quest'ultimo binomio, applicato a una funzione omogenea delle due variabili x ed y, o a una forma binaria, non fa altro che introdurre nel risultato un fattore numerico costante, il quale può essere soppresso e fatto sparire dallo stesso risultato. Dunque se dal simbolo di un invariante di una data forma binaria si tolgono tutti i fattori che come $\overline{24}$ contengono una stessa figura per es. 4, e che nel passaggio al simbolo di un contravariante corrispondono al predetto binomio $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}$, si avrà senza dubbio il simbolo dell'evettante della binaria per rispetto al medesimo invariante: così essendo $\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{24}$ il simbolo dell'invariante di quarto grado nei coefficienti, o del discriminante della binaria cubica che abbiamo considerato or ora, il simbolo del suo evettante sarà $\overline{12}^2 . \overline{13}$, ovvero $\overline{34}^2 . \overline{13}$, etc., il quale risulta dal primo simbolo mediante la soppressione di tutti gli ambi in cui si trova la cifra 4, ovvero la cifra 2, etc.,

35. Abbiamo visto come dagli invarianti e covarianti di una forma o dai loro simboli si può passare ai contravarianti o ai simboli di queste funzioni; vediamo ora come per converso dai contravarianti si possono dedurre quelle prime funzioni. In una funzione contravariante per esempio di una forma ternaria V

(ciò che diremo, si applica generalmente a qualunque forma o sistema di forme), le quantità α, β, γ si suppongono solo trasformate con una sostituzione reciproca di quella onde si trasformano le variabili x, y, z contenute nella stessa V: ma in cosiffatta condizione si trovano appunto (20) i simboli di operazione $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$, relativi a una forma o isolata o unita con altre in un dato sistema, ed anche nella medesima condizione si trovano le derivate $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$; dunque nel contravariante di una forma V o di un sistema di forme, in luogo delle quantità contravarianti α, β, γ, potremo mettere quei primi simboli di operazioni da eseguirsi sopra la V, ovvero potremo anche mettere queste ultime derivate della stessa funzione V: colla prima sostituzione otterremo evidentemente il simbolo operativo di un *invariante* o *covariante* della forma o del sistema dato, e l'uno o l'altro otterremo come risultato dell'operazione, secondochè in questo risultato si conterranno o no le variabili x, y, z; colla seconda sostituzione poi, otterremo sempre un *covariante* della forma V, o del sistema.

Nel primo caso è manifesto che il simbolo compendiato dell'invariante o del covariante si ricava da quello del contravariante, scrivendo in questo ultimo simbolo una nuova e stessa cifra numerica invece di ciascuna lettera α: così se $\overline{\alpha 12}^p$ è il simbolo del contravariante, il simbolo dell'invariante o del covariante sarà $\overline{123}^p$; e se quello è $\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 24}$, questo sarà $\overline{123}\,.\,\overline{124}$.

Nel secondo caso poi, il simbolo del covariante si ricaverà dal simbolo del contravariante, scrivendo in questo una nuova e differente cifra numerica per ciascuna lettera α; di modo che se per es. $\overline{12\alpha}^2$ è il simbolo compendiato del contravariante di un sistema, quello del covariante sarà $\overline{123}\,.\,\overline{124}$, riferendo sempre le nuove cifre a una medesima forma di quelle che costituiscono il sistema. Infatti poniamo che rispetto al sistema delle due forme V_1 e V_2, il simbolo operativo di un contravariante sia quello che abbiamo ora indicato per primo esempio, cioè sia

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^2;$$

è chiaro che se per ridurre un tale simbolo a quello di un covariante, si sostituiscono alle quantità contravarianti α, β, γ le rispettive derivate $\frac{d\,V_1}{dx}$, $\frac{d\,V_1}{dy}$, $\frac{d\,V_1}{dz}$, il risultato del suo sviluppo sarà quello stesso che si otterrebbe in fine quando si fossero prima separati nel simbolo primitivo i due fattori uguali, e si fossero quindi sostituiti in luogo di α, β, γ nell'uno dei due fattori i simboli $\frac{d}{dx_3}$, $\frac{d}{dy_3}$, $\frac{d}{dz_3}$ relativi alla forma V_1, e nell'altro fattore i simboli $\frac{d}{dx_4}$, $\frac{d}{dy_4}$, $\frac{d}{dz_4}$ relativi pure alla medesima forma V_1: ma con questa seconda operazione il simbolo $\overline{12\alpha}^2$ diviene

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dy_3} & \frac{d}{dz_3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dz_1} \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dz_2} \\ \frac{d}{dx_4} & \frac{d}{dy_4} & \frac{d}{dz_4} \end{vmatrix},$$

e si scrive in compendio $\overline{123}\,.\,\overline{124}$. Dunque etc,

36. Chiudendo la presente Nota, osserviamo che il contravariante $[\Phi]$, trovato alla fine del numero (31) e appartenente alle due ternarie quadratiche V_1 e V_2, quando riesca uguale a *zero*, ci esprime che la retta $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ è tagliata armonicamente dalle due coniche $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Infatti se noi eliminiamo la variabile z tra l'equazione della retta e quella di ciascuna conica, provengono le due nuove equazioni

$$[26]\quad \begin{cases} (G'\gamma^2 + K'\alpha^2 - 2Q'\alpha\gamma)\,x^2 + 2(P'\gamma^2 + K'\alpha\beta - R'\alpha\gamma - Q'\beta\gamma)\,xy \\ \qquad + (H'\gamma^2 + K'\beta^2 - 2R'\beta\gamma)\,y^2 = 0, \\ (G''\gamma^2 + K''\alpha^2 - 2Q''\alpha\gamma)\,x^2 + 2(P''\gamma^2 + K''\alpha\beta - R''\alpha\gamma - Q''\beta\gamma)\,xy \\ \qquad + (H''\gamma^2 + K''\beta^2 - 2R''\beta\gamma)\,y^2 = 0; \end{cases}$$

e queste equazioni devono essere verificate rispettivamente dalle coordinate delle due coppie di punti, nei quali la retta prenominata s'incontra colle

due coniche. Quindi la condizione perchè la prima coppia di punti sia armonicamente coniugata colla seconda, consiste (7) nella equazione

$$(G'\gamma^2 + K'\alpha^2 - 2Q'\alpha\gamma)(H''\gamma^2 + K''\beta^2 - 2R''\beta\gamma)$$

$$+ (G''\gamma^2 + K''\alpha^2 - 2Q''\alpha\gamma)(H'\gamma^2 + K'\beta^2 - 2R'\beta\gamma)$$

$$- 2(P'\gamma^2 + K'\alpha\beta - R'\alpha\gamma - Q'\beta\gamma)(P''\gamma^2 + K''\alpha\beta - R''\alpha\gamma - Q''\beta\gamma) = 0;$$

e una tale equazione, svolta e ridotta, non è altro se non la $[\Phi] = 0$.

Se insieme colle due sopraddette forme V_1 e V_2 si considera anche la quadratica

$$V = Gx^2 + Hy^2 + Kz^2 + 2Pxy + 2Qxz + 2Ryz,$$

e sopra il sistema delle tre forme si opera col simbolo $\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 31}$, si avrà pure un contravariante $[\Phi']$ che è di terzo grado per rispetto ai coefficienti e alle variabili; la sua espressione sarà

$$[\Phi'] \quad \left\{ \begin{array}{l} (HKR)\alpha^3 + (KGQ)\beta^3 + (GHP)\gamma^3 - [(HKQ) + 2(KRP)]\alpha^2\beta \\ + [(GKR) + 2(KQP)]\alpha\beta^2 + [(KHP) + 2(HRQ)]\alpha^2\gamma \\ - [(GHR) + 2(HPQ)]\alpha\gamma^2 - [(KGP) + 2(GQR)]\beta^2\gamma \\ + [(HGQ) + 2(GPR)]\beta\gamma^2 + [(GHK) - 4(PQR)]\alpha\beta\gamma, \end{array} \right.$$

dove con (HKR), (KGQ), (G H P),... sono rispettivamente indicati i determinanti

$$\begin{vmatrix} H & K & R \\ H' & K' & R' \\ H'' & K'' & R'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} K & G & Q \\ K' & G' & Q' \\ K'' & G'' & Q'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} G & H & P \\ G' & H' & P' \\ G'' & H'' & P'' \end{vmatrix}, \ldots:$$

ora nel caso attuale le due coppie di punti che verificano le equazioni [26], e la coppia che verifica la terza equazione

$$(G\gamma^2 + K\alpha^2 - 2Q\alpha\gamma)\,x^2 + 2(P\gamma^2 + K\alpha\beta - R\alpha\gamma - Q\beta\gamma)\,xy$$
$$+ (H\gamma^2 + K\beta^2 - 2R\beta\gamma)\,y^2 = 0,$$

appartengono a un sistema in involuzione (10 *in fine*), quando sia nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} G\gamma^2+K\alpha^2-2Q\alpha\gamma, & P\gamma^2+K\alpha\beta-R\alpha\gamma-Q\beta\gamma, & H\gamma^2+K\beta^2-2R\beta\gamma \\ G''\gamma^2+K''\alpha^2-2Q''\alpha\gamma, & P''\gamma^2+K''\alpha\beta-R''\alpha\gamma-Q''\beta\gamma, & H''\gamma^2+K''\beta^2-2R''\beta\gamma \\ G'\gamma^2+K'\alpha^2-2Q'\alpha\gamma, & P'\gamma^2+K'\alpha\beta-R'\alpha\gamma-Q'\beta\gamma, & H'\gamma^2+K'\beta^2-2R'\beta\gamma \end{vmatrix}$$

che sviluppato si riduce alla soprascritta funzione $[\Phi']$; dunque $[\Phi'] = 0$ ci esprime la condizione perchè sieno in involuzione tra loro le tre coppie predette di punti, cioè quei punti nei quali la retta $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ è intersecata dalle tre coniche $V = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$.

SUL VERO UFFICIO CHE PRESTANO LE APPENDICI DEL CUORE DENOMINATE ORECCHIETTE, E SULLA PERFEZIONE DELL'ORGANO ASPIRANTE E PREMENTE, PRODOTTA DALLE STESSE APPENDICI.

MEMORIA

DELL'INGEGNERE FILIPPO GUIDI

Non è davvero mestieri spender parole, per dimostrare che dallo Studio del creato, s'apprenda la via per la soluzione dei problemi, in ogni arte, ed in ogni scienza. È piuttosto da meravigliarsi, che l'ingegnere abbia tanto tardato a riconoscere il vantaggio della forma tubulare nelle travi, mentre ne avea l'esempio nelle ossa degli uccelli: che il costruttore navale non abbia riconosciuto, che tardi, nelle forme dei pesci le curve di minima resistenza: che insomma l'uomo abbia speso lunga serie d'anni ad investigare tante verità, che avrebbe assai prima scoperte, se si fosse posto senz'altro ad osservare accuratamente la struttura degli esseri che lo circondavano.

Ora io voglio chiamare l'attenzione degli scienziati sulla perfezione dell'organo propulsore della circolazione sanguigna, cioè del cuore, considerato dal lato meccanico, come può fare un ingegnere, e sulla vera funzione che esercitano le appendici chiamate orecchiette.

In qualunque trattato, in qualunque pubblicazione, che riguardi la circolazione sanguigna, dai primi scopritori di essa, fino a'giorni nostri, si trova sempre espressa l'opinione, che le orecchiette del cuore spingano il sangue nei ventricoli, e che questi proseguano l'impulso nelle arterie: anche nelle opere didascaliche recentissime la rappresentazione della orecchietta e del ventricolo, in schema, è fatta con due pompe aspiranti e prementi successive ed attigue: ma con le osservazioni che io sono per esporre si vedrà chiaramente, che l'organo veramente conformato a guisa di pompa non è che il ventricolo. Difatti il ventricolo è munito di valvole, per l'aspirazione dal lato delle vene, e per la compressione dall'altro delle arterie: al dilatarsi di esso chiudonsi le valvole sigmoidee, ed apresi la mitrale o la tricuspidale, che lascia entrare il sangue nella sua cavità: ed al contrarsi del ventricolo stesso si richiude la valvola, che servì alla introduzione, ed apronsi le sigmoidee, per dar passaggio al sangue nelle arterie.

L'orecchietta è sprovvista di valvole ai fori comunicanti con le vene, ed alla sua contrazione, il sangue troverebbe sempre più facile adito a retro-

cedere nelle vene, piuttosto che a cacciarsi nel ventricolo, attraverso di una valvola.

Qual è dunque l'ufficio dell'orecchietta? Dessa è una stupenda appendice all'apparato aspirante e premente, posta dal creatore con una semplicità non mai immaginabile da mente umana, per rendere equabile il corso del sangue nelle vene, e per togliere al cuore il sinistro effetto del colpo d'ariete, che inevitabilmente si produrrebbe dalla colonna di liquido, che dalle vene ha suo corso verso il cuore.

Mi sia permesso chiarire con due parole il significato meccanico del colpo d'ariete.

Allorchè la cavità di una pompa si dilata, per assorbire un liquido pesante, questo liquido è posto in moto per tutto il condotto, che comunica con la pompa stessa: all'istante in cui la pompa ha compiuto l'aspirazione, ed invertendosi l'azione, sta per cominciare la pressione, in quell'istante, dico, la colonna di liquido, arrestandosi in tutto il condotto, deve inevitabilmente perdere tutta la velocità acquistata contro le pareti interne della pompa, con un colpo brusco simile ad una martellata: ed ecco ciò che i meccanici chiamarono colpo d'ariete. Questo colpo secco fa timore anche all'ingegnere, sebbene sappia valutarne gli effetti con la formola MV^2: desso è di tale effetto, che se ne trasse partito per elevare l'acqua con la macchina, che appunto si chiama ariete idraulico.

Ora si vede a colpo d'occhio, come similmente avrebbe dovuto accadere nel ventricolo al suo dilatarsi, poichè la colonna di liquido sanguigno, posta in movimento ben veloce nelle vene, avrebbe dato un forte colpo d'ariete all'istante che il ventricolo era per contrarsi; e soltanto la elasticità delle pareti delle vene avrebbe lenito alquanto sì nocevole effetto.

Questo colpo inoltre avrebbe reso molto irregolare l'immissione del sangue nelle arterie, a traverso le valvole sigmoidee, dovendo questa immissione cominciare con un getto vivacissimo, sotto l'influenza del colpo d'ariete, e rendersi poi molto moderata allorchè fosse prodotta dalla sola sistole.

Col sussidio della orecchietta la velocità di deflusso nelle vene, non è aumentata al dilatarsi del ventricolo, non è arrestata al contrarsi di questo: il ventricolo al dilatarsi assorbe il sangue accumulato nella orecchietta, insieme a quello, che normalmente fluisce dalle vene, ed al chiudersi della valvola mitrale o tricuspidale, l'orecchietta nuovamente si dilata, per non arrestare il corso del sangue nelle vene, e per preparare altro volume, che unito al corso normale delle vene stesse, fornisca la massa di liquido occorrente alla successiva dilatazione del ventricolo: ed ecco il perchè la ca-

pacità della orecchietta è metà all' incirca del volume cacciato dal ventricolo ad ogni sistole: e questa sola osservazione basterebbe a persuadere sulla giustezza della nuova analisi del meccanismo del cuore, che sto proponendo, poichè non è davvero conciliabile l'azione di due pompe successive ed attigue, che si muovano di perfetto accordo, ma che siano l'una di capacità doppia dell' altra.

L'orecchietta adunque non spinge il sangue nel ventricolo, ma soltanto ne accompagna il deflusso con la sua contrazione, ed al suo dilatarsi non lo assorbe, ma semplicemente fa luogo e spazio al sangue defluente dalle vene, perchè trovisi pronto alla chiamata, che ne sta per fare il ventricolo, nella successiva diastole.

Il cuore adunque è più perfetto, ed è più semplice, di quel che si credette sino ad ora: più perfetto, perchè anche due pompe aspiranti e prementi attigue non avrebbero mai prodotto un corso equabilissimo del sangue nelle vene: più semplice, perchè un solo organo aspirante e premente, munito di valvole, rende un ufficio il più completo mediante soltanto una appendice, che accumula il liquido da aspirarsi.

La giusta conoscenza dell' ufficio dell'orecchietta sembrami possa giovare non soltanto a soddisfazione del fisiologo, ma bensì a chiarire di molto le osservazioni sul cuore anormale, e forse anche a dar lume sullo stato dell' intiero organismo.

Suppongasi difetto in una delle orecchiette sia per capacità, sia per insufficiente dilatazione causata da induramento delle pareti o da affievolimento nelle azioni muscolari; ed ecco l'effetto di colpo d'ariete, ecco una palpitazione, e finalmente un romore d' attrito nelle valvole sigmoidee, che si potrebbe attribuire a vizio di tali valvole, mentre esse non hanno alcunchè di anormale.

Una affezione nervosa può alterare le contrazioni dei ventricoli: una flogosi può aumentare l' irritabilità dei stessi ventricoli: e parimenti una turgidità di vene altererà le funzioni delle orecchiette: insomma ben diverse cause daranno luogo ad anormali pulsazioni del cuore; ma i fenomeni di ascoltazione saranno ben distinti.

Gli esperti ascoltatori conoscono già la varietà di tali fenomeni; ma nello studio di essi, e nella investigazione delle cause, potrà certamente giovare una più perfetta conoscenza delle azioni reciproche fra una parte e l'altra dell' organo propulsore, e delle diverse reazioni che per legge idraulica debbonsi verificare nel medesimo, sì nello stato normale, che nelle varie alterazioni morbose.

Nel chiudere questo breve ragionamento sopra un portento di creazione, ove non so se più debbasi ammirare la semplicità ovvero la perfetta previdenza degli effetti che dovevansi avverare per legge idraulica, mi sia permesso fare una interrogazione ai materialisti.

Ogni cosa, che di stupendo si offre a nostri sensi, o provvisti di telescopio per gli astri immensi, ovvero di microscopio per le cristallizzazioni le flore, le faune, tutto è soggetto a leggi mirabili, leggi non speciali di un determinato ordine fisico, ma coordinate a verità matematiche, al vero astratto: e tutto ciò si vuole dal nulla sortito!

La mente umana, che poté discuoprire codeste leggi mirabili, potè contemplare i veri astratti, e dal loro legame costituirne una scienza, dessa mente ancora fu parto del caso!

Una materia, inerte, cieca, seppe da se perfezionarsi con l'andare dei secoli!!

Oh si prova troppa ripugnanza ad ammettere tali assurdi: eppure ne siano concessi: ma quale spiegazione si avrà delle sublimi previgenze nell'ordine di natura?

Come già accennava dianzi, una classe degli esseri viventi è dotata di speciale secrezione, che fornisce loro la materia cornea, sicchè vestansi di penne, e possano librarsi sulle ali: ora se tutto ebbe vita dal caso, chi previde che codesti animali avrebbero dovuto sorreggersi natanti con grave sforzo muscolare nelle membra anteriori, e perciò dotolli di scheletro speciale, e per accoppiare la massima leggerezza alla necessaria resistenza, predispose la struttura delle ossa diversa da quella stabilita per gli altri animali?

Questo esempio è volgare: ma i tanti altri di meravigliosa provvidenza pel nutrimento dei vari esseri nei loro primi momenti di vita, a cominciare dalla fecola preparata per l'embrione di un vegetale, e terminando al latte fornito dalla madre nei mammiferi, tutti codesti esempi, che mi permetto chiamare di previgenza di natura, come possono avere una spiegazione senza il *fiat* dell'Ente necessario immutabile?

UNA NUOVA VARIETA' DI *MELOSIRA BORRERII* GREV.

NOTA

DEL CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE

Un breve tragitto di poche ore oggi da Ancona ci conduce in Dalmazia, paese attiguo alla nostra Italia, le di cui città ad ogni piè sospinto ci attestano le glorie della vecchia Regina della laguna, e la religiosa pietà dei vittoriosi condottieri della Repubblica Veneta. È un viaggio così breve; e pure difficilmente si potrebbe incontrare regione più interessante e che più si raccomandi alla studiosa curiosità del viaggiatore, se non che dilungandosi ad enormi distanze. Varietà di razze e di costumi, alcuno dei quali arieggia l'Oriente, e che vi riportano ai tempi andati, pregio di memorie artistiche, avanzi grandiosi di monumenti Romani e di epoche ancor più lontane, tutto trovasi riunito nella stretta lingua di terra, la quale limitata da un lato dal mare Adriatico e dall'altra dal giogo di montagne che la separano dalla Croazia, formò l'antico Illirio, ed ora porta il nome di Dalmazia. Ma quelle località sopra tutto si raccomandano al naturalista, e in particolare modo a quegli che assunse ad argomento dei suoi studi la vita del mare. La natura rocciosa della costiera Dalmata, la profondità e perfetta limpidezza di quelle acque, le anfrattuosità e i tranquilli recessi e i piccoli sensi difesi da ogni vento, fa che in quei paraggi la interessantissima vita vegetale e animale del mare Adriatico si mostri nel suo maggiore rigoglio.

Il desiderio di rendermi conto della vita delle diatomee, tentando sorprenderne la manifestazione nei suoi diversi fenomeni, mi condusse più volte colà, ad onta che allora la mancanza di regolare comunicazione diretta fra l'Italia e la Dalmazia mi obligasse a fare ben più lungo giro per Trieste con non lieve jattura di tempo e di denaro. L'ultima mia gita colà fu nel Settembre del 1874; e allora scelsi a precipua stazione di studio l'amenissimo Canale di Traù, favorito di cordialissima ospitalità dai padri dell'Ordine di San Domenico nel loro piccolo Convento di S. Croce all'isola Bua. Questa lunga isola rocciosa descrive approssimativamente la corda di un curvo seno di mare, la di cui sponda coronata da un seguito di sette ridenti castella che si succedono e si toccano danno il nome allo stretto canale, ricordato con orgoglio dai Dalmati con il nome appunto di Canale delle Sette Castella. E veramente la vista non può essere più ridente per la

limpidezza delle tranquille acque che qual terso specchio ripetono rovesciata l' immagine di graziosi paeselli incorniciati da pingui colti e da ubertose campagne, alle quali fanno fondo e contrasto gli erti gioghi delle vicine montagne. Colà passai giorni felici, occupato unicamente nella contemplazione delle maraviglie della Natura, assoggettando al microscopio nel giorno ogni ciuffo di alghe ed ogni altro materiale da me raccolto nella mattina nel mare, spiandone diligentemente le Diatomee, che vi si annidavano. Nel mio giornale di studio sono registrate diverse osservazioni interessanti la biologia di quelli curiosissimi esseri, e alcune di quelle verranno riconosciute interamente nuove allora che ne farò argomento di speciale lavoro. Nelle ore del pomeriggio andavo a diporto in barchetta condotta da robusto rematore, e mi piacevo nell'ammirare la perfetta limpidità delle acque azzurrine di quello stretto, la quale mi lasciava distinguere tutte le accidentalità del fondo petroso, su le quali attraeva il mio sguardo il guizzare di pesci di forme e colori diversi, e la vegetazione delle alghe e gli echini e le spugne abbarbicate al letto marino.

Verso l'estremità occidentale di quel canale mi venne indicato lo sgorgare di una ricchissima polla di acqua , la quale sorgendo al piede del vicino monte subito confonde le sue acque con quelle del mare. L' industria dei paesani ne ha tratto profitto applicandone la forza a dar moto a molini. Un giorno colà feci indirizzare la barchetta voglioso di visitare quella scaturigine. Giunto in prossimità del luogo vidi che il littorale assumeva l'aspetto di una laguna per modo che non sapevasi indicare il limite fra quella ed il mare. Fra l'uno e l'altro spingevansi da terra due palafitte, le quali segnavano il letto della corrente. Questa allora che io avanzai con la barchetta era oltremodo impetuosa, così che gli sforzi del battelliere che con tutta la lena appoggiava su i due remi, a gran stento otteneva di avanzare di brevissima misura, fin al punto che io veduto quanto dovesse costare a quel pover uomo la soddisfazione della mia curiosità gli ordinai il retrocedere. Però non tralasciai di assaggiare l'acqua della rapida corrente, quale io attendevo ritrovare dolce o tutt'al più salmastra, mentre invece parvemi prettamente salsa. Ad ogni istante vedevo travolti dalla corrente dei gruppi di Conferve presentanti qual più qual meno una tinta verde olivastra o tirante su l'ocraceo, indizio certo dell'acervamento di miriadi di Diatomee. Ne arrestai al passaggio diverse masse, curando di tenerle disgiunte affine di istituire particolare esame su ciascuna massa. Alcune non presentarono altro che degli Achnantes di diverse specie e delle Synedre, altra racchiudeva in abbondanza delle Rhoicosphenia, dei Rhabdonema, ed altre Diatomee. Maggiore

interesse mi suscitò un altro gruppo di Confervacee, il quale mostravasi infarcito da straordinario accumulamento di una bellissima e grande Melosirea.

La bellezza e la non comune eleganza di questa Diatomea, che nel suo genere distinguesi per la dimensione superiore alla massima parte delle specie congeneri, e la non troppo grande difficoltà a riconoscere e distinguere le particolarità strutturali delle quali va ornata, la raccomandava più specialmente alla mia attenzione. Si aggiunge la circostanza di avere fortunatamente posto la mano sopra una raccolta straordinariamente ricca e quasi pura, la quale mi avrebbe offerto l'opportunità di studiarla convenientemente, e in pari tempo mi permetteva farne partecipi i micrografi e crittogamisti italiani e stranieri, ai quali potesse interessare.

Questa Melosira presentasi in filamenti o serie formati da frustuli o individui binatamente congiunti, quantunque non sia del tutto raro l' incontrarli riuniti a tre frustuli. Mi è sembrato però che la riunione di tre frustuli o individui abbia luogo unicamente allorchè per la presenza del cingolo o zona, che riunisce le due valve del frustulo ebbe luogo la deduplicazione o fissiparità con la formazione di due giovani valve prospettanti ciascuna una delle valve della cellula madre. E di ciò mi fornì prova il ritrovare taluni filamenti dove le due valve tenevansi largamente disgiunte sotto la protezione del cingolo, mentre talvolta fra le due vecchie valve distinguesi appena il profilo leggermente indicato delle due valve giovani, le quali aderenti l'una all'altra per il dorso in seguito divideranno si, costituendo due frustuli, ciascuno risultante da una valva vecchia e da una di recente formazione.

La forma dei frustuli è subcilindrica con i due fondi largamente convessi per modo che la superficie di congiungimento fra i due frustuli è circa un terzo della base del cilindro. L'asse polare delle cellule è alquanto maggiore dell'asse equatoriale nei frustuli di maggior dimensione, mentre nei più piccoli senza alcuna eccezione avviene il contrario. Tale circostanza parmi dovere indicare che i frustuli più piccoli sono altresì i più giovani, i quali in seguito andranno crescendo specialmente nel perimetro, fin a raggiungere gradatamente le proporzioni tipiche dei due assi. Sò che in tale modo di vedere io mi discosto dalla opinione, la quale fin ad ora forse è la più generale, ed è sostenuta da sommi Naturalisti, che io altamente onoro. Questi credono che la cellula diatomacea appena formata non sia più capace di ulteriore ingrandimento, mentre ogni ulteriore modificazione sarebbe impedita dalla rigidità della silice, la quale ne costituisce la parete. Però io non posso persuadermi che un organismo autonomo e perfetto non abbia da pre-

sentare nella sua forma delle qualità, e (se non delle dimensioni) almeno delle proporzioni fisse, che ne determinino la fisonomia. Che poi la silice possa non impedire l'ulteriore aumento della cellula e la distenzione delle sue parti è una tesi che in altre volte ho difeso con addurre molte prove di fatto, non che qualche autorità. Oltre di che si potrebbe ancora dire che noi non possiamo conoscere la condizione nella quale trovasi la silice organizzata nella parete della Diatomea vivente, mentre sappiamo che talvolta la silice può trovarsi alla condizione gelatinosa. Si aggiunge di più la riflessione che la materia silicea va impregnando la cellulosa della Diatomea sotto l'influenza della forza vitale per modo forse da sostituire in quella combinazione uno dei tre costituenti della cellulosa il carbonio. E tale modo di vedere viene confermato dagli studi dei due distinti Chimici i Sigg. Friedel e Landenburg, i quali da più anni già dimostrarono la possibilità di tale sostituzione. Quindi è che io ritengo per fermo che quei filamenti o serie di frustuli della nostra Melosira, nei quali le cellule non presentano minore il diametro polare dell'equatoriale, voglionsi considerare per individui giovani destinati a raggiungere gradatamente le proporzioni nei due assi, che riscontransi invariabilmente nei frustuli maggiori ed adulti.

Tanto le valve che i cingoli o zone connettenti nella forma sottoposta ad esame presentansi finamente granulate, e le file di granuli vedonsi disposte in serie quadrata e possono scorgersi con moderato ingrandimento, specialmente sotto l'influenza della illuminazione a raggi obliqui. Tutti questi caratteri sin ad ora ricordati combinano esattamente con quelli che per la *Melosira Borrerii*, Grev. vengono riportati da Smith nella Sinopsi delle Diatomee Britanniche. Questa specie da Pritchard e da Rabenhorst viene riferita come sinonimo della *M. moniliformis* (Müll.) Ag. nel mentre che il succitato Smith viceversa riguarda quest'ultima come sinonimo della *M. Borrerii*; onde è che sembra riguardare questa denominazione anteriore all'altra, e quindi la ritenne a preferenza. Io per ora preferisco attenermi alla autorità del celebre autore della succitata Sinopsi, tanto più che a ciò fare vengo confortato dal Ch. Diatomologo Americano Professore Hamilton Smith, il quale nella pubblicazione utilissima delle preparazioni di Diatomee tipiche fra le molte specie di Melosira, sotto il N. 217 ci dà la *M. Borrerii*, non facendo menzione della *M. moniliformis*.

Ma se nell'insieme dei suoi caratteri la nostra Melosira non differisce dalla *M. Borrerii*, pure se ne diparte abbastanza sotto molti altri riguardi. Difatti la Diatomea che prendemmo ad esaminare, è generalmente più grande e le granulazioni sono più evidenti. Però questa differenza può con molta

ragionevolezza essere attribuita alle circostanze favorevoli che influirono sul suo sviluppo, e perciò non può certamente essere riguardata di grave momento. Vi è altra particolarità su la scoltura della superficie valvare, che mi tiene molto esitante. La Melosira del Canale di Traù si distingue al momento dalla *M. Borrerii* per la circostanza di numerosi denticuli e brevi spine, le quali scorgonsi sparse nella superficie valvare e specialmente su i due fondi largamente convessi del frustulo. Di tale circostanza non difficile a rimarcare per quanto è a nostra cognizione nessuno degli osservatori, che ci precedettero, ne fece cenno. Quindi è che ad accertarmi meglio dei genuini caratteri della specie Grevilleana ho avuto ricorso alla maravigliosa preparazione di Diatomee tipiche che nello spazio di tre millimetri in quadrato in numero di ben quattrocento seppe riunire sistematicamente la proverbiale abilità del Sig. Möller di Wedel nel Holstein. In questa preparazione, la quale va distinta con il nome tedesco di Tipen-Platte, sotto il nome di *M. Borrerii*. Grev. ci viene presentato un breve filamento di frustuli cilindroidi a fondo largamente convesso, e protetti da cingolo cilindrico. Le pareti dei frustuli vedonsi finalmente granulati, e i cingoli sono pure distinti da circoli di granuli. Ma nel confronto della Diatomea tipica con la forma Dalmata, quest'ultima oltre all'essere generalmente maggiore e con cingoli quasi interamente granulati, mostrano la superficie convessa dei fondi dei frustuli regolarmente e a brevi intervalli cospersa di denticuli, i quali gli danno un aspetto spinoso. È vero che il Ch. Rabenhorst nel definire la *M. moniliformis* (Müller) Ag. della quale dice sinonimo la *M. Borrerii*, Grev. adopera la espressione « valvis depresso-hemisphericis subnodulosopunctatis » ma non credo che con tali espressioni abbia voluto alludere all'apparenza nodulosa e scabra che alla forma presa ad esame danno le denticulazioni delle quali è seminata; mentre poi il tipo più attendibile del Tipen-Platte di Müller non ci mostra nella *M. Borrerii* se non che una superficie semplicemente granulata.

Riconosciuta pertanto una ben marcata differenza nelle particolarità strutturali, che adornano la superficie della Diatomea, che abbiamo sott'occhio in confronto con la *M. Borrerii*, quale viene definita da Smith e quale ce la presenta la preparazione Mölleriana, dovremo noi riguardarla come costituente una nuova specie? È indubitato che la forma Dalmata costituisce un ben determinato organismo autonomo degno di essere designato con un nome speciale, mentre il non riscontrarsi mai alcun frustulo mescolato, il quale sia sprovisto di quelle denticolazioni, ci persuadono, che quelle non voglionsi attribuire ad accidentalità come se dovuta a sovrabbon-

danza di materiale siliceo, ma si dimostra quale attributo dipendente dalla idiosincrasia e natura dell'organismo. Così su una tale ben marcata e costante differenza potrei a buon diritto costituire una specie nuova, mentre mi sarebbe agevole cosa il portare avanti più esempi di specie stabilite da distinti Micrografi, che mi precedettero nello studio delle Diatomee, le quali specie precisamente vennero stabilite su l'esistenza di simili denticolazioni, o anche su differenze di minore importanza. Però l'accordo perfetto il quale riscontrasi nella forma dei frustuli e della superficie di congiunzione, nell'apparenza granulata delle valve e del cingolo, e nella disposizione binaria e più raramente ternaria delle cellule individuali sembra persuadere come più consentaneo a ragione che la Diatomea sottoposta ad esame debba essere riguardata come appartenente alla medesima specie della *M. Borrerii*. Ma a distinguerla della specie Grevilleana, come quella che ne differisce realmente per la costante presenza dei denticuli su la superficie valvare dei quali mostrasi irta specialmente nella parte convessa, ritengo che ciascuno reputerà conveniente il designarla quale varietà della succitata specie. Quindi la Diatomea da me pescata nel Canale di Traù in ricchissima raccolta deve essere nominata *Melosira Borrerii*, Grev. *hispida*, nova varietas. Aggiungerò ancora che avendo ritratto con la fotomicrografia alcun frustulo di questa nuova forma, nella projezione dell' immagine ho potuto contare le file di punti che in serie quadrate ne ricoprono la superficie. Così il numero delle file o ranghi di punti li ho contati 1200 al millimetro, mentre i denticuli vedonsi sparsi regolarmente alla distanza di alcune file di punti.

Terminerò questa mia breve nota con ricordare di avere io di nuovo incontrato questa stessa varietà della *M. Borrerii* sul litorale di Fano nella scorsa estate; non ne rinvenni se non che pochi filamenti, nei quali però mi era dato constatare con ogni certezza la presenza costante della denticulazione su la superficie convessa degli individui concatenati. Così siamo fatti certi che questa forma vive nelle acque salse dell'Adriatico; e che perciò la raccolta che io feci a traverso la corrente delle copiosissime sorgenti, le quali incanalate si scaricano nello stretto di Traù non erano avventizie, ma proprie del luogo e cresciute nell'acqua marina sotto l' influenza dell'afflusso delle acque dolci, il quale afflusso al presente conosciamo giovare grandemente al rigoglio delle Diatomee.

EQUAZIONE DELLA LINEA GEODESICA CON QUALCHE APPLICAZIONE

NOTA

DI MATTIA AZZARELLI

1. La linea la più breve che congiunge due punti di una data superficie è chiamata *linea geodesica*.

2. La determinazione delle equazioni della goedesica tracciata sopra una superficie qualunque suole farsi dipendere dalla teorica delle variazioni; peraltro mi sembra che tali equazioni si possano stabilire partendo dalla semplice cognizione della condizione dei massimi e minimi ordinari, ragionando ed operando come segue:

3. Sia la superficie

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

ed a partire in questa da un punto A fino ad un altro punto B sia

$$AB = s$$

l'arco della linea compreso tra questi punti. Ora fra tali punti si possono intendere condotte quante linee si vogliano, le quali si trovino sulla superficie medesima, tra queste ci proponiamo assegnare quella della minima lunghezza.

4. Per l'elemento di qualsivoglia curva abbiamo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

che porremo sotto la seguente forma

$$ds^2 = ds^2 \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right],$$

e fatto, per comodo,

$$\frac{dx}{ds} = x', \ \frac{dy}{ds} = y', \ \frac{dz}{ds} = z'$$

avremo

$$ds = ds\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

e quindi

$$s = \int ds\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + C.$$

Ora quest' arco deve essere della minima lunghezza; a tal fine, designando per ω una quantità infinitesima ed arbitraria si diano ad x', y', z', gl' incrementi

$$\omega\, dx',\ \omega\, dy',\ \omega\, dz'$$

e così avremo, per l'arco s minimo,

$$\int \left[(x' + \omega\, dx)^2 + (y' + \omega dy')^2 + (z' + \omega\, dz')^2\right]^{\frac{1}{2}} ds - \int (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} ds > 0$$

ovvero sviluppando i quadrati e quindi in serie sarà

$$\int \left[\frac{2\,\omega\, x'\, dx' + 2\,\omega\, y'\, dy' + 2\,\omega\, z'\, dz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} + \omega^2 H\right] ds > 0$$

nella quale H rappresenta il complesso dei termini che sieguono. Essendo ω infinitesimo è chiaro che il segno della serie è quello che compete al primo termine: ma questo contenendo ω alla prima potenza muta segno con questa quantità: dunque affinchè il risultato sia costantemente positivo è necessario che abbiasi

$$2\,\omega \left(\frac{x'\, dx' + y'\, dy' + z'\, dz'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right) ds = 0,\ \int \omega^2 H\, ds > 0$$

Ora ω, ds non possono essere nulli, dunque dobbiamo avere

$$x'\, dx' + y'\, dy' + z'\, dz' = 0;$$

nella quale sostituiti i respettivi valori per x', y', z', risulta

$$\frac{dx}{ds}\, d.\, \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d.\, \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d.\, \frac{dz}{ds} = 0$$

ovvero moltiplicando per ds,

$$dx\ d.\ \frac{dx}{ds} + dy\ d.\ \frac{dy}{ds} + dz\ d.\ \frac{dz}{ds} = 0 \qquad (2)$$

Dalla (1) differenziando deduciamo

$$dx\ \frac{df}{dx} + dy\ \frac{df}{dy} + dz\ \frac{df}{dz} = 0 \qquad (3)$$

Se tra queste due equazioni eliminiamo dz otterremo

$$\left[\frac{df}{dz}\ d.\ \frac{dx}{ds} - \frac{df}{dx}\ d.\ \frac{dz}{ds}\right] dx + \left[\frac{df}{dz}\ d.\ \frac{dy}{ds} - \frac{df}{dy}\ d.\ \frac{dz}{ds}\right] dy = 0$$

ed essendo x, y indipendenti, questa equazione deve verificarsi per identità, onde le due seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df}{dz}\ d.\ \frac{dx}{ds} - \frac{df}{dx}\ d.\ \frac{dz}{ds} = 0 \\ &\frac{df}{dz}\ d.\ \frac{dy}{ds} - \frac{df}{dy}\ d.\ \frac{dz}{ds} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Queste equazioni avendo luogo pel caso nel quale l'arco s della linea tracciata sulla superficie (1) tra due dati punti, è un minimo, dunque le x, y, z non valgono che per quei punti i quali compongono essa linea, e perciò queste equazioni sono quelle che rappresentano la geodesica.

Lorquando è data la superficie particolare si conoscono le derivate

$$\frac{df}{dx},\quad \frac{df}{dy},\quad \frac{df}{dz}$$

in funzione determinata delle coordinate, onde sostituite nelle (4) tali funzioni per mezzo della integrazione otterremo la linea della minima distanza fra due punti, o la linea geodesica.

5. Dalle equazioni (4) si ricava facilmente che il piano osculatore della geodesica, e la normale alla superficie sulla quale è tracciata la geodesica si confondono.

Di fatti dalle (4) abbiamo

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{\frac{df}{dx}} = \frac{d.\frac{dy}{ds}}{\frac{df}{dy}} = \frac{d.\frac{dz}{ds}}{\frac{df}{dz}} = \frac{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \frac{M}{N},$$

ove M, N rappresentano i valori dei radicali; da queste ne seguono

$$\frac{df}{dx} = \frac{N}{M}\, d.\frac{dx}{ds};\ \frac{df}{dy} = \frac{N}{M}\, d.\frac{dy}{ds};\ \frac{df}{dz} = \frac{N}{M}\, d.\frac{dz}{ds}. \qquad (5).$$

Ora rappresentando per λ, μ, ν gli angoli che la normale alla superficie (1) nel punto di coordinate x, y, z forma coi tre assi abbiamo, come è noto,

$$\cos\lambda = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} \qquad (6)$$

$$\cos\nu = \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}$$

e sostituendo in queste i valori delle derivate datici dalle (5) otteniamo

$$\cos\lambda = \frac{d.\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{\left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2}} \qquad (7)$$

$$\cos\nu = \frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{\left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2}};$$

ma i secondi membri delle (7) rappresentano i coseni degli angoli fatti coi tre assi coordinati dalla normale ad una curva, cioè dalla retta che è intersecazione nel punto x, y, z del piano osculatore col piano normale; dunque il piano osculatore della geodesica è normale alla superficie.

6. Se l'equazione della superficie è di forma esplicita

$$z - f(x, y) = 0$$

essendo allora

$$\mathrm{d}z - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 0$$

porremo, come suole farsi comunemente

$$p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}; \quad q = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$$

ed allora le (4) si mutano in

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + p\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0 \\ &\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + q\,\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

7. Quando venga data qualche famiglia particolare di superficie può dimostrarsi qualche proprietà che convenga a qualunque geodesica tracciata sopra di queste superficie.

Consideriamo pertanto la famiglia delle superficie cilindriche rappresentate dalla equazione a differenze parziali

$$ap + bq = 1$$

ove

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

ed a, b sono le tangenti trigonometriche degli angoli che le projezioni della retta generatrice sopra i piani coordinati zx, zy formano coll'asse z.

Si dicano α, β, γ gli angoli che la retta generatrice, parallela ad un piano dirigente, forma coi tre assi coordinati, avremo

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}; \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

e perciò l'equazione delle superficie cilindriche si muta in

$$p \cos\alpha + q \cos\beta = \cos\gamma : \qquad (9)$$

sostituendo in questa i valori di p, q dedotti dalle (8) otteniamo

$$\cos\alpha . \, d. \frac{dx}{ds} + \cos\beta \, d. \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \, d. \frac{dz}{ds} = 0 \qquad (10)$$

la quale ci fa conoscere che:

La normale principale della geodesica è in ogni punto perpendicolare alla generatrice la superficie cilindrica.

8. Supponiamo che la geodesica venga considerata come una evoluta, vediamo di riconoscere su di quale superficie si debba trovare la sua evolvente.

A questo fine sieno

$$x, y, z$$

le coordinate di un punto della geodesica, ed

$$x_1, y_1, z_1$$

quelle del punto corrispondente nella evolvente.

È noto che la normale alla evolvente è tangente alla evoluta, e nel caso attuale alla geodesica: dunque si rappresentino con

$$\lambda, \mu, \nu$$

gli angoli che tangente la geodesica forma coi tre assi, avremo evidentemente

$$\frac{x - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y - y_1}{\cos\mu} = \frac{z - z_1}{\cos\nu}$$

Ora rappresentando per s l'arco della geodesica compreso tra un punto fisso e l'altro di coordinate x, y, z, e per c una costante avremo ancora

$$\frac{x - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y - y_1}{\cos\mu} = \frac{z - z_1}{\cos\nu} = s + c \qquad (11)$$

Ma abbiamo ancora

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\mu = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\nu = \frac{dz}{ds}$$

dunque dalle (11) deduciamo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - (s + c)\,\frac{dx}{ds} \\ y_1 &= y - (s + c)\,\frac{dy}{ds} \\ z_1 &= z - (s + c)\,\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

le quali differenziate danno facilmente le seguenti

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= -(s + c)\ \mathrm{d.}\ \frac{dx}{ds} \\ dy_1 &= -(s + c)\ \mathrm{d.}\ \frac{dy}{ds} \\ dz_1 &= -(s + c)\ \mathrm{d.}\ \frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ora moltiplicando queste tre equazioni ordinatamente per

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma$$

e sommando otterremo

$$dx_1 \cos\alpha + dy_1 \cos\beta + dz_1 \cos\lambda = -(s + c)\left[\cos\alpha.\ \mathrm{d.}\ \frac{dx}{ds} + \cos\beta, \mathrm{d.}\frac{dy}{ds} + \cos\lambda\ \mathrm{d.}\ \frac{dz}{ds}\right]$$

che per la (10) si riduce a

$$dx_1 \cos\alpha + dy_1 \cos\beta + dz_1 \cos\gamma = 0$$

onde

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = C$$

che rappresenta un piano perpendicolare alla retta generatrice del cilindro.

Di qui risulta che la evolvente di una linea geodesica tracciata sopra una superficie cilindrica è una linea piana situata in un piano perpendicolare al piano dirigente la linea generatrice esso cilindro.

Se determiniamo la costante nella condizione di

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

troveremo

$$C = 0$$

onde il pian passerà per l'origine delle coordinate sarà

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = 0.$$

Se ora diciamo ρ la distanza che corre tra i due punti corrispondenti x, y, z dell'elica, ed x_1, y_1, z_1, del piano, avremo

$$\delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z - z_1)^2$$

ove sostituiti i valori che per queste differenze ci sono date dalle (12) troveremo

$$\delta^2 = (s + c)^2 \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right]:$$

ma essendo

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ne siegue

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1:$$

dunque

$$\delta = s + c$$

9. Gli angoli che la generatrice il cilindro forma coi tre assi hanno per coseni

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma;$$

e l'elemento ds della geodesica che passa pel punto x, y, z forma coi medesimi assi gli angoli i suoi coseni sono rispettivamente

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds},$$

dunque designato per φ l'angolo che l'elemento della geodesica forma colla retta generatrice abbiamo:

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma$$

ma integrata la (10) risulta

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = k \qquad (14)$$

essendo k una costante: dunque

$$\cos\varphi = k \qquad (14)$$

e perciò la geodesica tracciata sul cilindro incontra tutte le generatrici sotto il medesimo angolo. Di qui risulta che l'elica cilindrica è una linea geodesica.

10. Pel punto

$$x,\ y,\ z$$

della geodesica immaginiamo una generatrice del cilindrico, e nel tempo stesso un piano perpendicolare ad essa generatrice, e quindi dall'origine delle coordinate si cali su di questo piano una perpendicolare, questa è necessariamente parallela alla generatrice, onde forma cogli assi coordinati gli angoli α, β, γ e perciò l'equazione del piano è

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l, \qquad (16)$$

ove l rappresenta la lunghezza di essa perpendicolare.

Differenziando la (16) e dividendo per ds è

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = \frac{dl}{ds}$$

e così per la (14)

$$\frac{dl}{ds} = k$$

della quale

$$dl = k\,ds \text{ ed integrata } l = ks + c \qquad (17)$$

e determinata la costante in modo che per $l = l_1$, sia $s = o$, troveremo

$$l = l_1, + ks\,.$$

Dunque la geodesica tracciata sopra un cilindro è rettificabile.

11. Se qui poniamo che il cilindro sia retto, il piano nel quale giace la evolvente della geodesica, è quello coordinato delle xy, essendo per questo caso l'equazione della superficie delle forma

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = o$$

ne dedurremo

$$f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ f'_z = o\,.$$

Ora dalle (13) abbiamo

$$\frac{dy_1}{dx_1} = d.\frac{dy}{dx} : d.\frac{dx}{ds} = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dx}$$

$$\frac{dz_1}{dx_1} = d.\frac{dz}{ds} : d.\frac{dx}{ds} = \frac{df}{dz} : \frac{df}{dx}$$

e quindi

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dz_1}{dx_1} = o\,.$$

Ma dalla equazione della superficie abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ e quindi } \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dx}{dy} \qquad (18)$$

Dunque la tangente al circolo base del cilindro è normale nel punto corrispondente alla evolvente.

12. Prenderemo ora a considerare una famiglia di superficie che derivino dalla ruotazione di una linea intorno l'asse della z, e l' equazione di essa espressa da derivate parziali è

$$qx = py. \qquad (19)$$

Si sostituiscano in questa i valori di p, q dati dalle (8), e risulterà

$$x\,\mathrm{d}.\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - y\,\mathrm{d}.\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = o$$

ed essendo

$$\int x\,\mathrm{d}.\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \int \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

$$\int y\,\mathrm{d}.\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \int \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

otterremo per l'equazione della geodesica sopra una superficie di rotazione la seguente

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}s \qquad (20)$$

nella quale c rappresenta la costante della integrazione.

Il primo membro può ridursi ad una espressione monomia, ponendo

$$x = r\cos\varphi\,,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

perchè essendo allora

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}r\cos\varphi - r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,;\quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}r\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\,\mathrm{d}\varphi\cos\varphi$$

troveremo

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\varphi$$

onde la (20) diverrà

$$r^2\,\mathrm{d}\varphi = c\,\mathrm{d}s\,, \qquad (21)$$

e qui è necessario avvertire che nel ds si contiene dz. Quest'ultimo risultato ci prova che l'area descritta dalla projezione del raggio sul piano xy cresce proporzionalmente all' arco ds della linea geodesica.

13. Per farne una applicazione si supponga che la superficie data sia un paraboloide di rotazione intorno l'asse delle z, onde la sua equazione sia

$$x^2 + y^2 = pz \qquad (22)$$

ovvero

$$r^2 = pz$$

servendoci della stessa sostituzione.

Essendo ora

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

si esprimano dx, dy, dz in funzione delle nuove variabili r, φ e troveremo

$$ds^2 = \left(\frac{p^2 + r^2}{p^2}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \qquad (23)$$

la quale deve coesistere con

$$r^2\, d\varphi = c\, ds :$$

se in queste elimineremo $d\varphi$ troveremo una relazione tra s ed r, e quando venga eliminata ds ne sorgerà una relazione tra r e φ;

14. Pel primo caso, onde valutare l'arco della geodesica, porremo

$$r^2\, d\varphi^2 = \frac{c^2\, ds^2}{r^2}$$

ed avremo per la (23)

$$ds^2 - \frac{c^2\, dr^2}{r^2} = \left(\frac{p^2 + r^2}{p^2}\right) dr^2$$

dalla quale

$$p ds = r dr \sqrt{\frac{p^2 + r^2}{r^2 - c^2}}$$

e fatto $r = \sqrt{v}$ sarà più semplicemente

$$p ds = \frac{dv}{2} \sqrt{\frac{v + a}{v - b}}, \qquad (24)$$

ponendo a, b in luogo di p^2, c^2

Integrando sarà

$$ps = \tfrac{1}{2} \int dv \sqrt{\frac{v + a}{v - b}} + C,$$

e ponendo

$$v = \frac{bu^2 + a}{u^2 - 1}$$

si troverà

$$dv = -\frac{2(a+b)\,u\,du}{(u^2-1)^2}$$

e quindi l'espressione razionale

$$ps = (a+b)\int \frac{u^2\,du}{(u^2-1)^2} + C. \qquad (25)$$

Integrando per parti avremo

$$\int \frac{u^2\,du}{(u^2-1)^2} = -\frac{u}{2(u^2-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-1}$$

ma per i noti metodi abbiamo

$$\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$$

onde

$$\int \frac{u^2\,du}{(u^2-1)^2} = -\frac{u}{2(u^2-1)} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$$

e per la (25) avremo

$$ps = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{u}{u^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right] + C$$

ove sostituiti per u, a, b i loro rispettivi valori avremo per l'arco della geodesica dato in r

$$ps = \left(\frac{p^2+c^2}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2+p^2)}}{p^2+c^2} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}\right)\right] + C$$

e posto che ad $r = c$ corrisponda $s = 0$, avremo

$$s = \frac{p^2+c^2}{2p}\left[\frac{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2+p^2)}}{p^2+c^2} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}\right)\right]. \qquad (26)$$

15. Se venga eliminato ds troveremo facilmente

$$\frac{p\,d\varphi}{c} = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{p^2+r^2}{r^2-c^2}}$$

che può essere posta sotto la seguente forma:

$$\frac{p\,d\varphi}{c} = \frac{dr}{r} \times \frac{p^2+r^2}{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2+p^2)}},$$

la quale si decompone nelle due seguenti:

$$\frac{p\,d\varphi}{c} = \frac{p^2 \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)\left(r^2+p^2\right)}} + \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-c^2)\,(r^2+p^2)}}$$

e quindi

$$\frac{p\,\varphi}{c} = p^2 \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)\left(r^2+p^2\right)}} + \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-c^2)\,(r^2+p^2)}} + C$$

Per la integrazione della prima parte porremo

$$\frac{c}{r} = \cos\theta, \quad \frac{c\,dr}{r^2} = d\theta\,\mathrm{sen}\theta$$

onde

$$\int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)\left(r^2+p^2\right)}} = \int \frac{d\theta\,\cos\theta}{c\sqrt{c^2+p^2-p^2\,\mathrm{sen}^2\theta}}$$

e fatto

$$p\,\mathrm{sen}\theta = u\,\sqrt{c^2+p^2}, \quad d\theta\,\cos\theta = du\,\frac{\sqrt{c^2+p^2}}{p}$$

avremo

$$\frac{d\theta\,\cos\theta}{c\sqrt{c^2+p^2-p^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} = \frac{1}{pc}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{pc}\,\mathrm{Arc.\,sen}\,(=u)$$

e quindi

$$\int \frac{d\theta\,\cos\theta}{c\sqrt{c^2+p^2-p^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} = \frac{1}{pc}\,\mathrm{Arc.\,sen}\left(=\frac{p\,\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{c^2+p^2}}\right). \qquad (28)$$

Per integrare la seconda parte della (27) porremo, come altrove

$$r^2 = v, \quad a = p^2, \quad b = c^2$$

e così sarà

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-c^2)\,(r^2+p^2)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dv}{\sqrt{(v-b)\,(v+a)}}$$

ove fatto

$$v = \frac{au^2+b}{1-u^2}, \text{ onde } dv = \frac{2\,(a+b)\,u\,du}{(1-u^2)^2}, \text{ e } \sqrt{(v+a)\,(v-b)} = \frac{(a+b)\,u}{1-u^2}$$

otteniamo

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-c^2)(r^2+p^2)}} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}\right) \tag{29}$$

Sostituendo ora nella (27) risulta

$$\frac{p\varphi}{c} = \frac{p}{c}\,\text{Arc. sen}\left(=\frac{p\,\text{sen}\theta}{\sqrt{c^2+p^2}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}\right) + C$$

e perchè

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{r}\sqrt{r^2-c^2}$$

avremo in fine

$$\frac{p\varphi}{c} = \frac{p}{c}\,\text{Arc. sen}\left(=\frac{p\sqrt{r^2-c^2}}{r\sqrt{c^2+p^2}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}\right) + C.$$

Per assegnare il valore della costante C supporremo che ad $r=c$ corrisponda $\varphi=0$, e così troveremo $C=0$, onde

$$\varphi = \text{Arc sen}\left(=\frac{p\sqrt{r^2-c^2}}{r\sqrt{c^2+p^2}}\right) + \frac{c}{2p}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+p^2}+\sqrt{r^2-c^2}}{\sqrt{r^2+p^2}-\sqrt{r^2-c^2}}\right) \tag{30}$$

Dunque tanto l'arco della geodesica tracciata sul paraboloide di rivoluzione, quanto l'angolo φ, sono funzioni trascendenti della r e quindi delle variabili indipendenti x, y perchè abbiamo

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Ora essendo

$$\varphi = \text{Arc. cos}\left(=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \text{Arc sen}\left(=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

ne siegue che l'ultima equazione ci rappresenta la projezione della geodesica sul piano y, e perchè al tempo stesso questa equazione ci rappresenta un cilindro coesistente col paraboloide ne siegue che le (22) (30) danno la goedesica.

SULLA SORGENTE DELL'ACQUA *ANTILITIACA* DI ANTICOLI – (CAMPAGNA) DENOMINATA DI *FIUGGI*

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO STATUTI

Tra le molte acque minerali delle quali si giova l'Idroterapia moderna, non è certamente alle altre seconda pel credito che presentemente gode appo noi l'Acqua Anticolana, celebrata fin da secoli indietro (1) per la sua speciale virtù nelle affezioni calcolose delle vie orinarie.

Il Villaggio di Anticoli già antica terra degli Ernici (2) situato prossimamente a 15 chilometri a maestro di Alatri ed a 11 chilometri a settentrione di Anagni si erge sopra una collina che occupa uno degli estremi del gran bacino lacustre noto ai geologi sotto il nome appunto di bacino di Anticoli ed è costruito interamente sopra una roccia calcare ad ippuriti (3). A piedi di questa collina procedendo verso mezzogiorno nell'insenata di una gola (4) formata da due ripide scarpate, ricoperte di fiorente vegetazione boschiva sorge la rinomata acqua minerale conosciuta sotto la denominazione di *Acqua di Fiuggi.*

I diversi scienziati che in differenti epoche hanno tolto ad esame questa sorgente (5) e che più specialmente si sono occupati di designare la pro-

---

(1) È indubitato che le acque di Anticoli ebbero rinomanza per la loro portentosa azione fisiologica fin da tempi assai remoti: ma è inesatto che Plinio abbia tenuto proposito di queste acque, come leggesi nella memoria pubblicata nel 1850 dall'esimio Prof. Chimenti; il quale é a ritenersi cadesse in questo equivoco per non avere interpretrato a dovere una citazione del Coluzzi. Plinio citò bensì come antilitiache talune sorgenti, tra le quali una in Ischia ed altra esistente in Francia; ma a lode del vero non fece menzione alcuna della sorgente Anticolana. Così è egualmente inesatto che l'Averrohis e l'Hollerio ricordati del precitato Chimenti e dallo Zamputi (nella guida dell'acqua di Fiuggi) abbiano parlato dall'acqua suddetta.

(2) Il paese di Anticoli infeudato fin dal secolo XVI ai Principi Colonna, conta presentemente 2000 abitanti e fa parte della Provincia di Roma – Circondario di Frosinone.

(3) Possono osservarsi magnifici esemplari di questi avanzi organici della specie *Hippurites curva Lk.* nel paramento in pietra lavorata dei pilastri che ornano l'ingresso principale dello stesso Anticoli.

(4) L'estremo inferiore di questa gola era fino a pochi anni indietro ricoperto dalle acque di un laghetto artificiale ora prosciugato; nel quale affluivano i sopravanzi dell'acqua del fonte di Fiuggi ed altre sorgentelle più basse che parimenti si credono dotate all'incirca delle stesse proprietà della fonte suddetta, quali piccole sorgenti si disperdono ora nei fossi.

(5) Bibliografia degli autori che hanno trattato dell'acqua di Anticoli;
Bacci Andrea. — Da Thermis.

prietà terapeutiche della medesima per quanto io mi sappia, hanno circoscritto i loro studj tassativamente sul corpo di acqua sgorgante dal boccaglio della fonte suddetta.

Avendo peraltro prese notizie sopra luogo in ordine al modo con cui la detta acqua era stata raccolta ed incondottata, mi fù dato agevolmente venir in cognizione che la medesima proveniva da un regolare manufatto di presa, che mercè la cortesia dell'Onorevole Sindaco di Anticoli Sig. Pietro Falconi, potei a mio bell'agio visitare; e poichè a seguito di questa ispezione ebbi luogo a constatare alcune circostanze di fatto che possono avere un tal quale interesse speciale per ciò che si attiene alla natura di questa sorgente, mi accingo ad estenderne un succinto ragguaglio.

La principale osservazione che in occasione della visita alla ricordata botte di allacciamento mi occorse di fare si fù che questa rinomata acqua non derivava già da *una* polla come da taluno dei scrittori di quest'acqua erasi asserito, ma sibbene risultava dalla riunione o dirò meglio dall'artificiale associazione di quattro distinte vene affatto fra loro separate ed indipendenti; le quali pullulano in un terreno tenace (porcino) che localmente chiamano *tasso*; formando una specie di *fango* al quale gl'indigeni attribuiscono pure una tal quale medica virtù per alcune speciali sofferenze.

Il fondo di questa botte, a livello del quale s'innalzano le sorgenti, si trova attualmente a circa Met. 3. 10 sotto il piano della strada che conduce alla Fonte situata pochi metri a valle del ridetto manufatto. (6)

Petronio Alessandro.
Colutii Francisci Veliterni, medici ac philosophi in almae urbis Gymnasio professori De quaerelis nephriticis ex renum et vescicae calculo.
Gangemi Rev. P. Fr. Francisci. — De mirificis qualitatibus Aquae Anticoli in Campania.
Colajanni Mons. Vescovo.
Dottor Lucarelli.
Dottore De Andreis.
Chimenti Dott. Francesco: Osservazioni pratiche dell'acqua di Anticoli detta di Finggi.
Zamputi Dott. G. Guida all'acqua di Finggi,
Scalzi Dott. Francesco: Memoria sull'acqua di Anticoli e del loro vantaggio contro i calcoli orinarj
Gamberini — Idrologia minerale dello Stato Romano.
Marieni Cav. Dott. Lnigi. — Notizie sulle acque minerali del Regno d'Italia e paesi limitrofi.
Statistica del Regno d'Italia. — Acque minerali.
Dottor Barbieri
Perone: Dizionario universale topografico storico fisico-chimico terapeutico delle acque minerali
Stefani. — Dizionario coreografico dello Stato Pontificio.
Guida alle acque minerali ed ai Bagni d'Italia per L. M.

(6) Vuolsi avvertire che nella volta del manufatto di presa si scorgono tuttora dei residui di antiche condotture murate ad un altezza di circa Met. 0. 80 sul livello attuale delle vene, ciò che indubitatamente dimostra che una volta. se non tutte, talune almeno di queste vene sgorgava ad'un livello superiore a quello presente.

Le quattro suindicate sorgenti conservano fra loro una distanza media di circa Met. 1. 50 e formano quattro distinte pescolle cui intestano altrettante cunette murate in laterizio, le quali poi fanno capo ad un canale collettore, destiuato a convogliare le acque delle quattro vene insieme riunite, al bocglio (7) della fontana *di Fiuggi*.

Constatato pertanto che il getto di questa fonte rappresenta l'aggregazione di quattro distinte sorgive, non essendo nuovo in Geologia il fatto della coesistenza di parecchie vene in un dato luogo, le quali tuttochè sgorganti a poca distanza fra loro ed anche talora sotto un medesimo livello trovansi poi in fatto costituite da principii differenti (8) fu mio pensiero di indagare se nel caso concorressero o no in esse sorgive se non altro gli identici caratteri esteriori. E primieramente in quanto al colore, osservai che le suddette quattro vene sono egualmente limpide ed assolutamente incolore

Non così per ciò che riguarda il sapore, dappoichè nella prima polla, meno ricca delle altre in volume, ebbi luogo a rimarcare un leggerissimo sapore ferruginoso mentre l'ultima presenta uu gusto alquanto acidulo, essendo poi le due intermedie affatto insapore.

Esplorata quindi la temperatura delle dette quattro vene (9) potei stabilire che la prima (entrando a destra nella Botte)

segnava . . . 14° 50 Centig.
la seconda . . 12° 80 »

---

(7) Una buona porzione dell'acqua proveniente dalla quarta vena, a mezzo di una separata condottura unitamente all'acqua reflua della fonte di Fiuggi va ad alimentare direttamente un lavatojo pubblico ed un beveratore per bestiami costruito non ha guari inferiormente alla fontana sud.

(8) A comprova di ciò volendo pur addurre uno fra i tanti esempi che si potrebbero citare, mi limito solamente a ricordare il notissimo stabilimento Idroterapico in Castellamare di Stabia, ove in una ristretta zona di 15 Metri di perimetro scaturiscono a piedi del Monte Aureo non meno di sette sorgenti contenente ciascuna diverse facoltà medicinali. Queste acque sono conosciute sotto il nome di

Media 1. e 2.
Solfurea ferrata,
Solforosa (della Grotticella),
Ferrata del Pozzillo.
Salino Acidula (Spaccatella)
Solforosa (di S. Vincenzo)
Ferrata nuova.

In occasione dei scavi che con molta intelligenza ed alacrità stanno presentemente eseguendosi nelle antiche forme Romane delle acque Salino Solforose dette della Ficoncella in quel di Civita vecchia, presso una polla di acqua termale si è scoperta altra polla di acqua minerale assolutamente fresca.

(9) Il rilievo della temperatura delle sorgenti venne eseguito alla ore 8 am. del giorno 13 Settembre 1877.

la terza . . . 13° 00 »
(10) la quarta . . . 13° 10 »

La temperatura poi dell'acqua al boccaglio della fontana risultò di 12° 80 (11), lo che comprova che l'acqua di Fiuggi nella scala termometrica delle acque minerali va considerata nella categoria delle sorgenti *fresche e non fredde* (12).

Debole in genere è l'effervescenza notata in ciascuna delle polle; effervescenza dovuta senza meno alla presenza dell'acido carbonico libero, come ne fà fede l'analisi eseguitane come dirò in appresso; tuttavia a parità di volume di acqua ebbi luogo a rimarcare che il quantitativo delle bollicine gazzose nella prima e nell'ultima, ma segnatamente nella prima, era assai maggiore che nelle altre intermedie.

Finalmente in quanto ai sedimenti; niuna traccia di materie depositate apparisce nè entro i bacini delle sorgenti, nè tampoco entro la tazza o sulle pareti della fontana.

Riassumendo pertanto i suindicati elementi e senza entrare nel campo delle discussioni teoriche intorno alle cause dalle quali può ripetersi la maggior freschezza o caldezza delle acque, posta la differenza di temperatura che esiste nelle dette quattro polle, la diversità di sapore e il diverso grado di effervescenza che taluna di esse presenta, sembrami possa a buon diritto concludersene che le anzidette sorgenti anche nella chimica loro composizione devono probabilmente tra loro differire. E quindi a complemento dei studi analitici (dei quali più sotto terrò proposito fatti dall'esimio Prof. Ratti (13)

(10) Pretendesi dagli Anticolani che la temperatura della sorgente di Fiuggi cresca nell'inverno e diminuisca invece nell'estate! In difetto di osservazioni precise non intendo per mia parte appoggiare questo fatto che sarebbe interessante di ben verificare: qnantunque in genere io dirida l'opinione esternata dal ch. mio collega Prof. Stefano Derossi (Veggansi Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei, Anno XXX, Sezione VI del 27 Maggio 1877) e cioè che poco o nulla deve essere l'influenza immediata della temperatura dell'aria su quella dell'acqua.

(11) Giova avvertire che il volume dell'acqua fornito dalle quattro sorgenti non è eguale in ciascuna di esse.

(12) Per norma credo opportuno soggiungere la scala termometrica per le sorgenti minerali ora comunemente adottata.

Sorgenti fredde	sotto 12° 00
fresche	dai 12° ai 14°
naturali	dai 15° ai 18°
tiepide	dai 19° ai 25°
calde	dai 24° ai 50°
caldissime	sopra 50°

(13) Veggasi memoria del Prof. Scalzi già superiormente citata.

sull'acqua sgorgante dalla *Fonte di Fiuggi*, la quale come si è detto, rappresenta il miscuglio di quattro distinte sorgenti, onde tentare di viemmeglio stabilire le intrinseche qualità della medesima, da cui senza meno devono poi ripetersi i salutari effetti fisiologici che incontestabilmente si verificano in coloro che soffrendo di affezioni calcolose fanno uso di quest' acqua, sarebbe utile a mio avviso di procedere eziandio all'analisi parziale di ciascuna della ridette sorgenti; tanto più che il risultato di questo lavoro potrebbe porre in chiaro quale delle enunciate quattro vene sotto il rapporto terapeutico dovesse all'altra essere preferita.

In aggiunta agli elementi come sopra forniti intorno alla nostra acqua unisco altresì un cenno sulla portata delle dette sorgenti.

Il volume di acqua sgorgante al boccaglio della fontana, d'appresso i rilievi da me assunti li 7 Settembre 1877 epoca di straordinarissima siccità, ammonta a Litri 0 41 per secondo. Tenuto calcolo peraltro della quantità proveniente dalla quarta vena che va ad alimentare direttamente, siccome fù detto, (Veggasi nota N. 7) il pubblico lavatoio misurato in litri 0. 20 per 1'', nell'assieme si può stabilire che la portata delle quattro sorgenti sia di litri 0,61 per 1'' ossia di oncie 2. 60 (Modulo Felice o Paola di Roma) e consequentemente che lo scarico delle ridette quattro sorgenti in 24 ore raggiunga un volume di Ettolitri 527. 04 (14) volume che nelle stagioni invernali si può considerare quasi triplicato, per quanto consta da informazioni assunte sopra luogo da persone degne di fede.

Per quanto poi si riferisce alla composizione chimica di quest' acqua, l'analisi qualitativa iniziata già dal Ch. Prof. Viale di illustre memoria completata quindi, come si disse, dell'esimio Prof. Ratti ci rivela che la medesima contiene

Aria
Acido carbonico libero in piccola dose (15)

---

(14) Non si comprende come il Zamputi (Veggasi memoria citata nella nota N. 5,) abbia potuto enunciare la portata in 24 ore della sorgente di Fiuggi in Ettolitri 13,520 assegnando a questa portata il mese di Luglio, dappoichè, ammesso pure che nel mese di Settembre le vene scarseggino assai più che nel Luglio, e tenuto calcolo altresì della straordinarissima siccità che regnava ovunque nella Provincia Romana nel Settembre dell'anno decorso; ciononstante la differenza tra le due cifre risulterebbe troppo esagerata; lo che insinua qualche dubio sulla precisione dei dati che servirono di base alle calcolazioni del prelodato Prof. Zamputi; e ciò a meno che non volesse ammettersi una sensibile diminuzione assoluta nel volume delle sorgenti, lo che peraltro è contradetto dai naturali del luogo.

(15) Si disse già che l'acqua di Fiuggi nasce prossimamente nel fondo di un bacino lacustre e la presenza dell'acido carbonico in essa acqua conferma appunto questo criterio geologico; da che è noto che le acque prendono quest'acido o traversando terreni vulcanici, ovvero passando per terreni sedimentari ove quell'acido si sviluppa per lenta decomposizione di materie organiche.

Bicarbonato di calce (16)
Cloruro di sodio
Bicarbonato di ferro
Solfato di calce } Tracce
Nitrato di calce } Tracce
Silice } Tracce

D'appresso questa analisi il prelodato Prof. Scalzi (17) pur ammettendo che esista in quest'acqua una vera ed efficace operosità risolvente ed espulsiva fu costretto ad escludere in essa la presenza di qualsiasi sostanza mineralizzante proclamando semplicemente la detta acqua come un *tipo di acqua potabile*, molto prossima all'acqua distillata.

Per render poi ragione del modo col quale la detta acqua tuttochè destituita di sostanze medicinali, agisce efficacemente nelle affezioni calcolose, soggiunse cha tale operosità risolvente ed espulsiva debba ripetersi « dalla facilità di transitare nelle vie orinarie per leggerezza specifica, fre- » schezza e modica acidità ed in parte dall'*azione meccanica* di trascinare, » bevuta in larga copia, quante materie solide incontri, e in parte dalla » facoltà dissolvente che è in tutte le acque povere di principii solidi. »

In sostanza il Prof. Scalzi ricusa all'Acqua di Anticoli una virtù propria dissolvente, come del resto a sua dichiarazione si possiede dalla rinomata acqua di Vichy.

Ora è appunto sopra questo concetto che mi è occorsa una seconda osservazione desunta dal fatto che categoricamente passo ad esporre. Alieno dall'entrare nell'altrui campo, sopratutto in materie alle quali mi dichiaro assolutamente estraneo, e protestando anzi ogni maniera di rispetto agli illustri scienziati che si occuparono dall'analisi suddetta, parmi ciononostante che possa promuoversi un qualche dubbio sulla negata azione *specifica dissolvente* della nominata acqua.

A coonestare questo mio dubbio non ho che riferirmi ai seguenti rilievi.

È notissimo non solo agli indigeni, ma ben anche a tutti i moltissimi forestieri che per ragioni di malattia annualmente accorrono con incontestato loro vantaggio alla *Fonte di Fiuggi*; (18) che quest'acqua intacca

(16) Giova notare che il bicarbonato di calce fù già riconosciuto dal Brugnatelli, siccome il *più energico* litolisico dei calcoli urici. Veggasi Purgotti, Analisi delle acque minerali di S. Gemini.

(17) Memoria citata sotto la nota N. 5.

(18) A torto piacque al Marieni di screditare in certo modo l'uso sopra luogo dell'acqua di Fiuggi per difetto di alloggi in Anticoli, asserendo che gli uomini sono costretti adattarsi nel Convento dei Cappuccini! e che le donne recandosi in quella terra non vi trovano agio! dappoichè posso attestare che sia per uomini sia per donne non incontrasi difficoltà ad ottenere comodi e

non leggermente e lentamente, ma sentitamente e rapidamente la pietra calcare, a modo da logorarla e consumarla in brevissimo tempo ed in proporzioni tali da mostrare all'evidenza che essa ha un azione intrinseca speciale dissolutiva sulla pietra calcare.

Io stesso ho avuto luogo nell'estate decorso di esaminare più volte il boccaglio della fonte di Fiuggi. (19) formato da una grossa mensola di calcare ippuritica ed ho potuto osservare nel medesimo oltre un logoramento notevole nelle pareti interne, una effettiva corrosione per ben più che due centimetri di lunghezza sul ciglio del boccaglio medesimo; corrosione che d'appresso testimonianze ineccezionabili potei in seguito constatare essersi prodotta nel breve lasso di soli tre anni circa; dappoichè il detto boccaglio era stato rinnovato nel Luglio 1874, nella quale epoca il presistente boccaglio che rimontava a pochi anni indietro fu dovuto porre fuori d'uso, parimenti perchè era stato dall'acqua soverchiamente consumato.
Ma non è poi solo sulle calcari che la nostra Acqua esercita la sua azione dissolvente, ma può asserirsi altresì che la spieghi egualmente sui metalli, come fu dato assicurarmene sopra una moneta di rame estratta in mia presenza dal fondo della ripetuta vasca di Fiuggi, quale moneta tuttochè evidentemente di conio non antico si rinvenne, per ogni senso riflessibilmente corrosa.

In presenza di queste osservazioni, in grazia delle quali resta ineccezionabilmente documentato, ciò che del resto era già noto a tutti gli antichi e moderni scrittori di quest'acque non escluso il Ch. Prof. Scalzi, e cioè che le medesime hanno la facoltà d'intaccare fortemente le pietre calcari ed i metalli, non pretendo già debba trarsene di legittima ed immediata conseguenza che tali acque debbano altresì agire con pari intensità nella vita intima dell'organismo sui calcoli siano urici, ossalici o fosfatici; dappoichè non ignoro che la economia animale non può essere considerata come un laboratorio di chimica, credo peraltro in genere possa bensì dedursene che l'*Acqua di Fiuggi* ha realmente in se una virtù speciale ed intrinseca dissolvente che dal menzionato illustre Prof. Scalzi sembra siale contrastata (20)

---

convenienti allogi nel detto villagio; nel quale anzi, a lode del vero, mi è grato di aggiungere che i forestieri sono accolti e trattati con ogni modo di urbanità e cortesia.

(19) Il boccaglio da me ispezionato nell'Agosto 1877 non è quello che presentemente trovasi in opera alla fonte di Fiuggi. Il detto boccaglio che era naturalmente in aggetto sul prospetto della fontana si crede venisse spezzato (forse per inavvertenza con un colpo di barile od altro recipiente) in una notte del Settembre decorso da taluno del villaggio di Acuto (prossimo ad Anticoli) che per penuria di acqua potabile in paese veniva a provvedersene a quella fonte.

(20) Sulla fede dello Scialpi, l'Acqua Media di Castellamare, che del resto non intacca minima-

Ne vale, almeno a mio avviso il ricorrere all'analogia dell'acqua distillata che attacca il vetro entro cui è talora conservata, dappoichè se da un lato potrebbe osservarsi in contrario che l'azione corrosiva energica e sollecita dell'acqua *di Fiuggi* non si può affatto paragonare alla debolissima e lenta azione dell'acqua distillata, dall'altro si fa poi rimarcare che l'Acqua Anticolana tuttochè per la sua purezza si approssimi all'acqua distillata non può in sostanza certamente ritenersi per vera acqua distillata (21).

E qui mi cade in acconcio il ricordare che anche il chiarissimo Prof. Purgotti tenendo proposito dell'acqua epatica ferruginosa di S. Gemini poco dissimile per la sua leggerezza dall'acqua distillata (al pari della Fiuggina) non esclude in detta acqua la facoltà di *chimicamente sciogliere* le materie che formano arenosi depositi in qualche parte dell'apparato urinario (22)

Del rimanente non vi ha certamente chi ignori che qualunque acqua ha la virtù per via meccanica d'intaccare le pietre « gutta cavat lapidem etc., ma poichè qui non è il fatto di solcature o corrosioni prodotte dal lungo lavorio di anni e dicasi anche in taluni casi di secoli, a seguito dei quali si veggono talora disgregate e corrose perfino le più dure roccie granitiche, ma sibbene trattasi di una massa calcare in un brevissimo periodo di tempo notevolmente corrosa e consumata da un piccolissimo corpo di acqua; a mio debole sentimento credo possa concludersene che quest'*azione corrosiva dell'acqua antilitiaca di Fiuggi* è dovuta realmente ad un processo chimico, e di conseguenza penso altresì possa ritenersi che quest'acqua tanto meritamente commendata nelle malattie dei calcoli orinari debba realmente contenere in se una speciale virtù dissolvente, in grado se non superiore al certo però non inferiore a quella della decantata acqua di Vichy.

Che se all'esattezza di questo mio qualsiasiasi concetto si volesse contraporre il risultato (d'altronde per me autoverolissimo) dell'analisi sopracitata non avrei che a ripetere quanta già venne dichiarato da un illustre scienziato (23), e cioè che « L'analisi chimica grandemente ci illumina » nel determinare l'azione terapeutica delle varie acqur minerali, ma dob- » biamo confessare che questa *non è abbastanza spiegata* dalle qualità e » quantità delle sostanze che contengono. »

mente la pietra calcare, come quella di Anticoli, manifesta tutti i segni di possedere *la facoltà dissolvente* sulle renelle e sui piccoli calcoli.

Veggasi — Scialpi — Terapia delle acque minerali di Castellamare di Stabia.

(21) Alle falde del Bosco di Quisisana presso Castellamare sgorga un acqua potabile denominata di S. Giacomo che molto si approssima all'acqua distillata; ciononostante la tazza di pietr in cui si versa la detta acqua non presenta traccia veruna di straordinaria corrosione.

(22) Veggasi l'opera del Purgotti citata alla Nota N. 16.

(23) Cav. Dott. Luigi Marieni. Opera citata — Nota N. 5.

COMUNICAZIONI

Armellini, Prof. Tito – Presentazione di un'analisi della nuova opera del P. F. S. Provenzali; ed alcune nuove esperienze sul telefono.

De Rossi, Prof. Michele Stefano – presentò all'accademia a nome del socio corrispondente ch. P. Alessandro Serpieri un opuscolo sul terremoto di Rimini del 18 Marzo 1875; e a nome dell'altro socio corrispondente ch. Prof. D. Ignazio Galli, una poesia dedicata alla cara e venerata memoria del P. Angelo Secchi.

Sua Eminenza Rma il Sig. Card. Camillo di Pietro, Protettore dell'Accademia, aprì l'odierna sessione: e levatosi in piedi, e con esso l'intiero corpo accademico, pronunziò un assai gradito discorso, col quale rallegravasi di trovarsi fra gli adunati come protettore dell'accademia. La quale protezione l'E. S. prometteva operosissima; e confidava sarebbe stata efficace a consolidare vieppiù l'importanza dell'Accademia ed a svolgerne sempre meglio la già illustre vitá scientifica.

Dopo ciò il segretario diè lettura del dispaccio dell'Emo Card. Segretario di Stato a lui diretto in risposta alla comunicazione fattagli dal medesimo delle deliberazioni accademiche relative alle nomine di parecchi uffici, onde ottenerne la sovrana approvazione. Nel detto dispaccio viene espressa la Sovrana conferma della nomina del Presidente sig. Comm. Alessandro Cialdi; dei due membri del Comitato, con deroga allo Statuto accademico § 12 del titolo III°, Prof. M. Azzarelli, Conte Ab. F. Castracane; dei censori sig. Principe D. B. Boncompagni, P. D. Chelini, P. S. Ferrari e prof. A. Statuti; del tesoriere Conte Ab F. Castracane, e del socio corrispondente ch. sig. Prof. Nicola Breithof.

Il nuovo presidente occupato il suo posto d'onore alla destra dell'Emo Card. Camerlengo, pronunziò dapprima alcune brevi parole di ringraziamento al medesimo per avere onorato l'Accademia di Sua presenza; lo che egli si augurava che sarebbe per essere spesse volte ripetuto: e più ancora ringraziava l'E. S. dei sentimenti espressi a favore dell'incremento che augurava all'Accademia sotto la sua protezione. Lesse quindi il seguente discorso:

Illustri ed Onorandi Colleghi

« Vi è noto abbastanza, per le mie esplicite dichiarazioni fatte a parecchi tra Voi, quanto io reputi le mie forze inferiori all'incarico di cui avete voluto onorarmi, sicchè vorrete credermi senza difficoltà allorchè affermo averlo

io accettato unicamente per deferenza alla vostra unanime volontà, e per dare una prova solenne del mio sommo interessamento per le cose di questa nostra Accademia, alla quale mi pregio appartenere da una serie d'anni ben lunga.

Soltanto queste considerazioni hanno potuto farmi sormontare la grandissima esitanza da me provata al pensiero di trovarmi assiso sul seggio lasciato deserto da quel grande, di cui la scienza e il mondo deplorano la recente e irreparabile perdita. Ma se, a titolo di onore per la nostra Accademia, io mi permetto di proferire da questo luogo il nome del P. Angelo Secchi, non mi accingerò per fermo a tesserne l'elogio, che fatto da me riescirebbe troppo inadeguato al merito di Lui. Ed invero come potrei io, la cui vita è trascorsa in gran parte sul mare, ed i cui studî non sono esciti dalla cerchia della nautica e dell'idraulica, elevarmi degnamente a quelle superne regioni, pei cui spazi aggirossi la mente di quel sommo indagatore dell'armonia dell' Universo? Altri assai di me più degno dirà di Lui a Voi, e godo di sapere come un tale incarico sia stato accettato dal nostro illustre collega il P. Stanislao Ferrari, il quale alla profonda conoscenza di tali materie unisce la somma ventura di essere stato, per così dire, il compagno di viaggio del Secchi nelle ardite sue esplorazioni del cielo.

Ed ora che quel sommo Maestro, ahi troppo presto! si è da noi dipartito, ci conforti il pensare che la sua bell'anima abbia raggiunto la meta immortale delle dotte sue peregrinazioni, giacchè per fermo dessa ora contempla beata senz'ombra di velo

« *L'amor che muove il sole e l'altre stelle.* »

Dopo ciò, Colleghi onorandissimi, debbo ringraziarvi con tutta l'effusione dell'anima per avermi conferito un tanto onore, ed assicurarvi che porrò ogni studio per corrispondervi quanto meglio potrò: la buona volontà non mi farà difetto, e alla pochezza delle mie forze nutro fiducia che suppliranno la vostra benevolenza e la vostra efficace cooperazione. »

Il segretario diè relazione all'Accademia dell'operato dalla Commissione pel monumento da erigersi alla memoria del P. Angelo Secchi, e lesse il seguente programma in forma di circolare dalla medesima compilato:

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

PROGRAMMA

PER L'EREZIONE DI UN MONUMENTO IN ROMA ALLA MEMORIA DELL' ILLUSTRE P. ANGELO SECCHI

CIRCOLARE

Quasi tutti i giornali hanno con plauso riferito la deliberazione presa dall'Accademia nostra nella tornata del 17 Marzo corrente, relativa alla erezione d'un Monumento in memoria del P. Angelo Secchi. Ad organizzare e curare questa impresa, essa nominava una commissione accademica composta dei sottoscritti scelti fra i soci ordinari.

Sembra superfluo render ragione della opportunità di eternare la memoria dell'illustre scienziato, perchè sarebbe quasi supporre che vi fosse chi ne ignorasse gli straordinari meriti scientifici. Parimente chiara è la ragione che indusse l'Accademia nostra a farsi promotrice di questo atto di stima dei contemporanei verso colui che sarà sempre ammirato dai posteri. È noto che dell'Accademia dei Nuovi Lincei, dedita soltanto alle scienze naturali, egli fu operosissimo presidente ed il più grande luminare.

Noi desideriamo piuttosto, nell'invitare tutti coloro che amarono ed ammirarono il Secchi a coadiuvarci nell'impresa, far loro conoscere il concetto del monumento, non già le sue forme, perchè queste non possono ora essere stabilite. Onorando il P. Secchi noi vorremmo promuovere la volgarizzazione della scienza, specialmente in Roma; ed in pari tempo adornare la città nostra, imitando ciò che già si fece oltre Alpe dalle più culte nazioni.

La meteorologia è la scienza, che più di tutte è necessario diffondere per aumentarle il tesoro delle osservazioni e per renderla sempre più utile alla navigazione, all'agricoltura ed alla pubblica igiene. Oltre a ciò questa scienza medesima fu eminentemente fatta progredire dall'esimio P. Secchi. La moltiplicazione infatti degli osservatorii meteorologici pubblici e privati forma il principale impulso, che oggi si dà a cotesta scienza, ed uno dei mezzi di diffusione della medesima largamente adoperato anche dal Secchi. In Germania, in Francia, in Svizzera ed altrove si pensò pure ad istituire i così detti *Monumenti meteorologici*. Questi mentre sono veri monumenti marmorei, nei quali può spaziare il genio estetico dell'architettura, servono però a sostenere i principali istrumenti meteorologici costruiti in guisa da porre

sotto gli occhi del pubblico le fasi della meteorologia. Della quale scienza così il popolo insensibilmente acquista il gusto ed i vantaggi, assai meglio che ricercando nelle quotidiane effemeridi il bullettino meteorologico degli osservatorii. In Italia non si costruirono finora monumenti completi di questo genere: ma tuttavia quasi vi si preluse in parecchie città, esponendo in luoghi pubblici alcuni de' principali istrumenti di meteorologia.

Quindi il dedicare al Secchi un *monumento meteorologico* in Roma a noi sembra progetto il più acconcio alla illustre memoria, che esso dee ricordare, al corpo Accademico che lo propone, ed in pari tempo corrispondente ai bisogni ed alla coltura dei nostri giorni. Così quell' esimio propagatore della scienza continuerà l' impresa sua verso i posteri, parlando perfino dal freddo marmo, che ne farà rimanere le sembianze fra i viventi.

Ognuno intende che all' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, iniziatrice di tal monumento, per condurlo ad effetto fa d'uopo l' approvazione della pubblica opinione, il favore delle autorità e la contribuzione degli amatori di Roma, dell'istruzione popolare e del Secchi.

Ci volgiamo perciò ai corpi tutti scientifici, agli scienziati, agli ammiratori del P. Secchi tanto italiani quanto stranieri, perchè vogliano coadiuvare col favore e colle offerte la nobile impresa.

Preghiamo i periodici massime gli scientifici a voler riprodurre questo nostro invito, ricevendo poi nei loro ufficii le offerte e pubblicando i nomi degli oblatori che loro si rivolgeranno; come noi pubblicheremo le somme singole che ci perverranno direttamente e le inviateci dai periodici e dai corpi morali.

Le offerte si ricevono dai sottoscritti Segretario e Tesoriere dell'Accademia e verranno depositate nella Banca Romana.

Roma 28 Marzo 1878, trigesimo dalla morte del P. Secchi.

LA COMMISSIONE ACCADEMICA

Comm. Alessandro Cialdi, *Presidente*.
Principe D. Baldassarre Boncompagni.
Cav. Prof. Mattia Azzarelli.
Cav. Prof. Tito Armellini.
P. G. Stanislao Ferrari.
P. Giuseppe Lais.
Conte Abb. Francesco Castracane degli Antelminelli, *Tesoriere*, Piazza delle Copelle N.° 50.
Cav. Prof. Michele Stefano de Rossi, *Segretario*, Piazza d'Aracoeli N.° 17

Il segretario in fine comunicò la decisione del Comitato Accademico sul far rivivere la classe dei soci onorari, e di rinnovare la classe dei soci aggiunti. Per la classe degli onorari il Comitato propone i cinque ora componenti la classe degli aggiunti, cioè: sig. Ing. Ignazio Cugnoni, D. Salvatore Vespasiani, conte Augusto della Porta Carrara, Cav. Clemente Palomba, Avv.° Felice Desjardins; inoltre Monsignor Vincenzo Vannutelli, Prof. Francesco Massi, Can.°° D. Enrico Fabiani, Monsignore Stefano Ciccolini, Commend. Giovanni Battista de Rossi. Per la classe poi degli aggiunti propone i seguenti: sig. Prof Odoardo Persiani, Prof. Eugenio Persiani, Prof D. Cesare Gismondi, Prof. Alessandro Seganti, Prof. D. Filippo Bonetti. Propone in fine il Comitato la seguente terna di nuovi membri ordinari: Prof. Francesco Ladelci, P. Felice Ciampi, Dott. Matteo Lanzi. Le votazioni per le elezioni suddette verranno fatte nella seguente sessione.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

S. E. Rma il Card. C. di Pietro, Protettore – Comm. A. Cialdi, Presidente – Contessa E. Fiorini Mazzanti – P. G. Foglini – Conte Ab. F. Castracane degli Antelminelli – Mons. F. Regnani – Cav. F. Guidi – Prof. T. Armellini – Prof. A. Statuti – Dott. Colapietro – Comm. C. Descemet – P. S. Ferrari – P. G. Lais – Prof. V. de Rossi Re – P. F. S. Provenzali – P. D. Chelini – Prof. M. Azzarelli – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

La seduta venne aperta legalmente alle 5 pom. e fu chiusa alle ore 7 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annuario dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino per l'anno* 1877—1878. — Torino, ecc. In 8.°
2. *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes.* — Tome LII. N° 2—3. In 8.°
3. BELLAVITIS (prof. G.) *Seconda parte della quattordicesima Rivista di Giornali presentata al R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti nel novembre* 1877, *dal prof. G. Bellavitis*, In 8.°
4. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni*, ecc. Tomo XI. Gennaio—Febbraio 1878. In 4.°
5. GALLI (Ignazio.) — Alla cara e venerata memoria del P. Angelo Secchi. In 8.°
6. *Jahrbuch der kaiserlich-königlichen Geologischen Reichsanstalt.* Jahrgang 1877. XXVII. Band. N.ro 3—4. JULI, AUGUST, SEPTEMBER, OCTOBER, NOVEMBER, DECEMBER, ecc. WIEN. 1877. In 4.°
7. *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* December 1877. ecc. Berlin 1878, ecc. In 8.°
8. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel* III. Amsterdam, 1877, ecc. In 8.°
9. *R. Comitato geologico d'Italia.* Bollettino N.° 1 e 2. Gennaio e Febbraio 1878. Roma, ecc. In 8.°
10. *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche*, ecc. Fascicolo 2°, Febbrajo 1878. In 4.°
11. SERPIERI (A.) — *Il terremoto di Rimini della notte* 17—18 *e considerazioni generali sopra varie teorie sismologiche*, ecc. Urbino, ecc. 1878. In 8.°
12. *Verhandlungen der Kaiserlich-königlichen Geologischen Reichsanstalt. Jahrgang* 1877, ecc. Wien. In 4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE Va DEL 5 MAGGIO 1878

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. ALESSANDRO CIALDI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI 3° GRADO

NOTA

DI MATTIA AZZARELLI

1° È noto che il metodo immaginato dal Ferrari per la risoluzione delle equazioni di quarto grado consiste nel trasformare l'equazione in due membri tali che da ognuno di essi possa estrarsi la radice seconda rispetto la incognita, decomponendo così l'equazione data in due di secondo grado. Un metodo analogo seguiremo per la risoluzione delle equazioni determinate di 3° grado, cioè procureremo trasformare l'equazione in due parti tali che da ciascuna di esse possa estrarsi sempre la radice terza.

2. Ci introdurremo in questa risoluzione col determinare quale debba essere la relazione tra i coefficienti p, q, r nella equazione

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0 \qquad (1)$$

ond'essa sia trasformabile nella somma algebrica di due cubi.

Si confronti l'equazione data colla terza potenza di un binomio, per esempio:

$$(x+a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$$

e risulterà

$$a = p\,;\ a^2 = q\,;\ a^3 = r$$

dalle quali emergono

$$a^4 = q^2;\ a^4 = pr:$$

e quindi

$$q^2 - pr = 0 \qquad (2)$$

è la richiesta condizione, onde verificata questa si ottiene facilmente la seluzione della proposta equazione.

Difatti si ponga la (1) sotto la seguente forma

$$-\,x^3 = 3\,px^2 + 3\,qx + r$$

e moltiplicato primo e secondo membro per pq si ottiene

$$-\,pq\,x^2 = 3\,q.\,p^2\,x^2 + 3\,q^2.\,px + pqr$$

alla quale aggiunto $p^3\,x^3$, e tenuto conto della (2) risulta

$$x^3\,(p^3 - pq) = (px + q)^3$$

dalla quale

$$x_1 = \frac{q}{\sqrt[3]{p^3 - pq} - p}$$

$$x_2 = \frac{\alpha\,q}{\sqrt[3]{p^3 - pq} - \alpha\,p}$$

$$x_3 = \frac{\alpha^2\,q}{\sqrt[3]{p^3 - pq} - \alpha^2\,p}$$

ove α, α^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.

È da notarsi che la risoluzione della (1) si ha pure con molta facilità nel caso che sussistano soltanto le due

$$a = p\,,\ a^2 = q$$

che danno la condizione

$$p^2 = q \qquad (3)$$

per la quale la (1) si muta in

$$x^3 + 3\,px^2 + 3\,p^2 x + r = 0$$

alla quale aggiunto e sottratto p^3, si ottiene

$$(x + p)^3 = p^3 - r$$

e quindi

$$x_1 = -p + \sqrt[3]{p^3 - r}$$

$$x_2 = -p + \alpha \sqrt[3]{p^3 - r}$$

$$x_3 = -p + \alpha^2 \sqrt[3]{p^3 - r}$$

2.° Quando la (2) non sia verificata, vediamo se sia possibile modificare talmente le radici della (1) che sempre possa aver luogo la condizione analoga alla stessa (2).

A questo fine si supponga che nella (1) le radici ricevano una modificazione, quale sia che vengano aumentate o diminuite di una quantità indeterminata tale da sottoporre questa alla condizione che sia soddisfatta la (2), onde si faccia

$$x = y + h \qquad (4)$$

rappresentando h essa indeterminata.

La (1) per questa nuova espressione della x si muta in

$$(y + h)^3 + 3\,p\,(y + h)^2 + 3\,q\,(y + h) + r = 0 \qquad (5)$$

dalla quale sviluppando si ha

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^3 + 3\,h & y^2 + 3\,h^2 & y + h^3 \\ \quad + 3\,p & \quad + 6\,ph & \quad + 3\,ph^2 \\ & \quad + 3\,q & \quad + 3\,qh \\ & & \quad + r \end{array}\right\} = 0 \qquad (6)$$

e traducendo a questa la condizione (2) otterremo

$$(h^2 + 2ph + q)^2 = (h + p)(h^3 + 3ph^2 + 3qh + r)$$

dalla quale abbiamo

$$(p^2 - q)h^2 + (pq - r)h + q^2 - pr = 0 \qquad (7)$$

che diremo ausiliaria o risolvente.

Da questa immediatamente si trae

$$h = \frac{-(pq - r) \pm \sqrt{(pq - r)^2 - 4(p^2 - q)(q^2 - pr)}}{2(p^2 - q)} \qquad (8)$$

che se qui moltiplichiamo numeratore e denominatore per lo stesso numeratore ove il radicale sia preso col segno contrario, ne risulterà anche

$$h = \frac{2(q^2 - pr)}{-(pq - r) \mp \sqrt{(pq - r)^2 - 4(p^2 - q)(q^2 - pr)}} \qquad (9)$$

Il valore di h sarà reale quando abbia luogo l'una o l'altra delle due condizioni

$$\left(\frac{pq - r}{2}\right)^2 - (p^2 - q)(q^2 - pr) > 0 \,;\, \tfrac{1}{4}(pq - r)^2 - (p^2 - q)(q^2 - pr) = 0$$

e sarà immaginario quando tra i coefficienti della (1) avrà luogo la condizione

$$\tfrac{1}{2}(pq - r)^2 - (p^2 - q)(q^2 - pr) < 0.$$

3° Assicurati della possibilità della determinazione di h la equazione (6) la scriveremo come siegue

$$y^3 + 3(p + h)y^2 + 3(h^2 + 2ph + q)y + (h^3 + 3ph^2 + 3qh + r) = 0$$

e da questa eliminando l'ultimo termine per mezzo dell'equazione di condizione, e si avrà

$$(p + h)y^3 + 3(p + h)^2 y^2 + 3(h^2 + 2ph + q)(p + h)y + (h^2 + 2ph + q)^2 = 0 \qquad (10)$$

e moltiplicando per $h^2 + 2ph + q$, ed isolando il primo termine sarà

$$-(p+h)(h^2+2ph+q)y^3$$

$$=3(h^2+2ph+q)(p+h)^2y^2+3(h^2+2ph+q)^2(p+h)y+(h^2+2ph+q)^3$$

ed aggiunto al primo e secondo membro la quantità

$$(p+h)^3y^3$$

avremo dopo qualche riduzione

$$(p+h)(p^2-q)y^3=[(p+h)y+h^2+2ph+q]^3$$

dalla quale

$$y_1\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}=(p+h)y_1+h^2+2ph+q$$

$$y_2\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}=\alpha(p+h)y_2+\alpha(h^2+2ph+q)$$

$$y_3\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}=\alpha^2(p+h)y_3+\alpha^2(h^2+2ph+q)$$

e quindi

$$y_1=\frac{h^2+2ph+q}{\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}-(p+h)}$$

$$y_2=\frac{\alpha(h^2+2ph+q)}{\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}-\alpha(p+h)} \qquad (10)$$

$$y_3=\frac{\alpha^2(h^2+2ph+q)}{\sqrt[3]{(p+h)(p^2-q)}-\alpha^2(p+h)}$$

Per mezzo di queste formole, determinato preventivamente il valore di h per la (8), si ottiene quello di y_1, y_2, y_3 e quindi per la (4) si ha quello della incognita dell'equazione data cioè

$$x_1=h+y_1;\ x_2=h+y_2;\ x_3=h+y_3 \qquad (11)$$

4.° Consideriamo ora alcuni casi particolari ai quali può dar luogo l'equazione ausiliaria per particolari relazioni che abbiano tra loro i coefficienti della proposta equazione.

Sia pertanto

$$p^2-q=0 \qquad (12)$$

in questa ipotesi vedemmo che la (1) si risolve immediatamente; ora è facile riconoscere che la (6) ammette una facile soluzione

Di fatti, l'equazione ausiliaria ci dà

$$h = -\frac{q^2 - pr}{pq - r}$$

nella quale sostituito il valore di q dedotto dalla (12) si ottiene

$$h = -p \qquad (13)$$

onde la (6) si muta in

$$y^3 + 2p^3 - 3pq + r = 0$$

dalla quale

$$y = \sqrt[3]{-(2p^3 - 3pq + r)}$$

e per la x abbiamo

$$x = -p + \sqrt[3]{-(2p^3 - 3pq + r)}.$$

ove posto p^2 in luogo di q si ottiene nuovamente

$$x = -p + \sqrt[3]{p^3 - r}$$

come al § 2.

Poniamo ora

$$pq - r = 0 \qquad (14)$$

per la (9) avremo

$$h = \sqrt{\frac{q^2 - pr}{q - p^2}}$$

e sostituito il valore di r tratto dalla (14), risulta

$$h = \sqrt{q}.$$

Per questo valore la (6) si muta in

$$y^3 + 3(p + \sqrt{q})y^2 + 6(q + p\sqrt{q})y + 4q(p + \sqrt{q}) = 0 \qquad (15)$$

la quale soddisfa alla condizione per ridurre l'uno e l'altro membro ad un cubo, quale si è nel presente caso

$$4(q + p\sqrt{q})^2 = 4q(p + \sqrt{q})^2$$

che è una identità.

Dopo ciò la (15) si ponga sotto la seguente forma

$$-y^3 = 3(p + \sqrt{q})y^2 + 3.\,2\sqrt{q}(p + \sqrt{q})y + 4q(p + \sqrt{q})$$

che divisa pel fattore comune al secondo membro, e moltiplicata per $2\sqrt{q}$ dà

$$-\frac{2\sqrt{q}\,y^3}{p+\sqrt{q}} = 3y^2 . 2\sqrt{q} + 3y . (2\sqrt{q})^2 + (2\sqrt{q})^3$$

ed aggiunto y^3 all'uno ed all'altro membro si ha

$$\left(\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right) y^3 = y^3 + 3y^2 . 2\sqrt{q} + 3y . (2\sqrt{q})^2 + (2\sqrt{q})^3$$

dalla quale

$$y\sqrt[3]{\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}} = y + 2\sqrt{q}$$

ed in fine

$$y = \frac{2\sqrt{q}\,\sqrt[3]{p+\sqrt{q}}}{\sqrt[3]{p-\sqrt{q}} - \sqrt[3]{p+\sqrt{q}}} \qquad (16)$$

Sia finalmente

$$q^2 - pr = 0 \qquad (17)$$

abbiamo

$$h = -\frac{pq-r}{2(p^2-q)} \pm \frac{pq-r}{2(p^2-q)}$$

dalla quale i due valori seguenti

$$h = 0, \text{ ed } h = -\frac{pq-r}{p^2-q}$$

che per la (17) si riduce ad

$$h = -\frac{q}{p}$$

Per questo valore la (6) si muta in

$$y^3 - 3\left(\frac{q-p^2}{p}\right)y^2 + 3q\left(\frac{q-p^2}{p}\right)y - \left(\frac{q^3}{p^3} - r\right) = 0;$$

ma dalla (17)

$$r = \frac{q^2}{p}$$

dunque sostituendo troveremo

$$y^3 - 3(q-p^2)\frac{y^2}{p} + 3q(q-p^2)\frac{y}{p^2} - \frac{q^2}{p^3}(q-p^2) = 0$$

la quale soddisfa alla nota condizione.

Ora si ponga questa equazione sotto la forma

$$-\frac{y^3}{q-p^2} = -3.\frac{1}{p}.y^2 + 3.\frac{q}{p^2}y - \frac{q^2}{p^3}$$

e moltiplicato per q tanto l'uno quanto l'altro membro ed aggiungendo y^3, sarà

$$-\frac{p^2}{q-p^2}y^3 = y^3 - 3.\frac{q}{p}.y^2 + 3.\frac{q^2}{p^2}.y - \frac{q^3}{p^3}$$

ovvero

$$-\frac{p^2}{q-p^2}y^3 = \left(y - \frac{q}{p}\right)^3$$

dalla quale emerge

$$y = \frac{q\sqrt[3]{q-p^2}}{p(\sqrt[3]{q-p^2} + \sqrt[3]{p^2})} \qquad (18)$$

5.° Giacchè in qualunque equazione è sempre possibile di far mancare il secondo termine, così in luogo della (1) potremo prendere a considerare

$$x^3 + 3qx + r = 0 \qquad (19)$$

nella quale posta

$$x = y + h$$

si ottiene per la trasformata

$$y^3 + 3hy^2 + 3(h^2+q)y + h^3 + 3qh + r = 0 \qquad (20)$$

per la quale posto la solita condizione

$$(h^2+q)^2 = h(h^3 + 3qh + r)$$

se ottiene la risolvente

$$h^3 + \frac{r}{q}h - q = 0 \qquad (20)$$

dalla quale

$$h = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4q^3}}{2q}.$$

Questo risultato si fa conoscere che se nella (19) sia $q < 0$ allora è

$$h = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4q^3}}{-2q} \qquad (22)$$

ed hanno luogo per h valori immaginari quando si verifica essere

$$\frac{r^2}{4} - q^3 < 0.$$

Se nella (10) si pone $p = 0$, otteniamo per la formola solutiva l'equazioni di 3° grado mancanti del secondo termine,

$$x = h - \frac{h^2 + q}{h + \sqrt[3]{hq}} = \frac{h\sqrt[3]{hq} - q}{\sqrt[3]{hq} + h} \qquad (23)$$

6° Esempj. 1° Sia l'equazione numerica

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

mancante del secondo termine, onde questa confrontata colla (19) abbiamo

$$q = -1, \; r = 2$$

e la (22) ci dà

$$h = 1.$$

Per questi valori di h, q, r la (20) si muta in

$$y^3 + 3y^2 = 0$$

le radici della quale sono

$$y_1 = 0, \; y_2 = 0, \; y_3 = -3.$$

Ora per la relazione

$$x = y + 1$$

otteniamo

$$x_1 = 1, \; x_2 = 1, \; x_3 = -2.$$

Questo medesimo valore si può avere ancora direttamente dalla (23). Pertanto si sostituisca in essa primieramente il valore $h = 1$ ed avremo:

$$x = \frac{\sqrt[3]{q} - q}{\sqrt[3]{q} + 1}$$

che per $q = -1$ si presenta sotto la forma indeterminata di

$$x = \frac{0}{0}.$$

Per togliere questa indeterminazione poniamo prima

$$x = \sqrt[3]{q}\left(\frac{1 - \sqrt[3]{q^2}}{1 + \sqrt[3]{q}}\right)$$

a quindi facciamo

$$q = -1 + \theta$$

essendo θ una quantità infinitesima il cui limite è zero. Il valore della x prenderà la forma seguente

$$x = \sqrt[3]{-1 + \theta}\left[\frac{1 - (1 - \theta(2 - \theta))^{\frac{1}{3}}}{1 + (-1 + \theta)^{\frac{1}{3}}}\right]$$

ma

$$(1 - \theta(2 - \theta))^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\theta(2 - \theta) - \frac{1}{3^2}\theta^2(2 - \theta)^2 - \ldots.$$

$$(-1 + \theta)^{\frac{1}{3}} = -1 + \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{3^2}\theta^2 + \ldots.$$

dunque

$$1 - (1 - \theta(2 - \theta))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\theta(2 - \theta) + \frac{1}{3^2}\theta^2(2 - \theta)^2 + \ldots.$$

$$1 + (-1 + \theta)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{3^2}\theta^2 + \ldots.$$

le quali sostituite danno, tolto il fattore comune θ,

$$x = \sqrt[3]{-1 + \theta}\left[\frac{\frac{1}{3}(2 - \theta) + \frac{1}{3^2}\theta(2 - \theta)^2 + \ldots.}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\theta + \ldots\ldots.}\right]$$

e portato nel limite risulta

$$x = -2$$

2° Sia ancora l'equazione

$$x^3 + 3x - \frac{8}{3} = 0$$

per la quale

$$q = 1, \; r = -\frac{8}{3}.$$

Sostituiti questi valori nel valore di h avremo

$$h_1 = -\frac{1}{3}, \; h_2 = 3,$$

e considerato il primo valore la (20) si muta nella

$$y^3 - 3y^2 . \frac{1}{3} + 3y . \frac{10}{3^2} - \frac{100}{3^3} = 0$$

nella quale separato il primo termine e moltiplicato tutto per 10 si ha

$$-10y^2 = -3y^2 \frac{10}{3} + 3y . \frac{10^2}{3^2} - \frac{10^3}{3^3}$$

ed aggiunto y^2 all'uno e all'altro membro emerge facilmente

$$-9y^2 = \left(y - \frac{10}{3}\right)^2$$

dalla quale

$$y = \frac{10}{3(\sqrt{9} + 1)}.$$

Dopo ciò avremo per la radice dell'equazione proposta

$$x = \frac{10}{3(\sqrt{9} - 1)} - \frac{1}{3}$$

che si riduce prontamente ad

$$x = \frac{\sqrt{9}}{3} (\sqrt{9} - 1) = 0,7489...$$

Il medesimo risultato si ottiene per mezzo della formola (23) la quale nel caso attuale diventa

$$x = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 3}$$

7° Le due equazioni particolari che abbiamo considerate sono state risolute dal Cardinali nella terza Dissertazione che fa parte degli = Opuscoli Matematici = Treviso = nella Tipografia Provinciale di Francesco

Andreola — 1318 — In questa Dissertazione viene proposto un nuovo metodo uniforme per risolvere l'equazioni di terzo e quarto grado determinate. E perchè di questo metodo abbastanza elegante, per quanto io sappia, non ne ho letta manzione veruna, così credo che non sia tempo perduto richiamarlo per sommi capi.

Posta l'equazione

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

si faccia

$$x = y + \sqrt{z - \tfrac{2}{3}p + y^2},$$

essendo y, z due indeterminate, una delle quali d'assegnarsi a piacimento: fatte le sostituzioni se ne trae

$$(4y^3 + 3yz - py + q)^2 = (4y^2 + z + \tfrac{1}{3}p)^2 (z - \tfrac{2}{3}p + y^2)$$

la quale sviluppata ed ordinata per le potenze della z si ha

$$z^3 + (4py^2 - 6qy - \tfrac{1}{3}p^2)z - (8qy^3 + \tfrac{8}{3}p^2y^2 - 2pqy + q^2 + \tfrac{2}{27}p^3) = 0 \qquad (3)$$

Ora si ponga la condizione

$$4py^2 - 6qy - \tfrac{1}{3}p^2 = 0$$

dalla quale si ricava

$$y = \frac{3q}{4p} \pm \frac{1}{4p}\sqrt{\frac{1}{3}(27q^2 + 4p^3)}.$$

Per una tale condizione la (3) si riduce alla equazione binomia

$$z^3 - M = 0,$$

nella quale, nei casi particolari, la M è nota, perchè tale è la y, essendo

$$M = 8qy^3 + \tfrac{8}{3}p^2y^2 - 2pqy + q^2 + \tfrac{2}{27}p^3,$$

e quindi

$$z = \sqrt[3]{M},$$

onde

$$x = y + \sqrt{y^2 - \tfrac{2}{3}p + \sqrt[3]{M}}.$$

Per ottenere le altre due radici basta dividere

$$z^3 - M = 0 \text{ per } z - \sqrt[3]{M}$$

e si otterrà per esse,

$$z = (-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{M}. \qquad (5)$$

DOTI E CONSEGUENZE ACUSTICHE DEL TELEFONO.

MEMORIA

DI T. ARMELLINI

La meraviglia che nel mondo scientifico ha destato la bella invenzione dell'americano Bell viene continuamente crescendo per gli arcani fenomeni, che ogni giorno si vengono scoprendo nel telefono, e chè non avrebbe neppure immaginato il suo inventore.

Infatti questo istrumento ci ha colpito con la squisita sua sensibiltà onde, esso è atto a rivelare le più microscopiche correnti elettriche, incapaci ad essere manifestate dalla stessa sensibilissima ranocchia galvanoscopica, la quale invece si scuote per quelle correnti medesime introdotte nel telefono, il quale determina nel batracio galvanoscopico convulsioni di diversa natura, secondo che diversi siano i suoni che si producono. Ond'è che la ranocchia è differentemente impressa dalle diverse vocali pronnnziate; a segno che potrebbe in certo modo comporsi un'alfabeto batracologico, col quale la parola potrebbe essere non già udita, ma veduta e però compresa da un sordo.

Cresce la meraviglia, quando ci venne assicurato da diversi esperimentatori, e noi lo confermammo, che tolta anche la lamina vibrante nel telefono ricevente, il mero suo cilindro magnetico d'acciaro è capace di riprodurre i suoni, benchè grandissimamente indeboliti.

Nel quale fatto singolare si trova uno stretto anello tra le vibrazioni elettriche con le acustiche. Queste sono il risultato dei movimenti molecolari generati nel magnete dalle perturbazioni del suo magnetismo, che vi recano le più delicate correnti.

Infatti i più piccoli urti impressi direttamente sul cilindro magnetico del telefono mittente sono stati capaci di svolgere correnti e però sono stati tradotti col ministero della corrente a quello del ricevente; con la quale esperienza si è reso manifesto, che qualunque cagione disturbi l'equilibrio molecolare nel seno d'un corpo, ne perturba lo stato magnetico; donde si origina la corrente indotta nel rocchetto che lo inviluppa, capace anch'esso di perturbare l'equilibrio magnetico della sbarra di acciaro del telefono ricevente: il quale squilibrio magnetico ne perturba a sua volta quello

delle molecole, le quali necessariamente sono poste in vibrazioni e producono il suono. Quindi il telefono assicura la legge di reciprocità tra i fenomeni elettrici e molecolari. Una perturbazione dell' equilibrio molecolare prodotto per una azione meccanica ne arreca un altro nella distribuzione del magnetismo, e viceversa: una perturbazione di questo ne produce una analoga nella condizione d'equilibrio delle molecole dei corpi magnetici. E siccome il magnetismo è propietà generale di tutta la materia, così qualunque movimento molecolare di questa desterà un disturbo nel suo magnetismo, e viceversa qualunque modificazione di questo determinerà movimenti molecolari.

Ma seguitando ad indicare qualche altro esperimento tendente a confermare la squisita sensibilità del telefono, ho voluto vedere in qual modo esso si comportasse con una macchina elettrica di piccola dimensione; donde traendo alcune scintillnzze le faceva scaricare sopra uno dei fili del telefono. È ben noto come per la minima quantità di elettrico che sono capaci di fornire tali macchine nelle ordinarie condizioni, una sola scintilluzza non è capace di produrre il più piccolo effetto magnetico anche sopra filo di ferro sottilissimo. Ciò non ostante, lo scoccare di ogni scintilla destava un suono, che sensibilissimamente si percepiva col telefono ricevente collocato all'opposta stagione. Il che indica che quella tenuissima quantità di elettrico era atta a sturbare sensibilmente il magnetismo della barra di ferro, che manifestava con suoni, necessariamente prodotti da vibrazioni molecolari, che quella corrente destava nel suo seno.

Passando poi ad un altro ordine di fenomeni, a quelle cioè dell'influenza della resistenza sull'azione del telefono, fin dalla prima comparsa del telefono volli vedere quale effetto producesse la resistenza del filo indotto di un potente rocchetto di Ruhmekorff, onde cercai se avessi potuto ottenere un qualche benchè minimo suono; ma non potei sentirne alcuno.

Se non che il Ch. Sig. Prof. Luvini avendo ripetuto questa esperienza, la modificò stabilendo la circolazione della corrente nel solo filo grosso induttore col telefono mittente; come pure chiuso il circuito del filo fino ed indotto con l'altro telefono nella stazione ricevente: e qui veramente fu grande la sua sorpresa quando in tali condizioni la corrente indotta, non ostante l'immensa resistenza, fu capace di produrre suoni ben sensibili nel telefono mittente. Si noti poi che con questa combinazione i due telefoni non sono in relazione diretta tra loro. Nell'uno si compie il circuito della corrente induttrice, nell'altro quello dell'indotta. Onde i telefoni non stanno

in relazione tra loro se non pel ministero della induzione elettrodinamica.

Volli anche ripetere l'esperimento del Luvini associando due rocchetti di Ruhmkorff, ponendone ciascuno alla propria stazione in relazione col relativo telefono per mezzo del filo grosso induttore, e stabilendo il circuito tra i due fili fini nei quali si svolge la corrente indotta; ed anche con questa combinazione, con mia grandissima sorpresa e del Ch. Sig. Cav. Placido Sabatucci, alla cui gentilezza vado debitore dell'assistenza e degli apparecchi fornitimi, ottenni i suoni.

Dissi con grande sorpresa: perchè in 1° luogo si tratta di resistenze enormi introdotte: quelle cioè dei due fili lunghissimi e sottilissimi, quali sono quelli che costituiscono il circuito della corrente indotta negli apparecchi di Ruhmkorff: in 2° luogo poi combinando in tal modo i rocchetti, la corrente operatrice sul telefono ricevente è la corrente indotta di second'ordine. Infatti nel telefono mittente si compie il circuito della corrente nel filo grosso induttore; la quale genera la corrente indotta di 1° ordine nel sistema dei due fili finissimi accoppiati dei due rocchetti. Questa corrente indotta di 1° ordine diviene a sua volta induttrice e genera la corrente indotta di 2° ordine; il cui circuito si compie nel filo grosso del rocchetto che sta in comunicazione coll'altro telefono.

Ciò non ostante, questa corrente di 2° ordine è capace di far suonare il telefono!

Passando poi ai diversi artificii imaginati per destare nei telefoni suoni sensibili a distanza atti a svegliare l'attenzione, analogamente al campanello di chiamata nei comuni telegrafi, ricorderò come una qualunque corrente d'una certa intensità che si trasmetta con intermittenze, le quali si succedano assai rapidamente, sono atte a destare suoni forti e di specioso metallo più o meno del tipo del canto della ranocchia. Nel qual genere di esperimenti credo d'essere stato in Roma il primo ad aver tratto un suono ben forte col telefono, ponendolo in comunicazione con la corrente indotta d'un piccolissimo rocchetto di Kent posto in azione da un piccolo elemento voltaico. Per mostrare poi che il suono prodotto in tal modo non era l'effetto, come taluno pensava dei colpi meccanici del martello vibrante, ma solo da questo ne discendeva, in quanto agiva come reotomo, sostituii all'elemento voltaico ed all'apparecchio di Kent un apparecchio magneto elettrico di Clark, e ne ottenni suoni identici e intensi, che rinforzati con un risonatore sentivansi alla distanza di due camere.

Fin qui abbiamo parlato della sensibilità e del rinforzamento dei suoni del telefono.

Procedo ora alle attinenze meramente acustiche e ad un nuovo campo di ricerche che ci ha dispiegato questo specioso istrumento.

È noto per le belle esperienze dell'Helmoltz e di altri fisici che la ragione di quello che gli acustici chiamano *timbro*, o meglio *metallo della voce*, è riposta nella risultanza dei diversi suoni elementari che si producono dagli istrumenti musicali che sono stati messi in evidenza separandoli.

È noto inoltre che la diversità del suono delle diverse vocali discende precisamente dal medesimo principio. Il cantante che col medesimo tono di voce canta pronunciando le diverse vocali, ha introdotto in ciascuna di esse diversi elementi fonici, un concerto cioè di diversi toni, la cui composizione produce nell'orecchio la sensazione delle singole vocali. Gli antichi nostri maestri di musica avendo avuto un sentore di questa teoria, aveano riconosciuto che nel solfeggiare non era indifferente la vocale con cui si intonava una determinata nota musicale della scala. Ben mi ricordo in tal proposito, che al cantante che dal *Si* naturale passava al *Si bemol* s'insegnava di alterare la vocale, sostituendo l'*a* all'*i*, onde faceasi solfeggiare con la voce *Sa* invece di *Si*. Questo vuol dire che quei buoni pratici aveano inteso che il suono di *i* era incompatibile con l'intonazione perfetta del *Si bemol*.

Le scoperte di Helmoltz hanno reso ragione di questa pratica: la vocale *i* contiene degli elementi fonici che mal si compongouo con l'intonazione del *Si bemol*.

Ciò posto, il problema acustico della produzione di suoni che avessero potuto imitare le vocali emesse dalla voce umana, non poteva risolversi se non che obbligando un istrumento ad emettere simultaneamente tutti i diversi elementi fonici, cioè le diverse note con le relative loro intensità che si richieggono dalle singole vocali.

Quindi chi non vede la difficoltà che presenterebbonsi a chi imprendesse a comporre un tale istrnmento?

Cresce la difficoltà se alle produzioni delle vocali aggiungiamo quella delle consonanti.

Il divino autore dell'orecchio umano avea però risoluto un tale problema, con quella semplicità ammirabile, che è la dote di tutte le sue opere: con le semplicissime membrane del timpano, e della fenestra ovale e tonda, capaci di vibrare, modificandone però le loro vibrazioni e le linee nodali

col ministero della catena di quegli altri ossicini che dalla lor forma appellasi l'osso lenticolare, l'incudine, la staffa: con i quali appendici la Sapienza Creatrice ha reso quelle membrane capaci di tradurre perfettamente nel sensorio i suoni di qualunque specie, con tutti i loro elementi. Nel che vi è una grandissima differenza dal telefono, il quale istrumento, benchè ci abbia entusiasmato per i suoi risultati è infinitamente distante ancora dalla perfezione dell' apparecchio acustico del nostro orecchio. Infatti, se con meno passione analizziamo il telefono, troveremo pur troppo che esso è un istrumento imperfettissimo. I suoi risultati inaspettati devono ascriversi all' azione del suo meccanismo, ma combinato con la intelligenza del soggetto che percepisce i suoni, e che con la sua fantasia, e con la ragione, supplisce ai difetti dell'istrumento, e corregge l'insufficienza d'articolazione. Tanto è vero questo, che se col telefono imprendiamo a trasmettere parole vuote di senso, non siamo al caso di comprenderle; e se pur riusciamo in alcuna, è ciò solo in forza dell'associazione delle idee, o meglio dei suoni che in certo modo presentiamo, quando da qualche elemento sillabbico di una parola, ne diviniamo piuttosto anzi che ne percepiamo veramente gli altri. Credo d'essere stato il primo io a trovare il tallone d'Achille nel telefono, quando dopo fattene le prime prove, avendo cominciato a pronunziare alcune parole non tanto in uso, e senza nesso logico, il mio compagno punto non m'intendeva. Onde credo non male appormi se la parte integrante dei suoi effetti ascriver debbasi al soggento percipiente piuttosto che all'istrumento. Tanto è ciò vero che nessuno mai è riuscito ad intendere la lingua telefonica la prima volta che vi ha posto l'orecchio. Inoltre avendo preparato una serie di sillabe e di parole senza senso e trasmessele telefonicamente a diverse persone incaricate di scrivere l'impressione ricevuta, fu veramente sorprendente la diversità delle parole e delle sillabe che scrissero. Il che conferma come sia imperfetta la trasmissione delle parole per mezzo del telefono.

Ma prescindendo dalle sue imperfezioni rimarrà sempre vero che la membrana metallica con le sue vibrazioni rigenera più o meno bene le voci e meglio i suoni, e le armonie prodotte nell'opposta stazione.

Qui facciam sosta: e riflettiamo al complesso dei movimenti e delle vibrazioni che debbonsi eseguire da questa membrana, perchè sia atta a produrre sul nostro orecchio la sensazione di quelle vocali, che noi d'altronde ben conosciamo risultare da una vera sinfonia di fonici elementi diversi.

Meditando un poco sul soggetto, ben compresi che un accordo o dissonanza di più note musicali eseguito avanti ad una membrana, devea porre questa in vibrazioni ben diverse da quelle che avrebbe eseguito per l'impressione di un accordo differente; le vibrazioni della membrana dovendo essere la risultante delle vibrazioni elementari constituenti i diversi accordi. Quindi compresi che la membrana dovea diversamente comportarsi in ordine alle sue vibrazioni, secondo che venisse impressa dai suoni delle diverse vocali.

A mettere in evidenza i movimenti della membrana caratteristici e rispondenti alle singole vocali, o ad altri suoni, composi un tamburro con una sola membrana di carta pecora; vi fissai un appendice di filo più o meno sottile di ferro o di altra sostanza, di cui con diversi artifizii ho cercato amplificare le indicazioni della estremità, facendo scorrerle avanti una striscia o di vetro o di carta affumicata; ed ho notato la differente forma delle curve che si riproducevano rispondenti ai diversi suoni; le quali avrò l'onore di sottomettere all'Accademia quando avrò potuto perfezionare l'apparecchio, che intanto però, non ostante la sua imperfezione assicura il fatto.

Prescindo ora dall'analizzare tal genere di scrittura automaticamente eseguita dalla parola, nè ardisco cimentarmi nella palestra di esercizio matematico che può somministrare la ricerca di tali curve degli elementi fonici, e dei diversi gruppi di vibrazioni i quali componendosi nella vibrazione risultante, sono in essa inclusi, e per forza di analisi possono esserne svincolati e messi in evidenza; e ritorno al mio soggetto: alla membrana del telefono.

Quando adunque una membrana di telefono riproduce un armonia, un concerto prodotto da diversi istrumenti, deve necessariamente riprodurre tutti e singoli gli elementi fonici di quello; e siccome ciascuno è costituito da un differente numero di vibrazioni, o meglio di onde di differenti lunghezze, così fin ad ora si sarebbe creduto che la lamina avrebbe dovuto atteggiarsi a questo complicato sistema di gruppi diversi di vibrazioni differente; così pure si riteneva che quell'asta di legno, con cui il Wheastone ricreò la cena dei suoi amici, facendoli assistere ad un concerto di fate che sembrava eseguirsi nella sala, ma che difatto si eseguiva in cantina, dovesse dal sotterraneo simultaneamente trasportare in alto alla cassa armonica l'intiero complesso delle diverse vibrazioni emesse da ciascun istrumento, con tutto il retaggio delle diverse armoniche, e battimenti proprii dei singoli istromenti, e concorrenti alla produzione dei rispettivi metalli (timbre) Così almeno credevano i più, così s'insegnava nei corsi di fisica.

Il telefono secondo il mio modo di vedere ha troncato la questione: e il fonografo lo conferma.

Accadrà quel che possa accadere nelle membrane: è certo che i suoni, le armonie, i concerti sono tradotti dalla membrana del telefono mittente, a quella del ricevente per mezzo di una serie di onde elettriche.

Ora queste o saranno tutte eguali in intensità, o differenti; e si succederanno ad intervalli eguali o diseguali.

Con un raziocinio facile e discendente dalla legge fondamentale della genesi dei suoni si pone in evideuza che queste onde elettriche, trattandosi di suoni complessi, debbansi succedere ad ineguali intervalli di tempo, e con diversa intensità.

È un caso d'interferenza di più onde: che si risolve con i più semplici metodi grafici.

Dunque una serie di urti che rapidissimamente si succedano, ma a diseguali intervalli, e con differenti intensità, produce sul nostro orecchio l'effetto medesimo di un concerto musicale. Tali urti possano esser rappresentati geometricamente con una linea incontrata da gruppi di perpendicolari, più o meno distanti. Queste ordinate rappresentano l'intensità delle onde; le ascisse, i tempi in cui si succedono.

Quindi una sola lamina che vibri con questa legge può produrre nel nostro orecchio le medesime impressioni di un pieno concerto musicale generato da una intiera orchestra.

Quando dunque saremo riesciti a cavar fuori il suono dalla membrana del telefono, se per mezzo d'un meccanismo qualunque sapremo imprimere ad una membrana quella serie di colpi con quella legge di tempo e d'intensità che risponde ad una determinata sinfonia che si suona da un concerto d'istromenti diversi, potremo far di meno degli istrumenti, e dei suonatori, e tutto si compendierà nella lamina.

La scienza del maestro di musica assai semplificata nello scrivere una sinfonia e svincolata dai legami dell'esigenze di ciascun istrumento, abbandonato il vecchio simbolo musicale ne adotterà il novello puramente geometrico, costituito da una retta orizontale che prenderà per ascissa del tempo; le ordinate con le loro differenti lunghezze denoteranno l'intensità, e con le loro distanze gli intervalli dei colpi che ricever deve la lamina. Per quanto ardita sia una tale divinazione, dopo l'invenzione del fonografo e del microfono che successero immediatamente al telefono, non esito concludere con Seneca « *Veniet tempus quo posteri nostri haec tam certa nos nescisse mirentur.* »

SULLA STRUTTURA MOLECOLARE DELLA CHININA E DI ALTRI ALCALOIDI NATURALI

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI D. C. D. G.

La struttura molecolare della chinina e degli altri alcaloidi naturali ancora non è conosciuta; ed è forse questa una delle cagioni per cui la sintesi artificiale di siffatti alcaloidi è rimasta nel numero dei problemi dei quali si desidera e si attende la soluzione. Si sa però che questi alcaloidi contengono l'azoto combinato al carbonio, e che in tutte le loro reazioni si comportano alla maniera delle ammoniache composte. Inoltre si sa che la chinina, la cinconina, la stricnina ed altri alcaloidi naturali, quando si distillano in presenza della potassa, danno del formiato di potassio ed un miscuglio di piridina e chinolina o più veramente di composti basici omologhi della piridina e della chinolina. Questo ultimo fatto potrebbe divenire il punto di partenza per stabilire la struttura molecolare della chinina e di altri alcaloidi, quando si conoscesse la costituzione della piridina e della chinolina. Ma gli studi analitici di queste due basi sembrano condurre a risultati contradittori. Infatti la piridina C^5H^5Az non contiene che cinque atomi di carbonio, e perciò si allontana dai composti aromatici che ne contengono almeno sei; mentre poi la stessa base è generata da un idrocarburo aromatico la naftalina, ed i suoi omologhi sono isomeri colle basi della serie dell'anilina. Questi fatti si potrebbero conciliare fra loro ammettendo che la piridina abbia veramente la costituzione dei composti aromatici, quale fu stabilita dal Prof. Kèkulé e dipoi ammessa dalla maggior parte dei chimici, colla sola differenza che un atomo di azoto occupi il posto del radicale triatomico CH. La possibilità della permutazione di CH con Az è resa evidente non solo dalla trivalenza ordinaria dell'azoto, ma anche dal rapporto di costituzione che passa fra il cloruro, bromuro e ioduro di azoto $Az\,Cl^3$, $Az\,Br^3$, $Az\,I^3$ ed il cloroformio $CHCl^3$, bromoformio $CHBr^3$ e iodoformio CHI^3. In tale ipotesi la formola di struttura della piridina sarebbe

```
Az = CH
 |    |
HC   CH
 ||   ||
HC - CH
```

dalla quale, rimpiazzando un atomo d' idrogeno con un metilo CH^3, etilo C^2H^5, propilo C^3H^7 o butilo C^4H^9, si hanno le formole di struttura della *picolina* C^6H^7Az, *lutidina* C^7H^9Az, *collidina* $C^8H^{11}Az$, *parvolina* $C^9H^{13}Az$ e degli altri omologhi della piridina.

Quanto alla chinolina C^9H^7Az e suoi omologhi, avendo questa base la più grande analogia tanto per l'origine che per il modo di agire colla piridina è molto probabile che derivi essa pure dalla naftalina mediante la sostituzione di Az a CH, epperò che abbia la struttura indicata dalla formola seguente

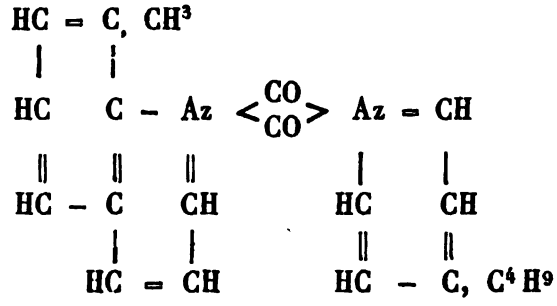
```
HC = CH
 |   |
CH   C - Az
 ||  ||   ||
HC - C    CH
     |    |
    HC = CH
```

Anche da questa formola, rimpiazzando un atomo d'idrogeno con un radicale metilo, etilo, propilo ec, si ottengono le formole della *lepidina* $C^{10}H^9Az$, *dispolina* $C^{11}H^{11}Az$, *tetrairolina* $C^{12}H^{13}Az$ e delle altre basi omologhe della chinolina.

Ciò posto per rappresentare la struttura molecolare della chinina, della cinconina, della stricnina e degli altri alcaloidi che per l'azione della potassa si sdoppiano in composti delle due serie suddette, non farà bisogno di altro che di unire per mezzo di uno o di due atomi d'ossigeno una base della prima serie con una della seconda. La pentatomicità dell'azoto ci offre il vincolo necessario per effettuare questa unione. Così p. e. con una molecola di dispolina ed una di parvolina si avrà una formola di struttura della chinina $C^{20}H^{24}Az^2O^2$, ossia

```
HC = C, C²H⁵
 |   |
HC   C - Az <O,O> Az = CH
 ||  ||   ||        |   |
HC - C    CH       HC  CH
     |    |        ||  ||
    HC = CH       HC - C, C⁴H⁹
```

E se in questa formola all'etilchinolina o dispolina si sostituisce la metilchinolina o lepidina, rimpiazzando i due atomi di ossigeno con due molecole di ossido di carbonio, si avrà invece una formola di struttura della stricnina $C^{21}H^{22}Az^{2}O^{2}$, cioè



Queste formole rendono sufficiente ragione del modo di agire degli alcaloidi che rappresentano. Ciò che in esse v'ha d'ipopetico non impedisce che possano avere dell'interesse anche per rapporto alla sintesi degli alcaloidi medesimi. Sono abbastanza noti gli esempi delle sintesi organiche prevedute e realizzate dai chimici moderni dietro le indicazioni delle formole di struttura sempre più o meno appoggiate a delle ipotesi, e troppo grandi sono i vantaggi che risulterebbero dalla produzione artificiale degli alcaloidi naturali, specialmente della chinina per l'enorme consumo che si fa de' suoi sali e per la scarsezza ogni giorno crescente delle piante che producono sì prezioso alcaloide.

SUL RISPARMIO DI FORZA VIVA IN UNA NUOVA TROMBA

NOTA

DEL PROF. FILIPPO GUIDI

Dopo le tante ed accurate analisi fatte dagli scienziati sulle varie perdite di forza viva che si hanno nella tromba aspirante e premente, non è chi non conosca la differenza che passa fra l'effetto, che teoricamente si dovrebbe ottenere da questo apparato sollevatore di liquidi, e l'effetto che praticamente se ne può avere, tenendo pur conto della perfezione a cui è giunta ora l'arte meccanica.

Dovendo io far costruire una tromba di forza un poco rilevante, per uso agricolo, ed in condizioni tali da non potervi applicare, nè un motore a vapore, nè un maneggio qualunque, e quindi avendo cercato di studiare la migliore possibile disposizione in ogni parte di tale meccanismo, mi sembrò che un ottimo effetto si sarebbe potuto ottenere col far lavorare tre pistoni entro lo stesso corpo di tromba. Ma poi riflettendo che pel caso speciale era troppo necessaria la semplicità del meccanismo, prescelsi di costruirla a soli due pistoni.

Dopo ch'ebbi fatto costruire questa tromba venni a conoscere che già da molto tempo erano state immaginate trombe a due pistoni, e specialmente da un rinomato ingegnere meccanico Sig. Hubert. Quella fatta da me costruire ha molta somiglianza con la tromba del Sig. Hubert: soltanto mi sembra aver migliorato le condizioni d'ingresso e di uscita dell'acqua dalla tromba, perchè in luogo di far le unioni dei tubi conduttori normalmente all'asse della tromba, ho fatto in guisa, che gli stessi tubi, con gomiti di raggio ben grande, e con dolce conicità, si convertano in corpo di pompa. Del resto con questa comunicazione, che ho l'onore di presentare alla Accademia, non cerco già un merito d'invenzione, ma voglio soltanto esporre qualche osservazione, che credo non sia stata fatta sino ad ora.

Le trombe a due pistoni, compresa anche quella del Sig. Hubert, furono riguardate come cosa ingegnosa ed elegante e nulla più; ma invece farò osservare come si possa ottenere in esse, qualora sieno ridotte a tre pistoni,

un effetto di elevazione, o, come dicesi dai meccanici, un rendimento molto superiore a quello delle altre trombe. Questo bel risultato si ottiene precipuamente dalla possibilità di sopprimere le valvole fisse, e di ottenere invece il giuoco della tromba con le sole valvole poste nel centro degli stantuffi.

Senza entrare in minuziosa descrizione dell'apparato, s'intende bene come da un asse rotante da cui partano tre bielle (divisa in tre parti uguali la rotazione) si possa dar movimento a tre stantuffi, che abbiano la corsa nello stesso corpo di tromba. Ora è chiaro che a qualunque punto della rotazione dell'asse motore, si avrà sempre uno almeno dei stantuffi in movimento ascendente, e quindi la colonna di liquido parimenti sarà sempre ascendente, e con moto abbastanza uniforme: dunque l'apertura e la chiusura delle valvole sarà indipendente dal movimento del liquido, ciò che vuol dire, che non accadrà la perdita di forza viva, che si deve necessariamente verificare nelle trombe comuni, che cioè alla chiusura delle valvole il liquido ascendente retroceda per una quantità più o meno grande, in guisa che nella maggior parte delle pompe si genera un movimento retrogrado di tutta la colonna e quindi un colpo d'ariete di effetto non lieve. Dunque le valvole si potranno costruire di apertura quanto più grande sia possibile, senza timore di perdita di forza viva, e con ciò sarà eliminato altro inconveniente ben grave, cioè la resistenza da vincersi pel passaggio del liquido per fori angusti. Adunque non abbiamo resistenze nella unione dei tubi conduttori col corpo di tromba, nè parimenti l'abbiamo nelle valvole, e quindi se non teoricamente, al certo praticamente, nelle formole che esprimono le varie perdite di forza viva nelle trombe, si potranno trascurare i termini che riguardano gli spazii perduti per le valvole, ed alle resistenze per passaggi angusti del liquido. Ma non basta ancora; la resistenza dello stantuffo è data dal peso della colonna di liquido elevata, moltiplicato dal coefficiente di attrito della materia, che guarnisce lo stantuffo, contro la superficie metallica formante il corpo della tromba: ed il peso della colonna ossia la sua altezza è aumentata di tanto, quanto è dovuto alle resistenze di sopra indicate: mentre che nella tromba di cui parlo, lo stantuffo, può dirsi, non sostenere che la colonna di liquido elevata. E dippiù siccome il movimento del liquido è sempre ascendente, si potrà adottare addirittura lo stantuffo metallico, ovvero si potrà guarnirlo con dischi di materia elastica a frizione assai dolce con le pareti della tromba: in tal caso il modo di valutare la resistenza dello stan-

tuffo non è più quello che ho detto, ma la resistenza stessa potendosi ridurre a minima ed incalcolabile, si dovrà tener conto invece della piccola parte di acqua, che sfuggirà dal disopra al disotto dello stantuffo.

Nello stesso tempo che l'area A dello stantuffo eleva con la corsa C un volume AC, la perdita di cui parlo sarà rappresentata dall'area a del meato fra lo stantuffo e la tromba, per la velocità dovuta alla altezza h di elevazione, moltiplicata poi per un coefficiente, dovuto all'attrito dell'acqua contro le pareti del sottilissimo meato: quindi la perdita starà alla portata, come

$$K\,a\,\sqrt{2gh} : AC.$$

Si prenda per esempio la tromba da me fatta costruire, ove lo stantuffo è del diametro di M' 0, 14, la corsa in un secondo è di M' 0, 20, la elevazione è di metri 9. Supposto un meato di un quarto di millimetro (che sarebbe pur eccessivo) avremo

$$AC = 0{,}0154 \text{ metri cubi,}$$

e

$$Ka\,\sqrt{2gh} = 0{,}0008 \text{ metri cubi.}$$

avendo adottato K = 0,7.

Dunque la perdità più rilevante nelle trombe comuni, e che ascende spesso al 20 per cento, si ridurrà in questa tromba al 5, e non volendo trascurare un leggerissimo attrito, ascenderà al 6.

Vediamo adunque quali potranno essere tutte le perdite di forza viva di questa tromba nella ipotesi qui sopra ammessa, assumendo una forza totale applicata pari a 100. La perdita di attrito per l'asse rotante su cuscinetti, e per le bielle, tenuto conto anche di una lubrificazione imperfetta ascenderà al massimo a 3
perdita negli stantuffi come dianzi ho esposto 8
perdita pel movimento alternativo di tre pistoni, aste manovelle etc. . 2
perdita per resistenza delle valvole e delle pareti dei tubi supposti anche non levigati e dei premistoppa 5
perdite per attriti derivanti da inesattezze di costruzione 2

Totale — 20

Quindi il rendimento sarebbe dell'80 per cento, assai superiore a quello di tutte le trombe adoperate, sebbene esse sieno di ottima, e ben studiata costruzione.

Le considerazioni che ho esposte, le quali sono basate, non solo su valutazioni teoriche, ma bensì su dati sperimentali ben conosciuti, mi indussero a dar conoscenza di questa mia idea. Spero quanto prima poter costruire una tromba su questo nuovo tipo, e non mancherò di render noti i risultamenti della esperienza, ma desidererei ancora che fosse studiata e sperimentata da altri, poichè mi sembra che molti sarebbero i casi, nei quali se ne potrebbe ritrarre vantaggio.

COMUNICAZIONI

Provenzali P. F. S. – *Presentazione di una sua opera.* Il ch. P. F. S. Provenzali presentò all'Accademia la sua recentissima opera intitolata « *Trattato elementare di chimica moderna.* »

De Rossi prof. M. S. – *Presentazione di un giornale.* Il Prof. M. S. de Rossi presentò una copia del giornale *l'Economista di Malta* del 6 Aprile 1873, contenente un invito ai Maltesi di contribuire al monumento per il P. Secchi iniziato dalla nostra Accademia.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia si riunì in comitato segreto per procedere alle votazioni sopra le proposte fatte dal Comitato direttivo. In primo luogo si passò ai voti la terna per i membri ordinari composta dei ch. sig. Prof. Francesco Ladelci, P. Felice Ciampi, Dott. Matteo Lanzi. Fatta la votazione, essendo sedici votanti, per essersi ritirato il Rmo Mgr. F. Regnani, risultarono eletti a pieni voti il Prof. Francesco Ladelci, e il P. Felice Ciampi; e con dodici voti bianchi contro quattro neri il ch. Dott. Matteo Lanzi.

Si procedette quindi alla votazione per l'elezione dei soci onorari, fra i quali si propose di annoverare i cinque soci componenti ab-antico la classe degli aggiunti, cioè Ing: Ignazio Cugnoni, D. Salvatore Vespasiani, Conte Augusto della Porta, Cav. Clemente Palomba, Avv. Felice Desjardins. Fatta la votazione complessiva rimase approvata la proposta con 15 voti bianchi contro uno nero. Vennero poi successivamente fatte le votazioni per gli altri proposti, che furono tutti eletti nel modo seguente: Mgr. Vincenzo Vannutelli, Prof. Francesco Massi, Mgr. Stefano Ciccolini, a pieni voti: il Can.co D. Enrico Fabiani con 15 voti bianchi: il Commend. Giovanni Battista de Rossi per acclamazione. Contro la quale per dovere d'officio protestarono il Segretario ed il Presidente, dichiarando quest'ultimo, che quantunque dividesse anch'egli i sentimenti dei soci verso l'eletto, pure stimava doveroso nella sua qualifica di Presidente di proporre, che si facesse la votazione ordinaria a forma dei regolamenti. Al che fu risposto dai soci, che lo Statuto prescrive le votazioni per mezzo delle palle, escludendo soltanto le votazioni per schede; e che la votazione per acclamazione non è perciò contraria ai regolamenti, ed esservene altri esempi per deliberazioni nelle quali il corpo accademico volle dimostrare uno speciale gradi-

mento. Dopo ciò il Presidente approvò l'osservazione e dichiarò di prender parte alla fatta acclamazione; mentre il Segretario, che per dovere di delicatezza avea dapprima dichiarato di astenersi dal prender parte alla votazione, rese grazie all'Accademia per l'onore distintissimo, che veniva fatto al suo maggiore fratello.

Finalmente dovendosi fare la votazione per l'elezione dei cinque soci proposti dal Comitato per la classe degli aggiunti, fu osservato essere dell'interesse dell'Accademia il far rivivere questa classe da molto tempo trascurata, di renderla alquanto più numerosa. Quindi il Corpo deliberante commise al Comitato accademico di formolare una nota di candidati da presentarsi nella prossima sessione in tante copie, quanti saranno i soci presenti: di modo che ognuno potrà apporre a ciascun nome un segno convenzionale per l'ammissione o per l'esclusione. Ciò non altera il segreto della votazione e non è contrario alla proibizione regolamentare delle schede, atteso che il segno convenzionale non rivela la calligrafia di veruno, ed è soltanto un modo spedito di votazione, che equivale alla ballottazione. Il corpo deliberante però volle subito complessivamente passare ai voti i cinque già proposti dal Comitato, che furono approvati a pieni voti. Essi sono Sig. Prof. Odoardo Persiani, Prof. Eugenio Persiani, Prof. D. Cesare Gismondi, Prof. Alessandro Seganti, D. Filippo Bonetti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Comm. A. Cialdi, Presidente – Prof. Tito Armellini – P. Provenzali – P. Foglini – Monsig. F. Regnani – Cav. F. Guidi – Comm. C. Descemet – Prof. M. Azzarelli – Prof. V. De Rossi Re – Cav. G. Olivieri Conte – Ab. F. Castracane – Prof. A. Statuti – P. S. Ferrari – P. D. Chelini – D. B. Boncompagni – Dott. D. Colapietro – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

La sessione aperta legalmente alle ore 5 pom. ebbe termine alle 7 $^1/_4$ pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni*, ecc. — Tomo XI. — Aprile 1878, — Roma ecc., 1878. In 4.°
2. DENZA (P. Francesco). — *Il Padre Angelo Secchi. — Commemorazione del P. Francesco Denza direttore della corrispondenza meteorologica alpina-appennina.* — Torino, 1878 Collegio Artigianelli — Tip. e Lib. S. Giuseppe, Corso Palestra, 14.
3. PROVENZALI (P. F. S.) — *Trattato elementare di Chimica moderna del P. F. S. Provenzali d. C. d. G.* — Volume I. — Parte prima, Chimica generale Metalloidi-metalli. — Vol. II. Combinazioni del carbonio. — Roma. Tipografia di Bernardo Morini 1877.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VI^a DEL 26 MAGGIO 1878

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. ALESSANDRO CIALDI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SOPRA LA RELAZIONE FRA I MASSIMI E MINIMI DELLE MACCHIE SOLARI E LE STRAORDINARIE PERTURBAZIONI MAGNETICHE

NOTA

DEL P. G. STANISLAO FERRARI

Soggetto di questa comunicazione si è l'esame comparativo de'fenomeni solari e magnetici osservati nell'anno 1875. Come si era fatto per gli anni precedenti anche per quest'anno si trattava di esaminare se questa correlazione sussisteva eziandio pei singoli periodi secondarî delle diverse rotazioni, tanto più che ora ci andiamo accostando all'epoca del *minimum* delle macchie. Affine di porre meglio in luce le nostre conclusioni, altro non faremo che riferire, voltandoli fedelmente nel nostro idioma, i risultati che ottenne il Ch. Sig. Eugenio Spée esaminando le curve delle osservazioni magnetiche, allorchè dimorava con noi all'Osservatorio, e da esso presentato all'Accademia Reale delle Scienze nel Belgio. Questo esame fu dal medesimo istituito, come ci manifestò più volte, affine di stabilire in

modo indipendente il fatto di tale intima correlazione, e scelse a tal uopo l'anno 1875, essendo uno di quelli ne' quali già cominciava a diminuire sensibilmente il numero delle macchie poichè, come egli si esprime (pag. 5.) « gli anni del minimo sono assai favorevoli per lo studio di « questi fenomeni; la loro scarsezza fa sì, che se ne possano seguire con » più attenzione le varie fasi ed esaminare minutamente le circostanze che » le accompagnano; inoltre diviene per tal modo meno probabile l'ipo- » tesi che il loro accordo sia l'effetto del caso. Sotto tal punto di vista » è prezioso l'anno 1875. Il numero delle macchie che nel 1874 era ancora di » 153 discese nel 1875 ad 86 ed un' analoga diminuzione fu notata nel nu- » mero delle facole e delle protuberanze. Ho paragonato, egli dice, le » curve magnetiche diurne costruite sopra le otto osservazioni del decli- » nometro, del bifilare, e del verticale, collo stato fisico del Sole. Vi è fra » queste due classi di fenomeni un accordo sì manifesto, che farebbe » nascere spontaneamente l'idea di collocare nell'attività solare la cagione » primitiva di tutti i fenomeni magnetici ».

Viene poscia il Ch. Autore ad esporre i particolari dal suo studio comparativo e sono i seguenti:

GENNAIO 1875.

Il 2 Gennaio, primo giorno d'osservazione, vi era un gruppo sulla superficie solare ed era già arrivato a tre quarti della sua corsa. Esso misurava ancora 9^{mmq} e vi si contavano 9 piccoli nuclei.

Il 2 Gennaio, gli strumenti magnetici furono perturbati. La perturbazione si manifestò principalmente nel verticale e nel declinometro. Quest'ultimo discese rapidamente di 6 divisioni, contro l'andamento normale di questa stagione.

Il 3 erasi sviluppato il centro del gruppo assorbendo le parti vicine: la macchia avea l'aspetto di un triangolo di 18^{mmq} di superficie, con due nuclei. Il 4 una nuova macchia formossi all'improvviso nell'emisfero Nord a due centimetri dell'orlo occidentale. Le facole che l'accompagnavano e quelle che circondavano la macchia principale erano assai vive. Il 5 ed il 6 il cielo fu coperto. Il 7 una macchia con due nuclei cominciava la sua rotazione, ma fu di poca importanza. Il 10 quantunque assai avanzata sul disco solare non misurava che 6 millimetri.

Il 3 il bifilare fu assai irregolare. La perturbazione aumentò nei giorni seguenti e specialmente nel pomeriggio del 7 fece una discesa di 15 divi-

sioni. In tal giorno fu altresì notabile la perturbazione del declinometro e del verticale.

Dal 7 al 17 non si potè fare che una sol volta il disegno del Sole. Questo periodo è un periodo di molta calma. Gli strumenti furono ben poco agitati: solo furono spostate le ore tropiche.

Il 17 apparve un gruppo all'orlo orientale del Sole. Vi si contavano sette nuclei, ma l'agitazione non era che superficiale essendo debolissime le facole. Infatti dopo avere aumentato di superficie fino al 19 esso diminuì rapidamente, ed il 23, allorchè trovavasi alquanto al di là del diametro polare esso non era più che una serie di piccoli punti neri.

Dal 17 al 21 il bifilare ed il verticale furono soventi volte *fuor d'ora*. Il 22 fu più notevole la perturbazione e generale negli strumenti. Il verticale percorse 9 divisioni ed il bifilare 11, il declinometro rimase assai fluttuante.

Il disegno del 23 mostrava lo sviluppo enorme di tre piccoli pori comparsi il 20; essi formavano un sistema di due belle macchie nucleari della superficie di 30.^{mmq} Il 24 le macchie erano circondate di brillanti facole.

Il 24 forte perturbazione: il verticale salì di 11 divisioni e il bifilare di 19, per discendere il 25 di 20 divisioni.

Il 26 esse erano sull'orlo, dal quale vedevansi lanciati dei getti brillanti che partivano dai loro centri. Dal 26 al 29 nulla di notevole. La sola cromosfera è alquanto agitata. Mancano i disegni del 30 e del 31.

Nulla di straordinario nel magnetismo terrestre. Nel pomeriggio del 30 il bifilare salì repentinamente di 17 divisioni, mentre il 31 non oscillò che di tre divisioni.

FEBBRAIO

Ma il 1.° Febbraio una macchia di 7^{mmq} era entrata sul disco. L'agitazione che l'avea prodotta doveva essere mediocre e presso la sua fine. La cavità non tardò molto a chiudersi. Il 5 non ve n'era più traccia. In quel giorno furono disegnati parecchi piccoli pori. Il 6 essi formavano un piccolo gruppo di 12 millimetri situato sull'asse e vi si contavano 9 nuclei. Ma quest'agitazione ancora fu passeggera. Il 9 i nuclei erano ritornati allo stato di pori, i quali l'11 erano compiutamente scomparsi.

Dal 2 al 5 il verticale ed il bifilare furono costantemente perturbati. Il 6 il declinometro percorse appena una divisione.

Il 9, nella mattina, si vide una leggera eruzione all'orlo Est. Nella regione corrispondente del disco, vi si vedevano già delle bellissime facole ed

una piccola macchia presso dell'orlo, ma il tutto ben presto svanì e si sciolse. La calma durò fino al 17. In questo giorno una lontana eruzione mostravasi all'orlo orientale. Il 19 una bella macchia nucleare vedeasi nella regione corrispondente accompagnata da una seconda più piccola. La somma delle aree era di 18.^{mmq}

Il 9, il verticale fu assai oscillante; ed il 10 il bifilare percorse più di 15 divisioni.

Il 20 ed il 21 fu coperto il cielo e impedita l'osservazione. Il 22 la superficie occupata dalle macchie era di 56^{mmq}; un'osservazione speciale del nucleo principale mostrò nella cavità la presenza del sodio, dell'idrogene, del magnesio e del ferro. Continua a crescere l'attività solare. Il 24, allorchè il vasto gruppo trovavasi sul meridiano centrale, due nuove macchie formaronsi a piccola distanza dell'orlo Est. Il 26 in tutto se ne contavano 6 con 12 nuclei ed una superficie totale di 66^{mmq}. Le facole altresì erano numerose e brillanti.

L'attività che regnava nelle macchie, manifestavasi nel movimento delle sbarre magnetiche. Infatti, dopo essere stata paralizzata dopo il 17, l'escursione giunse il 21 ad 11 divisioni pel verticale ed a 18 pel bifilare. Il 22 il declinometro restò perturbato, il 25 ricominciarono le grandi fluttuazioni, ed il 27 si ebbe una fortissima perturbazione magnetica, del carattere che i fisici chiamano *aurorale*. L'escursione del bifilare fu di 64, 6 divisioni, quella del verticale di 43, e quella del declinometro di 19, 5.

MARZO

Il tempo cattivo che durò quasi costantemente nel mese di Marzo impedì frequentemente le osservazioni.

Il bifilare fu perturbato nei giorni 1, 3 e 5. L'oscillazione del verticale fu il 5 di 12 divisioni, e di 14 l'8. Esagerata fu pure quella del bifilare; il 7 era di 12 divisioni.

I disegni del 6 e 7 mostrano ancora un poco di attività; vi sono due piccoli gruppi alquanto al di là dell'asse con 16^{mmq} di superficie perturbata il 6 e di 26^{mmq} il 7. Il 9 la porzione agitata è tutta presso l'orlo occidentale ed ha ancora 14^{mmq} di superficie.

Il 10, il verticale discese dopo un'oscillazione di 15 divisioni.

Dopo un'interruzione di quattro giorni due nuove macchie trovavansi sul disco solare: dalla loro posizione si calcola che la regione da esse occupata era all'orlo Est l'11 ed il 12.

L'11 il bifilare calò di 19 divisioni, l'ampiezza dell'oscillazione del verticale fu di 14 divisioni, ed il massimo principale del declinometro accadde *fuor d'ora*. Dal 13 al 17 il bifilare fu continuamente perturbato.

Il 18 una macchia di notevole dimensione, per l'epoca attuale, trovavasi a 5 millim. dell'orlo orientale, il nucleo e la penombra aveano una superficie di 13^{mmq} ed erano circondati da facole numerose. È a dolersi il non averne potuto fare l'osservazione spettrale, chè al certo si sarebbe veduta l'eruzione. Il 19 e i giorni seguenti l'agitazione crebbe costantemente. Il 23 l'area perturbata era di 45^{mmq} ripartita in due gruppi con 7 nuclei.
Il 17, il bifilare salì rapidamente e giunse nella mattinata alla divisione 113; l'oscillazione del verticale fu di 17 divisioni. L'influsso del gruppo sembra siasi fatto sentire di preferenza sul verticale, nel quale le oscillazioni sono sempre esagerate. Il 24 e 25 esse sono tuttavia di 17 divisioni. Dal 20 al 27 la media oscillazione del bifilare era di 5^d, 8, il massimo fu di 8^d, 3 ed il minimo di 4^d, 2. Il 28 essa fu di 17^d, 7 ed il 29 di 16^d, 5.

Il 30 Marzo l'immagine del sole rivelò la presenza di un nuovo gruppo di 18^{mmq} di superficie. Esso era al di là del meridiano centrale. La sua formazione risaliva al 28 o al 29, poichè il 27 non vedevansi in questa regione nè pori nè facole.

APRILE

Il mese di Aprile fu anche più sfortunato del mese di Marzo. Nello spazio di 15 giorni non si potè fare che 6 sole volte il disegno del sole e tre volte soltanto l'osservazione spettrale.

Il disegno del 4 mostra quattro gruppi di facole che racchiudono 7 piccoli nuclei. La cromosfera era tranquilla, e non vi era che una protuberanza di 12^{mmq} di superficie. L'8 ed il 9 fu notato che uno dei gruppi era aumentato ed una nuova macchia entrava sul disco. Lo stato del cielo non permise lo studio della cromosfera. Si ebbe una nuova interruzione di cinque giorni.

Il 15 Aprile si vedevano tre macchie che nell'insieme comprendevano 33^{mmq} di superficie. Esse trovavansi nel periodo detto di *tranquillità*; le facole erano poco numerose ed appena visibili, e il centro diminuì rapidamente.

L'andamento de' magneti fu assai regolare nei primi giorni del mese. Il 5 ci fu una leggiera perturbazione nel bifilare che continuò anche il 6.

Il 7 essa fu fortissima in tutti e tre gli strumenti e fu in coincidenza con una bella aurora boreale osservata a Pietroburgo. Nella mattina il bifi-

lare discese di 31 divisioni, verso mezzodì salì di 7 per discendere nuovamente di 10 nel pomeriggio. La sua calata fu quindi di 34 divisioni. Il verticale risalì di 25^d, 4 e l'oscillazione del declinometro fu di 11^d, 8.

Il bifilare rimase perturbato, ma senza presentare dell'esagerazione nella sua escursione. L'oscillazione del verticale per contrario andò crescendo dal 12 al 15. Il 15 essa comprendeva 20^d. Essa diminuì nei giorni seguenti, per poi aumentare dopo il 20.

Dal 17 al 22 la cromosfera riprese un poco di attività; vi furono ogni giorno da 7 ad 8 protuberanze colla superficie media di 250^{mmq}. Mancano le osservazioni del 23 e 24. Il 23 l'oscillazione del verticale fu di 28^d ed il 26 uscì fuori di scala.

Il 25 eravi una gran macchia di 11^{mmq} di superficie con due nuclei ne' quali la penombra era circondata da vivissime facole. Il 27 apparve un nuovo gruppo che fino dal 26 doveva essere sull'orlo Est. Esso era assai più sviluppato del primo e quantunque ancor vicino all'orlo misurava già 30^{mmq} di superficie e l'aureola delle sue facole era notevole. A mano a mano che esso avanzavasi, meglio potevasi giudicare delle sue dimensioni assolute. Il 30 la sua superficie era di 50^{mmq}.

Il verticale principalmente sembrò sentire l'influsso di questo bel gruppo. La sua escursione fu costantemente esagerata.

MAGGIO

Nei primi giorni di Maggio l'attività interna del sole continuò ad essere notevole, e le facole continuarono ad essere assai brillanti. Il 3 allora quando la macchia avea di poco oltrepassato il centro del Sole, il verticale percorse 20 divisioni. Il 4 uscì fuori di scala ed il 3 la perturbazione fu generale. Il 6 il verticale percorse di nuovo 33 divisioni ed il 7 uscì nuovamente di scala come pure il 9 ed il 10. La perturbazione quantunque di minore intensità, scorgevasi ancora nei moti del bifilare e del declinometro.

Il giorno 8 il nucleo del gruppo principale distava di 1^{mm} dall'orlo. Il 9 la macchia scomparve dal disco, ma essa era tuttora visibile allo spettroscopio il quale mostrava che l'eruzione non era ancor terminata. A questa accresciuta attività dei giorni scorsi succedette un tempo di calma quasi assoluta. Dal 10 al 20 non si vide che un poro e quasi nessuna facola.

Colla scomparsa della macchia, cessò ancora la perturbazione ne' magneti, ed il verticale riprese il suo moto medio ordinario che è di 7 divisioni incirca. Dal 10 al 20, la sola irregolarità che mostrano di quando in quando

gli strumenti fu un cangiamento nell'ore tropiche. L'ampiezza delle loro oscillazioni si mantenne sempre nei loro limiti ordinarj.

Il 21 la cromosfera fu alquanto in moto. Vedevansi qui e là sul contorno del disco dei getti brillanti. Il 23 l'attività fu ancor più forte, una piccola macchia entrava sull'orlo orientale ed il numero delle protuberanze salì fino a 10, colla superficie totale di 280^{mmq}. La superficie suddetta era di 114^{mmq} il 21, e la media dei sette giorni precedenti fu di 70^{mmq}. Dal 24 fino alla fine del mese non si videro sul sole che due pori i quali si chiusero prima ancora di giungere all'orlo occidentale.

Il 21, 22 e 23 fu doppia l'escursione del bifilare ed il 22 il verticale fu alquanto esagerato. Questa leggera perturbazione, la quale conferma in modo singolare una delle conclusioni enunciate dal P. Ferrari, fu seguita da una grandissima calma.

GIUGNO

Il 2 Giugno apparve un piccolo gruppo. Quantunque presso all'orlo, cioè a dire nella miglior condizione per osservarvi le facole, queste si vedevano appena. Il 3 ed il 4 non si potè fare il disegno. Il 5 eravi un notevole cangiamento. Le sue dimensioni di 15^{mmq} erano salite a 28^{mmq} e vi si scorgevano molti piccoli nuclei. Il 6 ed il 7 il gruppo crebbe ognora più quantunque avesse già oltrepassato il meridiano centrale. Il 12 esso era giunto all'orlo occidentale e si fecero due disegni della protuberanza che la sormontava. Il periodo di attività era decrescente poichè i getti erano poco elevati. Il 16 vedeansi sul sole tre gruppi di facole seminate di piccoli pori.

Una nuova perturbazione cominciò a manifestarsi nel bifilare. Il suo moto medio aumentò, ed aumentò pure quello del verticale. Il 4 esso calò di 11 divisioni, ed il verticale di 9. Il bifilare rimase agitato, ed il 7 la sua oscillazione fu di 17^{d}. L'agitazione andò diminuendo a poco a poco. Il moto del bifilare rimase esagerato il 9. Il 13 la perturbazione fu sensibile nel verticale ed il 14 e 15 gli strumenti furono regolarissimi. È degno di nota che questa perturbazione magnetica ebbe luogo durante un seguito di bellissime giornate nelle quali non si potè osservare nessun fenomeno meteorologico straordinario.

Il 17, 18 e 19 il tempo fu coperto. Il 20 uno dei gruppi del 16 erasi assai sviluppato, esso misurava 33^{mmq} e contavansi sul disegno 7 nuclei distinti. Nei dì seguenti esso diminuì rapidamente, non si vedevano facole nel suo contorno ed allorchè giunse all'orlo esso era quasi compiutamente chiuso.

Il 17 il declinometro ed il verticale erano fuor d'ora, e il bifilare dopo essere salito di 18^{d} nel pomeriggio di questo giorno, nell'indomani calò di 20 divisioni.

Il 22 un gruppo erasi formato nel centro del sole; esso conteneva una piccola macchia ed una serie di piccoli pori. Il 23 e 24 fu impedita l'osservazione. Il 25 il gruppo avea 55^{mmq} di superficie perturbata. Il 27 era presso all'orlo, e, come nel caso precedente, fu notata l'assenza delle facole.

In sulle prime l' influsso di questo gruppo sui magneti non parve essere in correlazione colla sua estensione, il bifilare a dir vero fu irregolare dal 20 al 29 ed il minimo del verticale fu quasi ogni giorno fuor d'ora. Ma ad eccezione del 30, non si videro quelle esagerate escursioni che coincidono col passaggio delle grandi macchie. Si può supporre pertanto che non ostante le sue ampie (ma non eccessive) dimensioni l'attività del gruppo non era profonda, infatti essa durò neppure un'intera rotazione, mentre le grandi macchie si mostrano fino a tre volte successivamente sul disco solare.

Il 30 entrò nel disco una piccola macchia nucleare di forma quasi perfettamente ellittica. Eravi inoltre un gran gruppo di facole, che stendevansi verso occidente per un arco di 20 gradi nella regione equatoriale. La parte corrispondente del lembo era sormontato da un bel fiammone idrogenico.

Il 30 la perturbazione fu più forte, il bifilare percorse 14^{d}.

LUGLIO

L'attività solare nel mese di Luglio fu insignificante. La piccola macchia ellittica compì la sua escursione indebolendosi sempre più.

L'andamento del bifilare nel mese di Luglio fu irregolare senza però mostrare esagerate escursioni. Il 3 percorse 12^{d}, 5, l' 11 l' irregolarità fu più sensibile e si estese al declinometro e al verticale.

L' 11 dopo un' interruzione di due giorni, videsi sul sole una piccola macchia nel suo nucleo penombra e facole. Il 13 un secondo centro di attività si aggiunse al primo. Ma l'uno e l'altro dovevano durare assai poco. Il 17 non eravi più che un poro.

Il 13 gli strumenti furono ancora perturbati. Quanto alle piccole perturbazioni del 15, 16 e 17 esse furono senza dubbio connesse colle burrasche che di quei giorni passarono sopra Roma.

Fino al 25 non vi fu più nulla di nuovo. In questo giorno fuvvi una piccola eruzione all'orlo Est. Ne furono presi tre disegni; e la macchia apparve nell' indomani. Essa si accrebbe sensibilmente fino al giorno 30, in cui aveva 18^{mmq} di superficie perturbata.

Il 25 l' escursione del bifilare fu doppia del medio degli otto giorni precedenti. La sbarra percorse 10^d. Il 30 ne percorse 13,2.

AGOSTO

La calma del mese di Luglio prolungossi durante il mese di Agosto e specialmente dall' 1 al 20. La macchia del 26 s'indeboliva mano a mano che essa accostavasi all'orlo Ovest. Il 2 Agosto il massimo del bifilare calò di 5 divisioni.

Un' importante osservazione si fece il 2 di Agosto. Fu visto assai distintamente nella parte centrale del disco un gruppo di facole disposto lunghesso l'equatore solare. Per essere vedute in questa posizione esse dovevano avere uno straordinario splendore.

Il 3 esse erano quasi compiutamente scomparse, e nel loro posto sulla regione anteriore presso la macchia del 26 erasi formato un piccolo gruppo. Mancano i disegni del 4, 5 e 6.

Il 3 la perturbazione fu generale. Il massimo del declinometro ed il minimo del verticale furono in ritardo di due ore ed il bifilare ebbe soltanto il suo minimo secondario.

Il 7 il gruppo era arrivato all'orlo, e si potè notare che esso non era ancora in riposo, quantunque però l'eruzione fosse assai debole. Dall' 8 al 20 il tempo fu magnifico. L'osservazione fu fatta regolarmente ogni giorno, e la somma delle aree elevossi a 2^{mmq} di superficie perturbata.

Il 6 Agosto il verticale sembrava paralizzato ; esso percorse appena 3 divisioni e vi fu un secondo minimo anormale alle 4^h pom. Durante questo periodo non vi fu nulla di straordinario negli strumenti magnetici. Una leggera perturbazione manifestossi dal 12 al 16 : il verticale era frequentemente paralizzato. Il massimo ed il minimo de'varj strumenti accadeva fuori delle ore tropiche. I due gruppi di facole che in questo frattempo passarono sul disco solare furono forse la causa di tale perturbazione ? Non vi fu pertanto nessun fenomeno meteorologico particolare ; il tempo si mantenne bellissimo e regolare.

Il 21 manifestossi un principio di attività. Una piccola macchia videsi quasi tangente all'orlo, ed il p. Ferrari disegnò varî getti che trovavansi sopra di essa.

Il 22 questa macchia era seguita da una seconda più sviluppata e con due nuclei. Il loro complesso comprendeva un'area di 14^{mmq} e trovavasi ad una distanza media di 7^{mm} dal l'equatore solare nell'emisfero boreale. Più in

basso, sotto l'equatore, presso a poco alla medesima distanza eravi una bella protuberanza idrogenica assai elevata. Il 24 nella regione corrispondente vedevasi un gruppo di belle facole. L'agitazione fu breve. Una delle macchie si chiuse prima di aver compiuto una mezza rotazione. L'altra, che era più grande, fu seguita fino al termine del suo passaggio.

Il 21 il moto del bifilare fu stentato ed il verticale fuor d'ora. Il 22 perturbazione nei tre magneti che il 23 durò ancora nel bifilare. Esso restò alquanto agitato e la sua escursione media fu di 12 divisioni essendo spesso fuor d'ora.

SETTEMBRE

Il 2 settembre la macchia trovavasi all'orlo e mostrava ancora un poco di attività. Succedette un tempo di calma. Il sole non aveva più nè facole nè macchie importanti. Soltanto la cromosfera era alquanto agitata il che appariva dai pennacchî che dileguavansi collo spettroscopio.

Il 2 il massimo del bifilare corrispondeva alla divisione 115 della scala ed il 3 cadeva a 104.

Il 10 una piccola macchia formavasi sopra di un meridiano che stava per scomparire per la rotazione.

Il 10 il bifilare percorse 10 divisioni, ed uscì dalle ore tropiche, come pure il declinometro. Il verticale era paralizzato. L'oscillazione del 10 fu di 2^d, 2 e quella dell'11 di 0^d, 8.

Il 13 fuvvi un'eruzione alquanto sopra dell'equatore. Dalle 9^h 45^{mm} alle 11^h il P. Ferrari ne fece 4 disegni. Il 14 la macchia e le facole trovavansi sul disco; non distinguevasi che un nucleo, ma il 15 se ne vedevano 5. Un'altra eruzione si produsse il 18 ma sventuratamente all'orlo occidentale.

Il 13 il verticale soltanto fu sensibilmente agitato. Il 14 la perturbazione si fece sentire ancora nel bifilare. Essa giunse al suo massimo il 16 e si estese a tutti gli strumenti. Dalla sera del 15 al pomeriggio del 16 il bifilare discese rapidamente di 24 divisioni. Il 17 il bifilare percorse ancora 16 divisioni, il 18 il verticale fece una forte discesa, e tutti i magneti furono fuor d'ora. Il bifilare continuò ad essere più o meno irregolare. Il 26 la sua escursione si fece ascendente, e salì fino al 29. Il 29 piccola perturbazione nei tre magneti.

Il 29, dopo un'interruzione di parecchi giorni videsi sul disco solare un piccolo gruppo La sua posizione inoltrata indicava essere esso di recente formazione.

OTTOBRE

Il 1.° Ottobre formossi un gruppo, il quale mentre il 1° mostrava tre pori soltanto; il 3 aveva 11^{mmq} di superficie perturbata.

Le burrasche che passarono sopra Roma, durante il mese di Ottobre influirono probabilmente sopra i movimenti dei magneti, ma più manifesta vi si scorge l'azione dell'attività solare.

Il 2 Ottobre si ebbe una sensibile perturbazione specialmente nel bifilare, il quale fece un'escursione di 17, 5 divisioni.

I disegni del 5 del 6 e del 7 mostrano maggiore l'attività nella parte occidentale dell'astro; tre gruppi vi si svilupparono, la loro superficie aumentava ogni giorno più, nonostante che l'effetto della prospettiva dovesse farla apparire più piccola.

Il 5 fuvvi una perturbazione nel declinometro e nel bifilare. Il 6 essa fu generale, e durò ancora il 7 nel bifilare e nel verticale.

Dal 10 al 17 il cielo fu coperto. Il 18 due gruppi di facole di grande splendore vedevansi all'orlo Est. Esse contenevano dei piccoli pori appena visibili. L'agitazione veniva aumentando, ed il 19 uno di essi costituiva una macchia di 5^{mmq} di superficie. Nuova interruzione.

Dal 9 al 14 i moti del verticale e del bifilare erano alquanto impediti, e l'ampiezza dell'escursione assai ridotta. Il 16 vi fu una mediocre perturbazione, ma generale, nei magneti. Il 17 il bifilare percorse soltanto 3^d, 8 ed il declinometro e il verticale furono fuor d'ora. Il 18 l'oscillazione del bifilare si ridusse a 3^d, 6 e il 19 a 2^d, 2. Quella del verticale fu 3^d, 1 e 3^d, 3.

Il 25 una bella macchia era entrata nel disco. Essa aveva una superficie di 13^{mmq} quantunque presso all'orlo. Vi erano due nuclei e la penombra era nettissima. Il 28 la macchia aveva oltrepassato $^1/_6$ del raggio solare ed era composta di 3 nuclei estesi colla superficie di 35^{mmq}. Essa era giunta al suo massimo di attività, poichè con tutto che si avanzasse ancora pel disco le sue dimensioni andavano diminuendo. Il 30, due dei suoi nuclei erano fusi in un solo, essa era pressochè nel centro del sole sul meridiano centrale alquanto al di sopra dell'equatore. Il 31 i nuclei si andarono vieppiù restringendo e non misuravano che 26^{mmq} di superficie.

Il 24 si ebbe un'altra perturbazione nel bifilare dello stesso carattere che la precedente, esso oscillava fra 2, 5 divisioni. La sera il verticale fu pure agitato, ed il 25 cominciò una serie di perturbazioni che influirono più o meno sopra tutti gli strumenti. La più forte ebbe luogo il 28.

NOVEMBRE

Il 1.° Novembre vi fu della recrudescenza sul sole. Quantunque la macchia fosse vicina all'orlo occidentale vi erano in questo dì 4 nuclei. Da quest'epoca, il tempo fu contrario alle osservazioni.

Il 1.° Novembre l'oscillazione del bifilare fu di 13, 3 divisioni. Il 2 essa fu maggiore e la sbarra calò di 20 divisioni. Il declinometro ne percorse 8 mentre il medio per questa stagione è di sole 3 divisioni.

Dal 4 al 10 andamento regolare. L'11, vi fu una leggiera perturbazione nel bifilare. Il 12 si estese al declinometro e al verticale.

Il 13 si potè prendere il disegno del sole: non vi erano che alcune facole all'orlo Occidentale. Il 17 comparve una macchia la quale fu il principio d'un periodo più attivo. Il 18 la macchia era divenuta un piccolo gruppo di 8^{mmq}. Il 19 se ne formò una seconda improvvisamente. Altre due si succedettero, ed il 24 ultimo giorno in cui si potè fare l'osservazione il loro totale aveva 30^{mmq} di superficie e conteneva 15 nuclei.

Mancano da quest'epoca a disegni fino al 7 dicembre.

Il bifilare restò irregolare in questo periodo eccetto il 21. Il carattere della sua perturbazione fu di avere i massimi e minimi fuor d'ora. Il 21, giorno dell'apparizione dei due ultimi gruppi, esso percorse 11 divisioni.

La media del mese era di 5^d, 96.

DECEMBRE

Il 6 Decembre il bifilare fece ancora una grande escursione. Esso fu generalmente irregolare fino al 23. La curva fu assai irregolare il 16, 17 e 18.

Il 7 e l'8 vi furono alcune facole di nessuna importanza. Il 12 il 13 e il 14 la cromosfera è agitata in varj punti. Nella regione ordinaria delle facole i fiammoncelli d'idrogene erano copiosi ma di debole splendore.

Il 14 due getti assai alti e vivi furono osservati e disegnati. Il 15 una macchia nucleare entrava sul disco e sviluppavasi rapidamente. Il 19 essa aveva una superficie di 27^{mmq} e le facole che l'accompagnavano erano assai vive. Mentre sviluppavasi la macchia principale, molti pori formavansi all'improvviso ed alcuni erano circondati da facole numerose. Una simile formazione avvenne il 26 al centro. Il 27 il punto nero divenne una macchia, ed il 29 ve n'erano due colla superficie di 7^{mmq}.

Il 18 fuvvi un'Aurora Boreale a Pietroburgo. Essa avvenne appunto allorchè la macchia manifestava le sue più grandi modificazioni. Il nucleo prin-

cipale si era diviso e le due parti erano separate da un ponte luminoso assai brillante.

Il 23 e 24 gli strumenti furono tranquilli. Il 25 ricominciò la perturbazione, ed il 26 l'oscillazione del bifilare fu assai larga. Dopo una serie di piccoli movimenti esso salì di 19 di- visioni e rimase perturbato sino alla fine del mese.

I risultati di questo parallelismo sono assai stringenti. Le due più forti perturbazioni magnetiche di tutto l'anno, quello cioè dellafine di Marzo e di Aprile, coincidono col passaggio delle maggiori macchie, cioè a dire, hanno luogo allorchè l'attività del sole è al suo massimo, le une e le altre s'ingrandiscono e s'indeboliscono al medesimo tempo. Per contrario, i moti dei magneti sono tanto più regolari quanto più grande è la calma nella massa solare. Fra questi due limiti estremi le oscillazioni irregolari sono più o meno pronunciate secondo che la cromosfera e la fotosfera sono anch'esse più o meno agitate. Alcune di queste perturbazioni magnetiche accadono durante l'assenza di qualsiasi perturbazione meteorologica, allorquando cioè non vi sono subitanei cangiamenti di temperatura, nè grandi alternative nelle correnti atmosferiche, e quando non si hanno grandi ondate barometriche..... il che ci conduce a cercare al di fuori dell'atmosfera l'origine di queste misteriose agitazioni. Inoltre tale coincidenza non è un fatto isolato, ma si verifica negli anni anteriori. Siccome però la rarità relativa di questi fenomeni è maggiore nel 1875, così la coincidenza si rende più manifesta.

Giova però ricordare che allorquando si attribuisce ai moti che accadono nella materia fotogenica un' influsso sul magnetismo terrestre, non si vuole con ciò escludere l'esistenza di altre cagioni secondarie, quali sarebbero le aurore boreali, i terremoti etc. Conviene inoltre notare che il *tempo cattivo* degli anni 1875 e 1876 (ed ora si può aggiungere, del 1878–79) ha colpito i meteorologisti e che lo stato fisico del sole potrebbe avere un grande influsso sulla nostra atmosfera, e paragonando le osservazioni meteoriche colle osservazioni solari, forse si giungerebbe a delle importanti conclusioni.

Se l'ipotesi da noi qui sostenuta è vera, bisogna che le oscillazioni straordinarie si riproducano in tutti i luoghi della terra, tutto al più modificate da circostanze locali, dipendenti o dalla latitudine o da fenomeni meteorologici più ristretti. Ora essendo generalmente noto l'andamento dell'ago magnetico per i vari luoghi del globo terrestre, eziandio le straordinarie oscillazioni vi debbono contemporaneamente accadere. Ed è appunto così. I risultati ai quali son giunti Sabine e Loomis, analizzando le osservazioni

di Kew e di Praga, risultati che furono mirabilmente confermati dai lavori del P. Secchi, sono ormai noti a tutti i fisici. Lo stesso parallelismo esiste fra le curve di Toronto, di Hobart-Town, di Washington e di Monaco. Paragonando poi le perturbazioni straordinarie del 1872 (e del 1873) notate in Roma con quelle che si ebbero all'Habana, il P. Ferrari vi trovò uno straordinario accordo.

Fin quì il Ch. Autore, il quale conchiude la sua memoria coll' indicare lo stato attuale della scienza intorno alla causa *diretta* od *indiretta* di tal connessione, della quale abbiamo altrove ragionato.

Come abbiam fatto notare in sul principio di questa comunicazione, ci è piaciuto riprodurre l'analisi del Sig. Ab. Spée affinchè non si ponesse fede alla sola nostra autorità, epperò ci siamo così allontanati dall'usato metodo di esaminare la correlazione fra i fenomeni solari e magnetici distinguendo in periodi l'attività solare. Solo ci piace di far osservare, come esaminando la curva da noi pubblicata nel n.° 11 del Vol. XVI del nostro Bullettino, apparisca manifesta la partizione in 12 periodi, i quali presso a poco corrispondono alle rotazioni solari; e quindi si conferma l' ineguale distribuzione delle macchie altre volte notata sulla superficie solare.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES ET INDÉTERMINÉES

PAR LE P. TH.LE PEPIN S. J.

1. Le Mémoire que j'ai publié dans les *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei*, anno XXIX, p. 211, renferme des moyens nouveaux pour réduire à des carrés les formules cubiques ou biquadratiques. Je me propose de les appliquer à quelques équations de la forme

$$(1)\quad A u^2 = B x^4 + C y^4,$$

où les coefficients A, B, C sont des nombres premiers entre eux deux à deux. Les exemples que j'ai choisis montreront comment l'on peut dans certains cas déterminer toutes les solutions possibles de ces équations; non pas explicitement, puisque nous verrons qu'elles forment une suite illimitée; mais implicitement, au moyen de formules qui permettront de les obtenir toutes successivement dans leur ordre croissant de grandeur. Les cas semblables sont rares; car le plus souvent l'équation (1) est impossible, et lorsqu'elle est possible on est loin de pouvoir toujours en trouver toutes les solutions. C'est pourquoi les équations dont nous allons nous occuper offriront quelque intérêt; d'autant plus qu'elles nous amèneront tout naturellement à la méthode posthume d'Euler dont il a été question dans le Mémoire cité.

2. Pour que l'équation (1) soit possible en nombres entiers et premiers entre eux, il faut avant tout que les trois nombres AB, AC, $-$ BC, soient respectivement résidus quadratiques des trois nombres C, B et A; il est de plus nécessaire que le nombre $-BC^3$ soit résidu biquadratique de A. Ces conditions sont loin d'être suffisantes; mais elles permettent déjà de montrer dans une foule de cas l'impossibilité de l'équation (1) en nombres entiers. Supposons par exemple $A = 5$. Pour que l'équation soit possible il faut que le produit $-BC^3$ soit de la forme $5l + 1$; si ce produit est de l'un des trois formes $5l + 2$, $5l + 3$ ou $5l + 4$ le problème proposé est impossible. Ainsi lorsque, après avoir pris $A = 5$, on égale B et C à des nombres entiers, premiers entre eux ainsi qu'avec 5, les trois quarts des équations

obtenues sont d'une impossibilité que la seule considération du module 5 rend immédiatement manifeste. Or sur le quatrième quart il faut encore rejeter toutes celles où les produits 5 B, 5 C ne sont pas résidus quadratiques de C et de B, respectivement. Le nombre des équations qui resteront à examiner, après ces exclusions, n'est qu'une fraction minime du nombre total.

On ne doit pas être étonné que l'équation (1) soit le plus souvent impossible malgré la présence de trois inconnues qu'elle renferme; car, ainsi que Libri l'a fait remarquer depuis long-temps, la condition que les trois nombres u, x, y soient entiers peut être remplacée par trois équations, de sorte que le problème proposé se trouve ramené à celui de trouver trois nombres propres à vérifier quatre équations, savoir l'équation (1) et les trois équations

$$\sin \pi u = 0 \,,\ \sin \pi x = 0 \,,\ \sin \pi y = 0.$$

Comme les équations sont en nombre supérieur à celui des inconnues, elles établissent une relation entre les coefficients A, B, C. Si les conditions qui résultent de cette relation sont remplies, il peut exister une suite indéfinie de solutions, parce que les trois dernières équations admettent elles-mêmes une infinité de solutions.

I. De l'équation $u^2 = 3y^4 - 2x^4$.

3. Si nous désignons par θ le plus grand diviseur commun des deux nombres x et y, le nombre u est divisible par θ^2, et en divisant par θ^4 on obtient une équation de même forme, dans laquelle x, y et u sont des nombres entiers, premiers entre eux deux à deux. Ainsi toutes les solutions de l'équation proposée peuvent se déduire de celles où les nombres x, y, u sont premiers entre eux en multipliant x et y par un nombre entier quelconque θ et u par θ^2, c'est pourquoi nous supposerons x, y et u premiers entre eux deux à deux.

D'après le théorème V de mon Mémoire sur les nombres complexes $a + b\sqrt{-c}$ (*Journal de M. Resal*, T. I, p. 330), toutes les solutions de l'équation

$$(1)\quad u^2 + 2(x^2)^2 = 3y^4$$

en nombres entiers et premiers entre eux peuvent se déduire des formules

$$y = p^2 + 2q^2,\ \pm u \pm x^2\sqrt{-2} = (1 + \sqrt{-2})(p + q\sqrt{-2})^4,$$

en donnant à p et q des valeurs entières et premières entre elles, d'où résultent pour y des valeurs impaires. On aura donc

$$\pm u = p^4 - 12 p^2 q^2 + 4 q^4 - 8 p q (p^2 - 2 q^2)$$

$$(2)\quad x^2 = p^4 - 12 p^2 q^2 + 4 q^4 + 4 p q (p^2 - 2 q^2);$$

nous omettons l'équation qu'on obtiendrait en prenant x^2 avec le signe $-$, parce que son impossibilité est rendue manifeste par la considération du module 4. L'équation (2) peut s'écrire de la manière suivante;

$$x^2 = (p^2 + 2 p q - 2 q^2)^2 - 12 p^2 q^2,$$

$$(3)\quad (p^2 + 2 p q - 2 q^2)^2 = x^2 + 3 (2 p q)^2.$$

Or le théorème III du Mémoire cité sur les nombres complexes $a + b\sqrt{-c}$, (p. 335) nous apprend que la manière la plus générale de résoudre l'équation (3) en nombres entiers et premiers entre eux, puisque p est impair, est de poser

$$p^2 + 2 p q - 2 q^2 = s^2 + 3 t^2,$$

$$\pm x \pm 2 p q \sqrt{-3} = (s \pm t \sqrt{-3})^2 = s^2 - 3 t^2 \pm 2 s t \sqrt{-3}$$

$$\pm x = s^2 - 3 t^2,\ p q = st.$$

La solution la plus générale de la dernière équation est donnée par les formules $p = \lambda f$, $q = \mu g$, $s = \lambda \mu$, $t = f g$, et comme les deux nombres p, q sont premiers entre eux ainsi que les deux nombres s, t, les quatre nombres λ, μ, f, g sont premiers entre eux deux à deux. En substituant ces expressions de p, q, r, s dans les formules précédentes on trouve que toutes les solutions de l'équation (1), en nombres entiers et premiers entre eux, sont déterminées par les formules

$$(A)\quad \left| \begin{array}{l} x = \lambda^2 \mu^2 - 3 f^2 g^2, \\ y = \lambda^2 f^2 + 2 \mu^2 g^2, \\ u = (\lambda^2 f^2 - 4 \lambda \mu f g - 2 \mu^2 g^2)^2 - 24 \lambda^2 \mu^2 f^2 g^2 = x^2 - 12 \lambda \mu f g (\lambda^2 f^2 - 2 \mu^2 g^2) \end{array} \right.$$

dans lesquelles λ, μ, f et g désignent quatre nombres entiers, premiers entre eux deux à deux, assujétis à vérifier l'équation

$$(4)\quad (\lambda^2 - 3 g^2) f^2 + 2 \lambda \mu g . f - \mu^2 (\lambda^2 + 2 g^2) = 0;$$

de sorte que le problème proposé se trouve ramené à celui de résoudre cette dernière équation.

4. Or en la résolvant successivement par rapport à f et par rapport à g on en déduit les deux formules suivantes

$$(B)\left|\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{f}{\mu} = \dfrac{-\lambda g \pm \sqrt{\lambda^4 - 6 g^4}}{\lambda^2 - 3 g^2}, \\[2ex] 2)\ \dfrac{g}{\lambda} = \dfrac{f\mu \pm \sqrt{3 f^4 - 2 \mu^4}}{3 f^2 + 2 \mu^2}. \end{array}\right.$$

La seconde de ces formules montre que toute solution de l'équation proposée se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres, f, μ; du moins tant qu'elle est elle-même formée par des nombres supérieurs à l'unité; car si l'on a $x = y = u = 1$ on voit que les formules (A) ne sont possibles qu'en faisant $g = o$, et en réduisant à l'unité les trois autres nombres, de sorte que l'on retombe sur la même solution. Si la nouvelle solution f, μ est formée de nombres supérieurs à l'unité, on la ramènera par la même analyse à une autre solution en nombres moindres, et ainsi de suite; comme cette suite de nombres décroissants ne peut pas se prolonger indéfiniment, on arrivera nécessairement à la solution irréductible $f = 1$, $\mu = 1$. Donc inversement en partant de cette solution évidente et en remontant successivement aux solutions composées de nombres plus grands, par l'emploi répété des formules (B) et (A), on obtiendra nécessairement toutes les solutions possibles de l'équation proposée.

5. Les deux valeurs du rapport $\frac{g}{\lambda}$ qui correspondent à une même solution f, μ, ont pour produit $\frac{\mu^2 - f^2}{3f^2 + 2\mu^2}$; il en résulte que la formule B, 2, n'exprime pas ces valeurs sous la forme la plus simple, puisqu'elle leur donne à chacune un dénominateur $3f^2 + 2\mu^2$, égal au produit des dénominateurs des deux fractions réduites. Ainsi pour calculer successivement les diverses solutions de l'équation proposée, à partir de la solution $x = y = u = 1$, on commencera par réduire à leur plus simple expression les deux valeurs du rapport $\frac{g}{\lambda}$ déterminées par la formule (B), 2); puis combinant les deux termes de chacune de ces fractions avec les valeurs de f et de μ qui l'ont fournie on calculera deux nouvelles solutions x, y, u, à l'aide des formules (A).

La solution $f = \mu = 1$ donne $g : \lambda = (1 \pm 1) : 5$; l'une de ces valeurs est nulle et l'autre égale à $\frac{2}{5}$. La première est inutile, parce qu'elle conduit à la solution d'où l'on est parti, $x = y = u = 1$. En associant les valeurs $g = 2$, $\lambda = 5$ avec $f = \mu = 1$, on déduit des équations (A) $x = 13$, $y = 33$, $u = 1871$. Qu'on substitue les valeurs $f = 13$, $\mu = 33$, dans l'équation (B), on trouvera

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{13.\,33 \pm 1\,8\,7\,1}{3\,(33)^2 + 2\,(13)^2} = \frac{4\,6\,0}{7\,2\,1} \text{ ou } \frac{-2}{5}.$$

Le système $f = 13$, $\mu = 33$, $g = -2$, $\lambda = 5$ donne, par les formules (A),

$$x = -8843,\ y = 285\,77,\ u = 15101\ 40689;$$

avec le système $f = 13$, $\mu = 33$, $g = 460$, $\lambda = 721$, on obtient la solution

$$x = 6034\ 44071,\ y = 6376\,27649.$$

6. On peut aussi procéder d'une autre manière, sans recourir aux équations (A). Si l'on pose $\frac{f}{\mu} = \xi$, $\frac{g}{\lambda} = \theta$, les équations (4) et (B) deviendront respectivement

$$(5)\quad \begin{cases} (3\,\theta^2 - 1)\,\xi^2 - 2\,\theta.\,\xi + (2\,\theta^2 + 1) = 0 \\ (3\,\xi^2 + 2)\,\theta^2 - 2\,\xi.\,\theta - (\xi^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$(6)\quad \xi = \frac{\theta \pm \sqrt{1 - 6\,\theta^4}}{1 - 3\,\theta^2},$$

$$(7)\quad \theta = \frac{\xi \pm \sqrt{3\,\xi^4 - 2}}{3\,\xi^2 + 2}.$$

La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée au problème de trouver tous les systèmes de valeurs rationnelles de ξ et de θ propres à vérifier l'équation (5). Les valeurs de ξ donnent à l'expression $\sqrt{3\,\xi^4 - 2}$ une valeur rationnelle $(3\,\xi^2 + 2)\,\theta - \xi$, de sorte que, en égalant l'une de ces valeurs au rapport de deux nombres entiers et premiers entre eux $y : x$, on obtient une solution de l'équation $3\,y^4 - 2\,x^4 = u^2$. Or à chacune de ces valeurs de ξ correspondent, par l'équation (5), deux valeurs de θ qui rendent rationnelle l'expression $\sqrt{1 - 6\,\theta^4}$. Au moyen de ces valeurs de θ on pourra calculer de nouvelles valeurs de ξ, à l'aide de la formule (6); puis

de nouvelles valeurs de θ par la formule (7), et ainsi de suite, alternativement.

En faisant $\xi = 1$ dans l'équation (5) on trouve $\theta = 0$, $\theta = \frac{2}{5}$. Chacune de de ces valeurs de θ correspond à deux valeurs de ξ, dont l'une est nécessairement la valeur $\xi = 1$ qui a déterminé ces valeurs de θ. Une seule des deux valeurs de ξ données par la formule (6) peut nous être utile. Mais comment distinguer le signe qu'il faut choisir pour l'obtenir? On évite cette difficulté en employant la formule qui exprime en fonction de μ la somme des deux valeurs de ξ qui lui correspondent, savoir

$$(a) \quad \xi' + \xi = \frac{2\theta}{3\theta^2 - 1};$$

en faisant $\xi = 1$, $\theta = \frac{2}{5}$ on trouve $\xi' = \frac{20}{12-25} - 1 = -\frac{33}{13}$. et cette valeur de ξ correspond à deux valeurs de θ; l'une, $\frac{2}{5}$, est celle que nous venons d'employer; l'autre se déduira de la formule

$$(b) \quad \theta' + \theta = \frac{2\xi}{3\xi^2 + 2},$$

en y remplaçant θ et ξ par $\frac{2}{5}$ et $-\frac{33}{13}$, ce qui donnera $\theta' = -\frac{460}{721}$.

On formera de cette manière une suite

$$(c) \quad \theta = 0,\ \xi_1 = 1,\ \frac{2}{5},\ -\frac{33}{13},\ -\frac{460}{721},\ \xi_3,\ \theta_2,\ \xi_4, \ldots$$

dans laquelle chaque valeur de ξ se trouve comprise entre les deux valeurs de θ qui peuvent lui être associées de manière à former deux solutions de l'équation (5).

Cette méthode est précisément celle qui est exposée dans le Mémoire posthume d'Euler. La fonction $\sqrt{\varphi(\xi)} = \sqrt{3\xi^4 - 2}$, est égalée par l'équation (7) à l'expression rationnelle $(3\xi^2 + 2)\theta - \xi$; de sorte qu'en prenant

$$P = -\xi,\ q = 3\xi^2 + 2,\ R = \xi^2 - 1,$$

nous avons les équations d'Euler

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(\xi) = P^2 + qR, \\ \sqrt{\varphi(\gamma)} = P + q\theta, \\ q\theta^2 + 2P\theta - R = 0, \end{array}\right.$$

dont la dernière coïncide avec l'équation (5).

Nous pourrions partir de la formule (a) en y faisant $\xi = 1$, $\theta = 0$, pour obtenir la seconde suite de solutions signalées par Euler; mais dans le cas actuel la suite ainsi obtenue ne différerait que par les signes de celle que nous avons indiquée ci-dessus; il est donc inutile de s'en occuper.

7. La méthode que nous venons d'exposer fait-elle connaître, à l'aide des valeurs de ξ, toutes les solutions de l'équation proposée en nombres entiers et premiers entre eux? Cela n'est pas évident; pour que cela eût lieu il faudrait que les valeurs de ξ comprises dans la suite (c) fussent égales aux diverses valeurs du rapport $\frac{y}{x}$ déterminées par les formules (A) et (B); mais, quoique cet accord existe pour les premiers termes, rien ne démontre qu'il se continuera indéfiniment.

Dans la même suite (c) les valeurs de l'inconnue auxiliaire θ rendent rationnelle l'expression $\sqrt{1 - 6\theta^4}$, de sorte qu'elles font connaître autant de solutions de l'équation

$$(8)\quad X^4 - 6Y^4 = Z^2.$$

Cette équation admet donc les solutions

$$X = 5,\ Y = 2,$$

$$X = 721,\ Y = 460,\ \text{etc.}$$

Si la méthode d'Euler faisait connaître toutes les valeurs de ξ qui rendent rationnelle l'expression $\sqrt{3\xi^4 - 2}$, elle donnerait toutes les valeurs de θ, qui déterminent une valeur rationnelle pour $\sqrt{1 - 6\theta^4}$, et par conséquent toutes les solutions de l'équation (8); car à chaque valeur de θ, jouissant de la propriété énoncée, correspondent deux valeurs de ξ; si donc toutes les valeurs de ξ se trouvent dans la suite (c), on y trouvera nécessairement aussi toutes les valeurs possibles de θ. Quoi qu'il en soit de ce point nous sommes assurés d'obtenir toutes les solutions de l'équation (8) par l'emploi des formules A et B, 2, puisque nous sommes certains de ne laisser échapper ainsi aucune solution de l'équation (1) et, conséquemment, aucune valeur convenable de ξ.

Il est utile de voir avec quelle rapidité croissent les nombres qui forment les solutions successives de l'équation (1). Désignons par $\frac{g}{\lambda}$, $\frac{g_1}{\lambda_1}$ les deux racines de l'équation (4), qui correspondent à une solution de l'é-

quation proposée $x = \mu, y = f$; soient y, y_1 les deux valeurs de y qu'on en déduit par la formule (A)

$$y = \lambda^2 f^2 + 2\mu^2 g^2.$$

On aura

$$y y_1 = \lambda^2 \lambda_1^2 f^4 + 4 g^2 g_1^2 \mu^4 + 2 f^2 \mu^2 (\lambda^2 g_1^2 + \lambda_1^2 g^2).$$

D'ailleurs on tire de la formule (4)

$$\frac{g}{\lambda} \frac{g_1}{\lambda_1} = \frac{\mu^2 - f^2}{3 f^2 + 2\mu^2};$$

le plus grand diviseur commun des deux termes de cette fraction ne peut être que 1 ou 5, puisque f et μ sont premiers entre eux; on a donc

$$g g_1 \geqq \frac{\mu^2 - f^2}{5}, \lambda\lambda_1 \geqq \frac{3 f^2 + 2\mu^2}{5},$$

et *à fortiori*

$$y y_1 > \frac{(3 f^2 + 2\mu^2)^2 f^4}{25}.$$

Ainsi les deux valeurs de y que l'on peut déduire d'une même solution $y = f$, $x = \mu$, forment un produit du huitième ordre de grandeur par rapport à f et à μ; de plus la plus petite des deux valeurs est d'un ordre de grandeur supérieur au second.

8. Nous pouvons appliquer à l'équation (8) la méthode de décomposition en facteurs. Comme Y est nécessairement pair nous poserons $Y = 2pq$,

$$X^2 \pm Z = 2p^4 \text{ ou } 6p^4, \; X^2 \mp Z = 3.\,16 q^4 \text{ ou } 16 q^4,$$

$$X^2 = p^4 + 24 q^4, \text{ ou } X^2 = 3p^4 + 8q^4.$$

Cette dernière équation étant impossible, les solutions de l'équation (3) sont toutes exprimées par les formules

$$X^2 = p^4 + 24 q^4, \; Y = 2pq, \; \pm Z = p^4 - 24 q^4.$$

La première de ces équations peut se décomposer de deux manières différentes :

$$X \pm p^2 = 2m^4 \text{ ou } 6m^4, \; X \mp p^2 = 12 n^4 \text{ ou } 4 n^4;$$

$$p^2 = m^4 - 6n^4, \text{ ou } p^2 = 3m^4 - 2n^4;$$

le signe à été déterminé par la considération du module 3.

On déduit de là deux groupes différents de formules pour exprimer les solutions de l'équation (8), savoir

$$\begin{cases} X = m^4 + 6\,n^4, \quad Y = 2\,mn\,\sqrt{m^4 - 6\,n^4}, \quad Z = (m^4 - 6\,n^4)^2 - 24\,m^4\,n^4, \\ X = 3\,m^4 + 2\,n^4, \quad Y = 2\,mn\,\sqrt{3\,m^4 - 2\,n^4}, \quad Z = (3\,m^4 - 2\,n^4)^2 - 24\,m^4\,n^4. \end{cases}$$

On voit par ces formules que dans toute solution de l'équation (8) Y est toujours le double d'un produit de trois facteurs qui satisfont où bien à la même équation, ou bien à l'équation (2).

L'emploi de ces formules est inutile pour la résolution de l'équation (8), car elles exigent qu'on connaisse les solutions de l'équation (2), or nous avons vu que le calcul de ces dernières solutions fait connaître toutes celles de l'équation (8). Mais l'analyse qui nous a donné ces formules montre que l'on peut aussi obtenir toutes les solutions de l'équation intermédiaire

$$(9) \quad X^2 = p^4 + 24\,q^4.$$

En résumé nous avons trois équations biquadratiques, dont nous sommes assurés de trouver toutes les solutions possibles; les équations (2) et (8) se résolvent en même temps par l'application répétée des formules A et B, 2; et au moyen de ces solutions on exprime par les formules

$$\begin{cases} X = m^4 + 6\,n^4, \quad p^2 = m^4 - 6\,n^4, \quad q = mn, \\ X = 3\,m^4 + 2\,n^4, \quad p^2 = 3\,m^4 - 2\,n^4; \quad q = mn, \end{cases}$$

toutes les solutions de l'équation (9).

II. Sur l'équation $x^4 + 7\,y^4 = 8\,u^2$.

9. Cette équation est comprise dans une autre plus générale

$$(1) \quad A^2 + 7\,B^2 = 8\,C^2,$$

d'où l'on peut la déduire en posant $A = x^2$, $B = y^2$; c'est pourquoi nous résoudrons d'abord l'équation (1). Pour cela, retranchons en l'identité $B^2 + 7\,B^2 = 8\,B^2$, ce qui nous donne

$$A^2 - B^2 = 8\,(C^2 - B^2),$$

et posons

$$(a)\ A - B = m\ (C + B),$$

de sorte que l'équation obtenue divisée par $C + B$, devient

$$(b)\ m\ (A + B) = 8\,(C - B)\,;$$

on déduit des deux équations (a) et (b)

$$\frac{A}{(m+8)^2 - 56} = \frac{B}{8 - m^2} = \frac{C}{(m+1)^2 + 7}.$$

Comme les nombres, A, B, C sont entiers, le nombre m est rationnel et conséquemment nous pouvons poser $m + 1 = \frac{p}{q}$, en désignant par p et q deux nombres entiers et premiers entre eux, de sorte que les dernières équations prendront la forme suivante :

$$(c)\ \frac{A}{(p + 7q)^2 - 56\,q^2} = \frac{B}{8\,q^2 - (p - q)^2} = \frac{C}{p^2 + 7\,q^2}$$

Ainsi toute solution (A, B, C) de l'équation (1) vérifie nécessairement les équations (c). On peut donc déduire de ces dernières équations toutes les solutions de l'équation (1); il suffit d'égaler de toutes les manières possibles p et q à des nombres entiers et premiers entre eux.

Nous supposerons l'équation (1) divisée par le plus grand diviseur commun de A^2 et de B^2. Les nombres désignés par A, B, C sont alors premiers entre eux deux à deux. Désignant donc par μ le plus grand diviseur commun des dénominatenrs des formules (c), nous pouvons poser

$$(2)\ \mu\,A = (p + 7\,q)^2 - 56\,q^2,\ \mu\,B = (p - q)^2 - 8\,q^2,\ \mu\,C = p^2 + 7\,q^2,$$

en changeant le signe de B, ce qui est indifférent.

Or le nombre μ est diviseur de 16. 7, de sorte qu'il se réduit à 1 lorsqu'on assujétit les nombres p et q à donner à la formule $p^2 + 7\,q^2$ des valeurs impaires et non divisible par 7. En effet les équations (2) donnent les congruences

$$p^2 + 14\,p\,q - 7\,q^2 \equiv 0,\ p^2 - 2\,p\,q - 7\,q^2 \equiv 0,$$

$$p^2 + 7\,q^2 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

d'où l'on déduit, en retranchant la seconde congruence de la première,

$$16\, p\, q \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Dailleurs p et q étant premiers entre eux le produit $p\,q$ ne peut avoir avec $p^2 + 7\,q^2$ aucun diviseur commun autre que 7; on peut donc conclure de la dernière congruence que le nombre μ est toujours diviseur du produit 16. 7, et qu'il se réduit à l'unité lorsqu'il doit être impair et premier avec 7.

10. Appliquons ces résultats à l'équation proposée

$$(3)\quad x^4 + 7\,y^4 = 8\,u^2,$$

Nous supposons immédiatement x, y et u premiers entre eux, par ce que si cette condition n'était pas remplie, on la vérifierait en divisant les trois termes de l'équation par le plus grand diviseur commun des deux nombres x^4 et y^4. Le nombre u est alors impair et premier avec 7; il est premier avec 7, par ce que, autrement, il aurait un diviseur commun avec x; il est impair parce que le premier membre de l'équation (3) est de la forme $16\,l + 8$. Il résulte de là que tontes les valeurs de u propres à vérifier l'équation (3) se déduisent de la formule $u = p^2 + 7\,q^2$ en donnant à p et à q des valeurs entières, premières entre elles et remplissant la double condition de donner à u des valeurs impaires et non divisibles par 7. Si donc nous appliquons à notre équation les résultats obtenus dans le numéro précédent nous devons faire $\mu = 1$,

$$(4)\quad \begin{cases} x^2 = (p + 7\,q)^2 - 56\,q^2,\ y^2 = (p - q)^2 - 8\,q^2 \\ u = p^2 + 7\,q^2. \end{cases}$$

La deuxième de ces équations peut se mettre sous la forme

$$(p - q)^2 = y^2 + 2\,(2\,q)^2.$$

et l'on conclut du théorème III de mon Mémoire sur les nombres complexes $a + b\sqrt{-c}$ (Journal de M. Resal, t. I, p. 325) qu'on la résout complètement par les formules

$$\pm (p - q) = m^2 + 2\,n^2,\ \pm y \pm 2\,q\sqrt{-2} = (m + n\sqrt{-2})^2$$

$$\pm y = m^2 - 2\,n^2,\ \pm q = m\,n.$$

Comme les formules (4) ne changent pas quand p et q changent en même temps de signes, comme en outre le signe de y est indifférent, nous n'enlevons rien à la généralité de la solution en prenant

$$p - q = m^2 + 2n^2,\ y = m^2 - 2n^2,\ q = mn,$$

de sorte que les formules (4) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(5)\quad \begin{cases} x^2 = (m^2 + 8mn + 2n^2)^2 - 56\, m^2 n^2, \\ y = m^2 - 2n^2,\ u = (m^2 + mn + 2n^2)^2 + 7m^2 n^2 \end{cases}$$

On déduit de la première de ces équations, par la méthode de décomposition en facteurs,

$$\pm (m^2 + 8mn + 2n^2) \pm x = 2s^2 \text{ ou } 14s^2,$$
$$\pm (m^2 + 8mn + 2n^2) \pm x = 28t^2 \text{ ou } 4t^2,\ mn = st,$$
$$\pm (m^2 + 8mn + 2n^2) = s^2 + 14t^2 \text{ ou } = 7s^2 + 2t^2.$$

Le nombre m étant impair s doit l'être aussi, de sorte que l'on peut conclure de la formule $mn = st$ que les deux nombres n et t sont en même temps pairs ou impairs. Il en résulte, par la considération du module 4, que l'on doit prendre le signe supérieur dans la première décomposition et le signe inférieur dans la seconde, et qu'ainsi on devra vérifier l'un des deux systèmes

$$(A)\quad \left| \begin{array}{l} 1)\ mn = st,\ m^2 + 8mn + 2n^2 = s^2 + 14t^2,\ x = s^2 - 14t^2, \\ 2)\ mn = st,\ m^2 + 8mn + 2n^2 = -7s^2 - 2t^2,\ x = 7s^2 - 2t^2. \end{array} \right.$$

11. Or l'équation $mn = st$ qui figure dans ces deux systèmes est résolue en nombres entiers par les formules

$$(6)\quad m = \lambda\mu,\ n = fg.\ s = \lambda f,\ t = \mu g\ ;$$

dans lequelles λ, μ, f, g désignent des nombres entiers assujétis à l'unique condition d'être premiers entre eux deux à deux; condition qui résulte de ce que les deux nombres m et n sont premiers entre eux ainsi que les deux nombres s et t. Le système A, 2) exige donc que l'on vérifie en nombres entiers l'équation

$$\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu fg + 2f^2g^2 + 7\lambda^2 f^2 + 2\mu^2 g^2 = 0;$$

ce qui est impossible, car en la divisant par μ^2, et en la résolvant par rapport au quotient $\frac{f}{\mu}$ on en déduit la formule

$$\frac{f}{\mu} = \frac{-4\lambda g \pm \sqrt{-4g^4 - 7\lambda^4}}{2g^2 + 7\lambda^2}$$

par laquelle est rendue manifeste l'impossibilité de vérifier en nombres réels l'équation considérée. Le système A, 1) est donc seul admissible, et notre problème se trouve ramené à celui de résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'équation

$$(7)\quad \lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu f g + 2f^2 g^2 - \lambda^2 f^2 - 14\mu^2 g^2 = 0.$$

Si l'on résout successivement cette équation par rapport à $\frac{f}{\mu}$, et à $\frac{g}{\lambda}$ on en déduit les deux formules

$$(B)\quad \begin{cases} 1)\ \dfrac{f}{\mu} = \dfrac{-4\lambda g \pm \sqrt{\lambda^4 + 28 g^4}}{2g^2 - \lambda^2}, \\[2ex] 2)\ \dfrac{g}{\lambda} = \dfrac{-4 f\mu \pm \sqrt{2f^4 + 14\mu^4}}{2f^2 - 14\mu^2}, \end{cases}$$

dont la seconde montre que toute solution de l'équation proposée en nombres entiers et supérieurs à l'unité se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres. Elle détermine en effet une valeur rationnelle pour le radical $\sqrt{2f^4 + 14\mu^4}$; or f et μ étant des nombres entiers et premiers entre eux, cette valeur rationelle doit être entière et divisible par 4; de sorte que l'on a

$$(3)\quad f^4 + 7\mu^4 = 8h^2,$$

h désignant un nombre impair.

12. Inversement, de toute solution $x = f, y = \mu, u = h$ de l'équation (3). On peut en déduire deux autres en nombres plus grands. En effet, on déduit d'abord de la formule B, 2)

$$(8)\quad \frac{g}{\lambda} = \frac{2(-f\mu \pm h)}{f^2 - 7\lambda^2}$$

En prenant successivement le signe + et le signe −, puis réduisant la fraction à sa plus simple expression, on obtient deux systèmes de valeurs de g et de λ, qui, combinés avec les nombres f et μ donnent deux solutions nouvelles de l'équation (3), exprimées par les formules

$$(9)\quad \left| \begin{array}{l} x = \lambda^2 f^2 - 14\,\mu^2 g^2\,,\ y = \lambda^2 \mu^2 - 2 f^2 g^2, \\ u = (\lambda^2 \mu^2 + \lambda \mu f g + 2 f^2 g^2)^2 + 7\,\lambda^2 \mu^2 f^2 g^2. \end{array} \right.$$

On peut exprimer directement les deux nouvelles solutions au moyen de celle dont elles dérivent; il suffit pour cela de remplacer dans les formules (9) g et λ par les nombres qui leur sont proportionnels, $-2 f \mu \pm 2\,h, f^2 - 7\,\mu^2$. Si après cette substitution on remplace f, μ, h par x, y, u, et qu'on désigne par x_1, y_1, u_1, les nombres qui forment la solution nouvelle, on trouve

$$(10)\quad \left| \begin{array}{l} x_1 = x^2\,(x^2 - 7\,y^2)^2 - 56\,y^2\,(x y \pm u)^2 \\ y_1 = y^2\,(x^2 - 7\,y^2)^2 - 8\,x^2\,(x y \pm u)^2 \\ u_1 = \sqrt{\dfrac{x_1^4 + 7\,y_1^4}{8}}. \end{array} \right.$$

Au moyen de la solution évidente $x = y = u = 1$, on obtient les deux solutions $x_1 = y_1 = 36$; $x_1 = -188$; $y_1 = 4$, lesquelles, débarrassées des facteurs communs se réduisent à la solution primitive et à la solution nouvelle $x_1 = -47$, $y_1 = 1$. Cette solution $x = 47$, $y = 1$, $u = 781$, substituée dans les formules (10) en donne deux nouvelles, qui, débarrassées des divisieurs commun et abstraction faite des signes, sont

$$x_1 = 19\,825\,, \qquad y_1 = 17\,663,$$

$$x_2 = 2963\ 99685\,,\ y^2 = 3362\ 10\,07.$$

Chacune de ces deux solutions en donnera deux autres, et ainsi de suite indéfiniment. Toutefois l'emploi des formules (10) a l'inconvénient d'exiger des calculs inutiles que l'on évite en faisant usage des formules (8) et (9). Ainsi les valeurs de x_1 et de y_1, calculées par les formules (10) offrent un diviseur commun égal à 134661, tandis qu'on obtient cette solution sous la forme la plus simple, lorsqu'on calcule d'abord le rapport $\frac{g}{\lambda}$ par la for-

mule (8), ce qui donne $g = 2$, $\lambda = 3$, et qu'on associe dans les formules (9) ces valeurs de g et de λ avec les valeurs 47 et 1 de f et de μ.

13. L'emploi répété soit des formules (8) et (9) soit des formules (10), à partir de la solution évidente $x = y = u = 1$, fait connaître toutes les solutions possibles de l'équation proposée, rangées suivant l'ordre croissant des valeurs de u. En effet, nous avons vu (n. 11) que toute solutions de cette équation, en nombres supérieurs à l'unité, se ramène à une autre solution en nombres moindres, à l'aide des formules (5), (6) et (7). Si les nombres qui forment cette solution sont encore supérieurs à l'unité, on pourra la ramener à une autre solution en nombres moindres, et ainsi de suite, de sorte qu'on arrivera nécessairement à la solution $x = y = u = 1$. Or les formules (8) et (9). ainsi que les formules (10), donnent successivement, dans un ordre inverse; toutes les solutions de l'équation proposée, qui peuvent se ramener à la solution $x = y = u = 1$, par l'emploi répété des formules (5), (6) et (7); elles donnent donc successivement toutes les solutions possibles de cette équation.

On obtient aussi par ce moyen une solution complète de l'équation

$$(11)\quad x^4 + 28\,y^4 = z^2$$

On voit en effet par la formule B, 1), que si l'on vérifie l'équation (11) en faisant $x = \lambda$, $y = g$, on obtient deux systèmes de valeurs de f et de μ propres à vérifier l'équation (3). Comme chacun de ces systèmes, combiné avec les valeurs considérées λ et g, forme une solution de l'équation (7), si on le substitue dans cette équation aux lettres f et μ, on en déduira deux valeurs du rapport $g : \lambda$, dont l'une sera nécessairement égale au rapport des deux valeurs considérées. Or nous pouvons déterminer toutes les valeurs de f et de μ propres à vérifier l'equation (7), puisque nous pouvons trouver, ainsi que nous venons de le voir, toutes les solution de l'équation (3); nous pouvons donc en déduire toutes les valeurs de g et de λ propres à vérifier l'équation (7) et conséquemment toutes les solutions possibles de l'équation (11).

14. Au lieu d'employer successivement les formules (8) et (9), on peut, procéder d'une autre manière, semblable à celle que l'on trouve dans le Mémoire posthume d'Euler, que nous avons cité plus haut (n.° 1).

Posons $\frac{f}{\mu} = \xi$, $\frac{g}{\lambda} = \eta$. Les formules (7) et B deviendront

$$(C)\quad \left|\begin{array}{ll} 1) & \eta^2 - 1)\,\xi^2 + 8\,\eta.\,\xi - (14\,\eta^2 - 1) = 0 \\[2ex] 2) & \xi = \dfrac{-4\,\eta \pm \sqrt{1 + 28\,\eta^4}}{2\,7^2 - 1}, \\[2ex] 3) & \eta = \dfrac{-4\,\xi \pm \sqrt{2\,\xi^4 + 14}}{2\,\xi^2 - 14}. \end{array}\right.$$

La résolution des équations (3) et (11) se trouve ainsi ramenée à la recherche des solutions rationnelles de l'équation C, 1 : car les valeurs rationnelles de ξ et de η qui satisfont à cette équation rendent respectivement rationnelles les deux expressions $\sqrt{2\,\xi^4 + 14}$, $\sqrt{1 + 28\,\eta^4}$, de sorte qu'en posant $\xi = \frac{x}{y}$ on a des solutions de l'équation (3) et en posant $\eta = \frac{y}{x}$ on a des solutions de l'équation (11). La solution évidente $\xi = 1$ donne dans l'équation C, 3, $\eta = 0$ et $\eta = \frac{2}{3}$. Cette valeur de η substituée dans l'équation C, 2 donne $\xi = 1$ et $\xi = 47$; puis au moyen de cette valeur de ξ on trouvera deux valeurs de η dont l'une sera $\eta = \frac{2}{3}$, et ainsi de suite. On pourra donc former la suite

$$(D)\quad 0\,,\ 1\,,\ \tfrac{2}{3}\,,\ 47\,,\ \eta_1\,,\ \xi_2\,,\ \eta_2\,,\ \xi_3\,,$$

dans laquelle chaque valeur rationnelle de ξ, qui correspond à une solution de l'équation (3) sera placée entre les deux valeurs rationnelles de η que l'on en déduit par les formules C, et où, réciproquement, chaque valeur rationelle de η se trouvera entre les deux valeurs de ξ qu'on peut lui associer dans l'équation auxiliaire C, 1. On pourra les calculer successivement à l'aide des formules

$$(E)\quad \left|\begin{array}{l} \xi' + \xi = \dfrac{-8\,\eta}{2\,\eta^2 - 1}, \\[2ex] \eta' + \eta = \dfrac{-4\,\xi}{\xi^2 - 7}. \end{array}\right.$$

On trouve ainsi, en continuant le calcul de la suite (D), $\eta_1 = -\frac{276}{867}$, $\xi_2 = -\frac{19825}{17663}$, etc. Les valeurs de ξ déterminent pour l'équation (3) les solutions

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1\,, & y_0 = 1\,, \\ x_1 = 47\,, & y_1 = 1\,, \\ x^2 = 19825\,, & y_2 = 17763\,, \ldots \end{array}$$

et donneront $g = 4$, $f = -h$. Les autres formules prendront par conséquent la forme suivante :

$$(F)\quad \left|\begin{array}{ll} 1) & h\,(x_1^2 - 1) + 4\,x_1 = \varepsilon_1 \sqrt{2\,x_1^4 + 14}\,,\ \varepsilon_1 = \pm 1. \\ 2) & x + x_1 = \dfrac{8\,h}{2 - h^2} \\ 3) & h\,(x^2 - 1) + 4\,x = \varepsilon \sqrt{2\,x^4 + 14}. \end{array}\right.$$

En faisant $x_1 = 47$, $\varepsilon_1 = 1$ on trouve $h = \frac{867}{276}$, $x = \frac{-19825}{17668}$. On pourra substituer cette valeur à x_1 dans les mêmes formules et l'on en déduira une nouvelle solution, et ainsi de suite.

Dans le calcul successif des diverses valeurs de x, une seule de deux valeurs de ε_1 est utile; l'autre donnerait une solution déjà trouvée. Ainsi en prenant $x_1 = 47$, $\varepsilon_1 = -1$, on trouve $h = -\frac{2}{3}$, $x = 1$. Du reste il est facile de déterminer celle de ces deux valeurs qui correspond à une solution nouvelle; c'est $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, en designant par ε le facteur déterminé par la formule F, 3, dans le calcul de la solution substituée à x_1. Supposons en effet que l'on prenne $\varepsilon_1 = \varepsilon$, et désignons par h', x', ε' les valeurs de h, de x et de ε qui correspondent à cette hypothèse; la relation entre ces nouvelles valeurs et celles qui figurent dans les formules F. sera déterminée par les formules

$$\left|\begin{array}{l} h'\,(x^2 - 1) + 4\,x = \varepsilon \sqrt{2\,x^4 + 14}\,, \\ \qquad x' + x = \dfrac{8\,h'}{2 - h'^2}, \\ h'\,(x'^2 - 1) + 4\,x' = \varepsilon' \sqrt{2\,x'^4 + 14}. \end{array}\right.$$

En comparant la première de ces formules avec la formule F, 4, où x et ε ont les mêmes valeurs, on voit que $h' = h$, et l'on déduit ensuite des autres formules $x' = x_1$, $\varepsilon' = \varepsilon_1$. Ainsi pour trouver une solution nouvelle il faut prendre $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, ainsi que nous l'avons dit

16. On n'est pas assuré, en général. d'obtenir par la méthode posthume d'Euler toutes les solutions que l'on peut déduire de nos formules; car celles-ci correspondent à la multiplication de l'intégrale elliptique, tandis que les formules employées dans la méthode d'Euler correspondent à la

tandis que les valeurs de η donnent pour l'équation (11) les solutions

$$x = 1, \quad y = 2,$$

$$x_1 = 367, \quad y_1 = 276, \text{ etc.}$$

La seconde suite, indiquée par Euler, et qu'on obtient dans le cas actuel en prenant pour point de départ $\xi = 1$, $\eta = 0$, se déduit de la suite (D) par un simple changement de signes. Il est inutile de la considérer.

En procédant comme nous venons de l'indiquer on n'est pas assuré de trouver toutes les solutions de l'équation proposée; car la relation qui existe entre les valeurs successives de ξ, dans les formules E, n'est pas la même que celle qui résulte des formules (8) et (9) pour les valeurs successives du rapport $x : y$. Il peut donc arriver que la suite D ne renferme pas toutes les valeurs de ξ propres à vérifier la formule C, 1. Dans ce cas les formules (8) et (9) feront connaître des valeurs qui ne seront pas comprises dans la suite D; en les prenant comme solutions primitives de l'équation C, 1, nous formerons de nouvelles suites indéfinies de solutions.

15. On est amené à un calcul tout semblable à celui qui résulte des formules (E), lorsqu'on emploie les formules que j'ai données dans mon Mémoire sur la réduction des polinômes biquadratiques à des carrés (Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. XXIX, p. 211). Notre problème revient en effet à celui de trouver les valeurs rationnelles de x qui donnent à l'expression $\sqrt{2x^4 + 14}$ une valeur rationnelle. Nous avons deux solutions évidentes $x = 1$, $x = -1$; de sorte que nous pouvons appliquer les formules II qui donnent une troisième solution $x = 47$. Connaissant ainsi trois solutions nous pouvons appliquer les formules I pour en déduire successivement toutes les solutions qui correspondent à la multiplication de l'intégrale elliptique

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^4 + 14}}$$

par les nombres impairs successifs 5, 7, 9, etc. Pour cela nous ferons dans les formules citées $x_2 = -x_3 = 1$. $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$, de sorte que les deux premières formules deviendront

$$f + g + h = 4, \; f - g + h = -4,$$

transformation. Néammoins il est facile de démontrer que, dans le cas actuel, les deux systèmes de formules sont équivalents. Il suffit pour cela d'élever au carré les deux membres de l'équation F, 1, et de diviser par $x_1^2 - 1$: on trouve ainsi l'équation

$$(x_1^2 - 1)\ h^2 + 8\ h\ x_1 - (2\ x_2^4 - 14) = 0,$$

qui coïncide avec l'équation C, lorsq'on y remplace x_1 par $-\xi$ et h par $\frac{1}{\eta}$. Ainsi les valeurs de x obtenues par l'emploi de nos formules F sont, au signe près, les mêmes que celles de ξ dans les formules C et E; les valeurs de h sont les inverses de celles de η, et servent, comme celles-ci, à résoudre l'équation (11).

Sur l'équation $7\ x^4 \pm 2\ y^4 = 5\ u^2$.

17. Cette équation est impossible avec le signe supérieur, par ce qu'on en déduirait que 5 est résidu quadratique de 7; ce qui n'est pas. Il nous suffira donc de considérer l'équation

$$(1)\quad 7\ x^4 - 2\ y^4 = 5\ u^2.$$

qui admet la solution évidente $x = y = u = 1$. Pour trouver les autres nous retrancherons de l'équation (1) l'identité $7\ x^4 - 2\ x^4 = 5\ x^4$, ce qui nous donnera

$$2\ (x^4 - y^4) = 5\ (u^2 - x^4).$$

Or cette équation peut être remplacée par les deux suivantes

$$(a)\quad x^2 + y^2 = (u - x^2),.$$

$$(b)\quad 2\ m\ (x^2 - y^2) = 5\ (u + x^2),$$

dans lesquelles m désigne un nombre rationnel; car on retrouve cette équation par l'élimination de l'inconnue auxiliaire m. Or on déduit des équation (a) et (b) les formules suivantes:

$$\frac{x^2}{2\ m^2 + 5} = \frac{y^2}{2\ m^2 - 10\ m - 5} = \frac{u}{2\ m^2 + 4\ m - 5},$$

qui, lorsqu'on remplace m par $\frac{p}{q}$, deviennent

$$(C) \quad \frac{x^2}{2p^2+5q^2} = \frac{y^2}{2p^2-10pq-5q^2} = \frac{u}{2p^2+4pq-5q^2}.$$

Dans ces formules p et q désignent deux nombres entiers et premiers entre eux. De même nous pouvons supposer x, y et u premiers entre eux deux à deux; car l'équation (1) ne change pas de forme lorsqu'on la divise par la plus grand commun divisieur de x^4 et de y^4; or après cette division, les trois inconnues sont premières entre elles deux à deux. Si donc nous désignons par μ le plus grand diviseur commun des trois dénominateurs des formules (c) nous pouvons remplacer ces formules par les suivantes

$$(A) \left| \begin{array}{l} 1)\ \mu x^2 = 2p^2 + 5q^2, \\ 2)\ \mu y^2 = 2p^2 - 10pq + 5q^2, \\ 3)\ \mu u = 2p^2 + 4pq - 5q^2. \end{array} \right.$$

Nous démontrerons avant tout que le nombre μ ne peut avoir que l'une des trois valeurs 2, 5 ou 7. D'abord la première formule exige que μ soit positif et non-résidu quadratique de 5. D'un autre côté, en combinant par soustraction les deux autres formules, on en déduit.

$$14\,pq \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

De plus, comme p et q sont premiers entre eux, on conclut de l'équation $\mu x^2 = 2p^2 + 5q^2$, que 5 et 2 sont les seuls diviseurs communs que μ puisse avoir avec p et q, respectivement. En combinant ce résultat avec la dernière congruence nous concluons que μ est diviseur du nombre $14.5 = 70$. Les diviseurs positifs de ce nombre sont 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. Nous devons d'abord exclure 1 et 14, par ce qu'ils sont résidus quadratiques de 5, tandis que μ est non-résidu. Soit $\mu = 5\alpha$, $\alpha = 1, 2, 7$ ou 14. Comme p doit être multiple de 5, nous posons $p = 5p_1$, de sorte que l'équation A, 1, devient

$$\alpha x^2 = q^2 + 10p_1^2,$$

ce qui exclut immédiatement les valeurs 2 et 7 de α, par ce qu'elles ne sont pas des résidus quadratiques de 5. Si $\alpha = 14$ on doit faire $q = 2q_1$,

$$7x^2 = 2q_1^2 + 5p_1^2.$$

Mais en faisant $\mu = 70, p = 5 p_1, q = 2 q_1$ dans l'équation A, 2, elle se réduit à

$$7 y^2 = 5 p_1^2 - 10 p_1 q_1 - 2 q_1^2,$$

$$14 y^2 = 35 p_1^2 - (5 p_1 + 2 q_1)^2,$$

$$2 y^2 = 5 p_1^2 - 7 \left(\frac{5 p_1 - 2 q_1}{7}\right)^2.$$

La dernière formule étant impossible, puisque 10 est non-résidu quadratique de 7, nous concluons que l'hypothèse $\alpha = 14$ est également impossible, de sorte qu'il ne reste à examiner que les valeurs $\mu = 2$, 5 et 7 ainsi que nous l'avons annoncé.

18. Supposons $\mu = 5$, et conséquemment $p = 5 p_1$. L'équation A, 2, devient

$$y^2 = 10 p_1^2 - 10 p_1 q_1 - q_1^2 = 35 p_1^2 - (5 p_1 + q_1)^2,$$

et, comme en remontant à l'équation (1) on voit que y ne peut être multiple de 7 sans que les trois inconnues cessent d'être premières entre elles, on en déduirait cette conclusion fausse que 7 est diviseur de la formule $x^2 + g^2$; il faut donc rejeter l'hypothèse $\mu = 5$.

Or les deux valeurs $\mu = 2$, $\mu = 7$ conduisent à des formules équivalentes. Prenons d'abord $\mu = 7$. L'équation $7 x^2 = 2 p^2 + 5 q^2$ est résolue par les formules

$$x^2 = f^2 + 10 g^2, \; p = f - 5 g, \; \pm q = f + 2 g.$$

Si l'on prend le signe supérieur la formule A_2, devient

$$7 y^2 = -13 f^2 - 10 f g + 130 g^2,$$

d'où

$$13 . 7 y^2 = -(13 f + 5 g)^2 + 5 . 7 . 49 g^2,$$

$$13 y^2 = -7 \left(\frac{13 f + 59}{7}\right)^2 + 5 . 49 g^2.$$

Le nombre y devrait donc être multiple de 7, ce qui n'est pas possible, ainsi que nous venons de le remarquer. On doit donc prendre $-q = f + 2 g$, et alors les formules A, après la suppression du facteur 7, deviennent

$$\left|\begin{array}{l} x^2 = f^2 + 10\,g^2, \\ y^2 = f^2 - 10\,fg - 10\,g^2, \\ u = 19\,g^2 - 4\,fg - f^2. \end{array}\right.$$

Or si l'on fait $\mu = 2$, $q = 2\,q_1$ dans les formules A, et qu'on supprime l'indice de q_1 après la réduction, ou obtient les formules

$$(B)\quad \left|\begin{array}{l} 1)\ x^2 = p^2 + 10\,q^2, \\ 2)\ y^2 = p^2 - 10\,p\,q - 10\,q^2, \\ 3)\ u = p^2 + 4\,p\,q - 10\,q^2, \end{array}\right.$$

qui coïncident avec les précédentes lorsqu'on pose $p = f$, $q = g$, et qu'on change le signe de u. Comme nous faisons abstraction des signes des indéterminées dans l'équation (1) les deux systèmes sont parfaitement équivalents.

Ainsi les solutions de l'équation proposée sont toutes exprimées par les formules B, dans lesquelles p et q désignant des nombres entiers et premiers entre eux, dont le premier, p, est en outre impair et premier avec 5. Il s'agit donc de réduire à des carrés deux fonctions quadratiques de ces deux indéterminées.

19. Or l'équation B, 1, admet deux groupes de solutions exprimés respectivement par les formules

$$(C)\quad \left|\begin{array}{ll} 1) & x = f^2 + 10\,g^2,\ \pm p = f^2 - 10\,g^2,\ q = 2\,fg, \\ 2) & x = 2\,f^2 + 5\,g^2,\ \pm p = 2\,f^2 - 5\,g^2,\ q = 2\,fg. \end{array}\right.$$

Occupons-nous d'abord du second, par ce que nous constaterons qu'il correspond au cas où les deux nombres x et y sont en même temps divisibles par 5, et qu'ainsi nous pouvons le négliger, puisque nous supposons x et y premiers entre eux.

En combinant le second système avec l'équation B, 2, on obtient la formule

$$y^2 = (2\,f^2 - 10\,fg - 5\,g^2)^2 - 140\,f^2\,g^2,$$

qui se décompose en facteurs de l'une des manières suivantes

$$fg = st, \pm(2f^2 - 10fg - 5g^2) \pm y = 2s^2 \text{ ou } 14s^2$$

$$\pm(2f^2 - 10fg - 5g^2) \mp y = 70t^2 \text{ ou } 10t^2,$$

$$\pm(2f^2 - 10fg - 5g^2) = s^2 + 35t^2 \text{ ou } 7s^2 + 5t^2.$$

La première décomposition est exclue par la considération du module 5; car en réduisant suivant ce module l'équation obtenue on trouve la congruence

$$\pm 2f^2 \equiv s^2 \pmod 5,$$

qui est impossible, puisque p étant premier avec 5, f l'est également.

L'autre équation multipliée par 2 peut se mettre sous la forme

$$\pm\left[(2f - 5g)^2 - 35g^2\right] = 14s^2 + 10t^2,$$

et comme 10 est non résidu quadratique de 7, elle n'est possible qu'avec le signe inférieur. On a donc à résoudre en même temps les deux équations

$$fg = st, \quad 7s^2 + 5t^2 - 5g^2 - 10fg + 2f^2 = 0.$$

La première est complètement résolue par les formules

$$f = \lambda h, \quad g = \mu k, \quad s = \lambda\mu, \quad t = hk,$$

où λ, μ, h et k désignent des nombres entiers et premiers entre eux deux à deux. Par la substitution de ces valeurs la seconde équation devient

$$(7\mu^2 + 2h^2)\lambda^2 - 10\lambda\mu hk + 5k^2(h^2 - \mu^2) = 0,$$

et, en la résolvant successivement par rapport à $\frac{\lambda}{k}$ et à $\frac{h}{\mu}$, on en déduit

$$(D) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{k} = \dfrac{5h\mu \pm \sqrt{5(7\mu^4 - 2h^4)}}{7\mu^2 + 2h^2} \\[2ex] \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\lambda k \pm \sqrt{25k^4 - 14\lambda^4}}{5k^2 + 2\lambda^2}; \end{array} \right.$$

les valeurs correspondantes de x et de y sont exprimées par les formules

$$x = 2\lambda^2 h^2 + 5\mu^2 k^2, \quad y = 7\lambda^2\mu^2 - 5h^2 k^2.$$

Or ces valeurs de x et de y sont en même temps divisibles par 5. On voit en effet par la première des formules (D) que les nombres μ et h forment une solution de l'équation (1). Ces nombres vérifient donc l' équation $7\mu^4 - 2h^4 = 5u^2$, ainsi que l'équation

$$2p(\mu^2 - h^2) = 5q(u + \mu^2),$$

qui se déduit de l'équation (b) du n° 17 en y faisant $x = \mu, y = h$ et en remplaçant m par sa valeur $\frac{p}{q}$. Comme p est premier avec 5, ainsi que nous l'avons remarqué à la fin du numéro 18, nous concluons de la dernière équation $\mu^2 \equiv h^2 \pmod 5$. On a donc $7\mu^2 + 2h^2 \equiv 4h^2 \pmod 5$. Comme on ne peut pas supposer h et μ divisibles par 5, sans que x et y cessent d'être premiers entre eux, le dénominateur $7\mu^2 + 2h^2$ est premier avec 5, tandis que le numérateur $5(h\mu \pm u)$ est necessairement multiple de 5. La fraction irréductible équivalente $\lambda : k$ a donc son numérateur λ divisible par 5 et les valeurs correspondantes de x et de y ne sont plus premières entre elles. Les valeurs de x exprimées, par les formules C, 2, sont donc inutiles pour notre problème.

Puisque dans les formules D le nombre λ est nécessairement multiple de 5, nous concluons de la deuxième de ces formules que l'équation

$$25x^4 - 14p^4 = z^2$$

est impossible en nombres entiers et premiers entre eux deux à deux. Ce théorème est susceptible d'une démonstraction directe; mais comme il ne se rattache qu'incidemment à la question qui nous occupe, il est inutile de nous y arrêter plus longtemps.

20. Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que toutes les solutions de l'équation proposée sont exprimées par les formules

$$(E)\quad \left|\begin{array}{l} 1)\ x = f^2 + 10g^2, \\ 2)\ y^2 = (f^2 - 10fg - 10g^2)^2 - 140f^2g^2, \\ 3)\ u = (f^2 + 4fg - 10g^2)^2 - 56f^2g^2, \end{array}\right.$$

où f et g sont deux nombres entiers et premiers entre eux, dont le premier, f, est de plus impair et premier avec 5.

On déduit de la deuxième équation, par la décomposition en facteurs,

$$fg = st, \pm (f^2 - 10fg - 10g^2) \pm y = 2s^2 \text{ ou } 14s^2,$$

$$\pm (f^2 - 10fg - 10g^2) \mp y = 70t^2 \text{ ou } 10t^2,$$

$$\pm (f^2 - 10fg - 10g^2) = s^2 + 35t^2, \text{ ou } 7s^2 + 5t^2.$$

Or, quel que soit le signe adopté, la dernière équation est impossible, par ce qu'on en déduit la congruence

$$\pm f^2 \equiv 7s^2 \pmod 5,$$

qui est impossible quand f est premier avec 5, comme cela a lieu dans le cas actuel. L'autre équation peut se mettre sous la forme

$$\pm [(f - 5g)^2 - 35g^2] = s^2 + 35t^2,$$

où l'on voit, par la considération du module 7, qu'elle n'est possible qu'avec le signe supérieur. L'équation E, 2, se ramène donc aux suivantes

$$(3) \left| \begin{array}{l} fg = st, y = s^2 - 35t^2, \\ s^2 + 35t^2 + 10fg + 10g^2 - f^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'équation $fg = st$ est complètement résolue par les formules

$$(4) \; f = \lambda h, \; g = \mu k, \; s = \lambda \mu, \; t = hk,$$

où, λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers quelconques. Comme dans le cas actuel les nombres f et g sont premiers entre eux deux à deux ainsi que les deux nombres s, t, les quatre nombres γ, μ, h, k sont aussi premiers entre eux deux à deux.

La dernière des équations (3) devient donc

$$(5) \; 5(2\mu^2 + 7h^2)k^2 + 10\lambda\mu hh + \lambda^2(\mu^2 - h^2) = 0,$$

d' où l'on déduit

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-5h\mu \pm \sqrt{5\,(7\,h^4 - 2\,\mu^4)}}{5\,(2\,\mu^2 + 7\,h^2)}, \\[2ex] \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{-5\,\lambda\,k \pm \sqrt{\lambda^4 - 350\,k^4}}{35\,k^2 - \lambda^2}. \end{array}\right.$$

Dans chacune de ces formules le radical est rationnel, Il est évidemment multiple de 5 dans la première, de sorte qu'en le désignant par 5 R on a

$$7\,h^4 - 2\,\mu^4 = 5\,R^2,$$

c' est-à-dire que les trois nombres h, μ, R forment une solution de l'équation proposée.

21. Ainsi toute solution de l'équation (1) en nombres supérieurs à l'unité se ramène à une autre solution en nombres moindres de la même équation. Si celle-ci est encore formée de nombres supérieurs à l'unité, on la ramènera de même à une autre solution en nombres moindres, et ainsi de suite, de sorte qu' on arrivera nécessairement à une solution à laquelle on ne pourra appliquer le même mode de réduction qu'en faisant $g = o$ dans les formules E. Cette solution est la solution immédiate $x = y = u = 1$. Si donc, partant de cette solution, on remonte successivement aux diverses solutions qui s' y ramènent à l'aide des formules E, (3), (4) et (5), en appliquant ces formules dans un ordre inverse, on est assuré de retrouver une solution donnée, quelconque, de l'équation (1). On peut même exprimer toutes ces solutions pas des formules générales; seulement ces formules ont l'inconvénient de les donner compliquées de facteurs communs. En effet, la première des équations (6) donne.

$$(7)\quad \frac{k}{\lambda} = \frac{-h\,\mu \pm R}{2\mu^2 + 7\,h^2},\quad 5\,R^2 = 7\,h^4 - 2\,\mu^4.$$

Pour chacun des signes de R, la fraction doit être réduite à sa plus simple expression, car on déduit de l'équation (5) que le produit des deux valeurs qui en résultent pour le rapport $k : \lambda$ est égal à $\dfrac{\mu^2 - h^2}{5\,(2\,\mu^2 + 7\,h^2)}$, et comme μ^2

$-h^2$ est divisible par 5, ce produit se réduit à une fraction $\frac{m}{2\mu^2+7h^2}$, dont le dénominateur est le même que celui du second membre de la formule (7). Si l'on désigne par x, y, u la solution h, μ, R, et par x_1, y_1, u_1 l'une des solutions qui s'en déduisent par les formules (7), (4), (3) et (E), on aura

$$(8)\quad \left|\begin{array}{l} \mu x_1 = x^2(7x^2+2y^2)^2 + 10y^2(xy \pm u)^2, \\ \mu y_1 = y^2(7x^2+2y^2)^2 - 35x^2(xy \pm u), \end{array}\right.$$

en désignant par μ le plus grand diviseur commun des seconds membres. L'application successive de ces formules fera connaître toutes les solutions de l'équation proposée.

L'emploi des formules (8) a l'inconvénient d'exiger des calculs inutiles qu'on évite en recourant aux formules (7) et aux formules

$$(9)\quad \left|\begin{array}{l} x = \lambda^2 h^2 + 10\mu^2 k^2 \\ y = \lambda^2\mu^2 - 35h^2k^2 \\ u = (\lambda^2h^2 + 4\lambda\mu hk - 10\mu^2k^2)^2 - 56\lambda^2\mu^2h^2k^2, \end{array}\right.$$

que l'on déduit des formules (4), (3) et E. Pour remonter d'une solution $x = h$, $y = \mu$, $u = \mathrm{R}$ aux deux solutions qui s'en déduisent, on commence par réduire à sa plus simple expression chacune des deux fractions qui expriment dans la formule (7) la valeur de chacun des deux rapports $\frac{k}{\lambda}$; puis on égale k et λ aux deux termes de chaque fraction irréductible. La substitution de ces deux systèmes de valeurs dans les formules (9) donnera les deux solutions cherchées. Ainsi la solution $h = \mu = \mathrm{R} = 1$ donne $k = 0$, $\lambda = 1$, et $k = -2$, $\lambda = 9$. Le premier système ramène la solution primitive; mais on déduit du second la solution $x = 121$, $y = 59$, $u = 17183$. Au moyen de cette solution on déduit de l'équation (7) deux valeurs du rapport $k : \lambda$, savoir $k = -2$, $\lambda = 9$; $k = 1116$, $\lambda = 12161$. Les valeurs $k = -2$, $\lambda = 9$, associées à la solution $h = 121$, $\mu = 59$, donnent par les formules (9) $x = 1\,325\,161$, $y = 1\,767\,779$. Les autres valeurs de k et de λ donneraient une solution exprimée en nombres beaucoup plus grands.

En procédant de la sorte nous sommes assurés d'obtenir toutes les solutions de l'équation (1), rangées suivant leur ordre croissant de grandeur. Nous résolvons en même temps un autre problème, car les inconnues auxiliaires λ, k, sont les solutions de l'équation

$$\lambda^4 - 350\, k^4 = m^2.$$

22. Dans cet exemple, comme dans ceux qui précèdent, l'application des formules renfermées dans notre *Mémoire sur la reduction des polinômes biquadratiques à des carrés* donne immédiatement la transformation nécessaire pour l'emploi de la méthode posthume d'Euler. La résolution de l'équation (1) se ramène en effet au problème de trouver les valeurs rationnelles de z qui donnent une valeur rationnelle à l'expression $\sqrt{35 z^4 - 10}$. Or, en faisant $\varphi(z) = 35\, z^4 - 10$, $x_1 = -x_2 = 1$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$, dans les formules II du Mémoire cité nous obtenons une solution nouvelle $x = \frac{121}{59}$. Connaissant ainsi trois solutions différentes nous pouvons appliquer les formules I, en combinant les deux solutions constantes $x_2 = -x_3 = 1$ avec chacune des solutions successivement obtenues et désignées indéfiniment par x_1. Les formules (2) et (3), où nous faisons $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$, donnent $g = 5$, $f = -h$; de sorte que les autres équations deviennent

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} h\,(x_1^2 - 1) + 5\, x_1 = \varepsilon_1 \sqrt{35\, x_1^4 - 10}, \\ \qquad x + x_1 = \dfrac{10\, h}{35 - h^2} \\ h\,(x^2 - 1) + 5\, x = \varepsilon \sqrt{35\, x^4 - 10}. \end{array} \right.$$

En faisant $x_1 = \frac{121}{59}$ on obtient une nouvelle solution; puis au moyen de celle-ci une autre, et ainsi de suite. Une seule des valeurs de h est utile dans ce calcul successif; l'autre donnerait la solution qui précède celle qui est ici désignée par x_1. En désignant par h et par h' les deux valeurs de h qui correspondent à une même valeur de x_1, on déduit de la première des formules (10)

$$(a) \qquad h + h' = \frac{10\, x_1}{1 - x_1^2};$$

cette formule combinée avec la deuxième des formules (10), savoir

$$\text{(b)} \qquad x + x_1 = \frac{10\,h}{35 - h^2},$$

permet de calculer une suite indéfinie de solutions, comme dans la méthode posthume d'Euler.

En partant de la solution $x_1 = \frac{121}{59}$, $h = \frac{9}{2}$, on obtient par la formule (a) une nouvelle valeur de h, qui, substituée dans la formule (b) fait connaître une nouvelle solution x; on égale celle-ci à x_1 dans la formule (a) pour obtenir une nouvelle valeur de h et ensuite une nouvelle valeur de x.

Ce calcul est le même qui résulte de l'application de la méthode posthume d'Euler aux équations (5) et (6). Car, si nous posons $\frac{h}{\mu} = x_1$, $\frac{l}{k} = -h$, dans l'équation (5) divisée par $\mu^2 k^2$, elle devient

$$(x_1^2 - 1)\, h^2 + 10\, x_1\, h - 5\,(7\, x_1^2 + 2) = 0\,;$$

c'est à quoi l'on réduit la première des équation (10), lorsqu'après avoir élevé ses deux membres au carré on la divise par $x_1^2 - 1$.

23. Le même fait se présente toutes les fois qu'on applique les formules I de mon Mémoire à un polynôme biquadratique $\varphi(z) = a + c\,z^2 + e\,z^4$, en combinant deux solutions primitives $x_2 = -x_3 = \alpha$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$, avec chacune des solutions x_1 obtenues successivement. Les équations (2) et (3) du système I restent constantes

$$f + \alpha g + \alpha^2 h = \beta\,,\ f - \alpha g + \alpha^2 h = -\beta\,,$$

et l'on on déduit $g = \frac{\beta}{\alpha}$, $f = -\alpha^2 h$, de sorte que les autres équations du même système I deviennent

$$\left|\begin{array}{l} h\,(x_1^2 - \alpha^2) + \dfrac{\beta}{\alpha}\, x_1 = \varepsilon_1 \sqrt{\varphi(x_1)}\,, \\[2ex] \qquad x + x_1 = \dfrac{2\,\dfrac{\beta}{\alpha}\, h}{e - h^2}\,, \\[2ex] h\,(x^2 - \alpha^2) + \dfrac{\beta}{\alpha}\, x = \varepsilon\, \sqrt{\varphi(x)}. \end{array}\right.$$

En désignant par h et h' les deux valeurs de h qui correspondent dans la première de ces formules aux hypothèses $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$, on en déduit

$$\text{(a)} \qquad h + h' = \frac{2\frac{\beta}{\alpha}x_1}{\alpha^2 - x_1^2}.$$

En combinant cette formule avec l'équation

$$\text{(b)} \qquad x + x_1 = \frac{2\frac{\beta}{\alpha}h}{e - h^2}.$$

on pourra calculer, comme dans l'exemple précédent, une suite indéfinie de solutions, pourvu que l'on connaisse une solution x_1 différente de α et de $-\alpha$, avec une valeur correspondante de h. La valeur de x_1 pourra s'obtenir au moyen des formules II du Mémoire cité, en y faisant $x_1 = -x_2 = \alpha$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$. On calculera ensuite l'une des deux valeurs correspondantes de h par la formule

$$h\,(x_1^2 - 1) + \frac{\beta}{\alpha}x_1 = \varepsilon_1\sqrt{\varphi(x_1)}.$$

La solution du problème proposé, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b), constitue la méthode posthume d'Euler; or, elle se déduit immédiatement de nos formules dans les cas où la fonction biquadratique, dont la valeur doit être réduite à un carré, est une fonction paire $a + c\,z^2 + e\,z^4$.

24. La méthode que nous venons d'exposer est plus expéditive que celle au moyen de laquelle nous sommes parvenus aux équations (7), (8) et (9); mais elle n'offre aucun moyen de reconnaître si l'on obtient toutes les solutions du problème. Il pourrait arriver en effet que ces solutions ne fussent par toutes comprises dans la suite formée, à partir de la solution primitive $h = \frac{9}{2}$, $x_1 = \frac{121}{59}$, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b) (n° 22). Au contraire en appliquant les formules (7) et (9), ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, nous sommes assurés d'obtenir successivement toutes les solutions possibles de l'équation proposée. Cet avantage suffit bien pour justifier la discussion minutieuse dans laquelle nous avons dû entrer.

Examinons, en finissant, à quelle circonstance nous devons la solution complète des équations dont nous nous sommes occupés. On reconnaît aisément qu'elle consiste en ce que nous sommes parvenus à exprimer une solution quelconque de l'équation considérée au moyen d'une autre solution en nombres moindres. C'est à quoi l'on doit tendre pour arriver à une solution complète des équations semblables aux précédentes. Si l'on y parvient le problème est évidemment résolu. Car en appliquant les mêmes formules à la nouvelle solution on la ramènera à une autre solution en nombres moindres et ainsi de suite. Il est évident qu'on parviendra de la sorte à une solution irréductible, dans laquelle l'une au moins des indéterminées sera égale à l'unité. Or, il est facile de reconnaître si l'équation proposée admet, oui ou non, quelque solution de ce genre. Si elle n'en admet pas, on est assuré que l'équation est impossible. Si elle en admet une, il suffira d'employer dans un ordre inverse, à partir de cette solution, les formules qui expriment une solution quelconque au moyen d'une autre solution en nombres moindres ; on est assuré d'obtenir ainsi toutes les solutions possibles du problème, rangées suivant l'ordre croissant de grandeur.

INTORNO ALLA NATURA DELL' AZIONE CHIMICA

MEMORIA

DEL P. F. S. PROVENZALI D. C. D. G.

Fra tutte le forze che ci manifesta la materia l'azione chimica è quella di cui riesce più difficile determinare la natura. La sua indole di forza elettiva, come recisamente la distingue dall' attrazione universale, così la rende molto somigliante alle forze proprie degli esseri organizzati nei quali ciascun organo sceglie gli elementi che convengono alla sua costituzione rifiutando gli altri. Nei secoli passati ogni difficoltà si credeva rimossa con ricorrere a qualità occulte, ammettendo fra i diversi corpi una specie di simpatia o antipatia; nè si andava più oltre e molto meno si pensava di cercarne la causa nelle proprietà della materia rivelateci dai sensi. Ora poi che un accurato esame de'fatti ha dimostrato i fenomeni del calorico, della luce, dell'elettricità e del magnetismo potersi ragionevolmente considerare come puri scambi di movimento conforme alle leggi della meccanica, la più comune e verisimile opinione presso i cultori delle scienze naturali è che anche l' azione chimica e tutte le altre attività della materia sieno effetti naturali del moto in essa la prima volta impresso dal Creatore, moto che non mai si annulla, ma in virtù dell'inerzia resta sempre o sotto una forma o sotto l'altra nella massa creata. La difficoltà che si prova nel concepire come dal moto possano derivare tanti e sì svariati effetti quanti ce ne offre la materia è una conseguenza dello stato d'infanzia in cui ancora si trova la meccanica molecolare. Ciò non ostante siffatta difficoltà diminuisce alquanto se si considera che anche le masse finite e di forma a noi ben nota, quando si muovono rapidamente, ci presentano un aspetto assai diverso secondo la diversa specie di movimento che le anima. Nei Gabinetti di Fisica si veggono molti apparati capaci di produrre varie specie di movimenti più o meno complicati ed i corpi messi in moto con questi apparati ora cambiano colore come nel disco di Newton, ora mutano figura come nel caleidofono, ora ci fanno comparire unite le parti separate come nel taumatropo, ora tramutano le figure irregolari in disegni regolarissimi come nell'anartoscopio ed ora ci rappresentano degli animali dipinti quasi fossero dotati di moto spontaneo come nel fantascopio di M. Plateau.

Ma il mio scopo non è di provare che tutti i fenomeni della materia possono essere effetti di moto, solo voglio indicare come possa concepirsi che dal moto, secondo le note leggi della meccanica, possa nascere quella intima unione delle sostanze che costituisce l'attrazione molecolare ed in modo speciale l'azione chimica e come questa ipotesi si riscontri coi fatti e colle osservazioni della scienza positiva. Del resto è cosa evidente che sostituire un principio unico e conosciuto per via di osservazione ad una infinità di principi misteriosi e di problematica esistenza è un passo non piccolo verso la soluzione del gran problema che è la cognizione della natura de'corpi e dalle leggi dal Creatore imposte alla materia.

Col nome di azione chimica si vuole significare la forza in virtù della quale due o più corpi si uniscono assieme a produrne un altro dotato di proprietà del tutto diverse dalle loro. Per formarsi un concetto razionale di una tal forza senza ammettere nei corpi alcun principio di azione diverso dalle attività che nascono dal moto, e si risolvono nel moto, conviene in primo luogo supporre (come in ogni età si è supposto dalla maggior parte dei filosofi e come lo studio dei corpi celesti ha dipoi confermato) che la materia percettibile ai nostri sensi e ponderabile sia immersa in un fluido sottile, incoercibile e imponderabile che dicesi *etere*. Escluso questo mezzo di comunicazione non sembra possibile intendere le azioni che pure vediamo esercitarsi fra i corpi collocati a distanza. A chi dicesse che l'ipotesi di due specie di materia una ponderabile e l'altra no sia in disaccordo colla semplicità di principi che rifulge in tutte le opere del Creatore, risponderemmo che nella teoria che andiamo ad esporre l'etere si dice imponderabile solamente nel senso che esso stesso è la cagione della gravità e del peso degli altri corpi aventi densità maggiore della sua. Oltre di che supponendosi l'etere sparso per tutto e incoercibile, ancorchè avesse peso, questo non si manifesterebbe, come non si manifestò il peso dell'aria prima che si trovasse la maniera di condensarla e rarefarla nei recipienti.

Si ha di più da supporre che i corpi detti *semplici* perchè ancora non sono stati decomposti sieno formati di *atomi*, ossia di parti naturalmente distinte e uguali fra loro nella medesima sostanza; e che questi atomi abbiano ricevuto dalla volontà del Creatore un impulso eccentrico, vale a dire capace di determinarli al moto di traslazione insieme e di rotazione. Perciò che riguarda l'esistenza degli atomi, le numerose prove che nel tempo passato ce ne somministravano le leggi fondamentali della Chimica, i diversi stati della materia, le sue forme cristalline, i fenomeni calorifici,

luminosi ed elettrici ecc., ebbero in questi ultimi anni una sorprendente conferma dagli interessanti lavori di Mendéléeff (1) e di Meyer (2) sui rapporti che passano fra i pesi atomici e le proprietà fisiche e chimiche dei corpi. Fino dal 1819 Dulong e Petit avevano scoperto che i calorici specifici dei corpi semplici sono inversamente proporzionali ai pesi atomici. Ora i due sullodati chimici hanno trovato che non solo i calorici specifici, ma anche la densità, fusibilità, volatilità, conducibilità per il calorico e l'elettrico con tutte le altre più importanti proprietà fisiche e chimiche dei corpi semplici sono in strettissima relazione coi loro pesi atomici quali al presente si ammettono dai chimici. Ciò vuol dire che il peso atomico e per conseguenza la realtà degli atomi è un ipotesi a cui siamo quasi di necessità condotti da tutto il complesso delle scoperte che formano il patrimonio più certo della Fisica e della Chimica. Ma che che sia della necessità è cosa indubitata che le due suddette ipotesi non sono in opposizione con alcun fenomeno manifestatoci dalla materia, e tanto basta perchè ce ne possiamo servire a spiegare anche le azioni molecolari e in modo speciale l'azione chimica.

Ammesse in fatti le suddette ipotesi ed applicando agli atomi le leggi della comunicazione del moto che si osservano fra le masse sensibili, ognuno intende che in forza delle rotazioni atomiche, attorno a ciascun centro di moto più energico e per conseguenza attorno a ciascun atomo ponderabile deve generarsi un vortice o atmosfera di etere la cui densità vada scemando dalla periferia fino al centro. Quando dunque due atomi ponderabili si trovino tanto vicini fra loro che le singole atmosfere vengano in parte a penetrarsi, la pressione dell'etere circostante maggiore di quella dell'etere interposto spingerà questi atomi uno contro l'altro per modo che potranno unirsi e rimanere uniti in un gruppo formante il nucleo di una atmosfera più ampia che chiuderà entro di se le singole atmosfere atomiche. Gli atomi omogenei per tale maniera ridotti a gruppi aventi unità di azione meccanica costituirebbero le molecole de' corpi semplici, e gli eterogenei quelle de' corpi composti. E se ciò che si è detto degli atomi si dica delle molecole, la genesi dei corpi semplici e composti e le così dette attrazioni molecolari omogenee ed eterogenee non saranno più un mistero incomprensibile, ma casi speciali della comunicazione del moto simili agli avvicina-

(1) Die periodische Gesetzmässigkeit der chemischen Elements von D. Mendéléeff. Pietroburgo 1871.

(2) Die modernen Theorien der Chemie. Breslavia 1877.

menti ed orientazioni che si veggono nelle sperienze del giroscopio. Ho detto alle orientazioni perchè se le distanze intermolecolari sieno abbastanza piccole, giusta le leggi sperimentali dei corpi rotanti, gli assi di rotazione tenderanno a disporsi paralleli gli uni agli altri; d'onde le forme regolari e cristalline che sempre più o meno distintamente si osservano nel formarsi dei corpi solidi. Nè si potrebbe qui opporre che nei corpi così formati gli atomi e le molecole si dovrebbero trovare fra loro a contatto reale; imperocchè sebbene l'effetto ordinario della pressione circostante debba essere di avvicinare gli atomi e le molecole fino all'urto scambievole, (ed è appunto per questi urti che si desta calorico nelle sintesi chimiche e nel passaggio dei fluidi aerei a stato liquido e di questi a stato solido) ciononostante trattandosi di atomi o molecole rotanti la mutua distanza finale sarà sempre determinata dall'equilibrio fra la pressione circostante e le forze centrifughe originate dalle rotazioni; onde il contatto permanente fra gli atomi o le molecole non sarà possibile se non nel caso che resti distrutto il moto rotatorio, caso ben difficile a verificarsi e quando anche si verificasse alcuna volta le rotazioni distrutte dagli urti precedenti verrebbero subito ripristinate dagli urti seguenti.

Sarebbe cosa troppo lunga il dichiarare come l'esposta teoria renda sufficiente ragione dei fenomeni dipendenti dall'azione chimica. Limitandomi ai principali comincerò dal più noto e caratteristico, cioè dall'essere le proprietà dei composti affatto diverse da quelle dei componenti. Secondo il suddetto modo di concepire l'attività della materia, le proprietà fisiche e chimiche dei corpi unicamente possono dipendere dalle masse, disposizione e movimento delle due specie di materia la ponderabile e l'imponderabile di cui sono formati. Nei fenomeni dell'attrazione omogenea essendo uguali le masse, velocità e atmosfere degli elementi che in forza della pressione circostante si uniscono, i gruppi multipli che ne risultano possono acquistare delle nuove proprietà solo per il diverso modo di aggruppamento, che per lo più altera solamente le proprietà fisiche. Laddove nei fenomeni di attrazione fra gli atomi eterogenei, per il principio che due o più corpi di masse e velocità ineguali urtandosi assieme tendono a concepire una velocità comune e diversa da quella che avevano prima dall'urto, i gruppi atomici e per conseguenza le atmosfere che li avviluppano non possono mantenere alcun rapporto colle masse, velocità e atmosfere primitive, epperò le proprietà dei composti saranno del tutto diverse da quelle dei loro componenti.

Ma qui si vuole accuratamente distinguere l'azione che si esercita fra gli

atomi eterogenei e costituisce la così detta affinità chimica, dall'azione che si opera fra le molecole eterogenee e produce le soluzioni, la maggior parte delle leghe metalliche e tutti quei miscugli sensibilmente omogenei nei quali le proprietà chimiche delle sostanze unite solo rimangono un poco modificate, ma non distrutte. Nell'azione mutua fra le molecole non si formano de'nuovi gruppi atomici cioè delle nuove molecole, ma le già esistenti senza perdere la loro unità specifica si aggregano ad altre per modo che quantò alle forze individuali degli atomi di cui sono formate o ciò che torna lo stesso quanto all'esercizio delle affinità chimiche, si trovano a un dipresso nelle medesime circostanze nelle quali erano prima dell' unione. Quindi si vede come avvenga che le mescolanze molecolari o come suol dirsi le mescolanze chimiche, si fanno in proporzioni molto variabili, mentre ogni vero composto non ammette che una sola proporzione determinata e del tutto immutabile. Affinchè abbia luogo una mescolanza chimica non si richiede alcun cambiamento nel moto relativo degli atomi, ma basta che le molecole eterogenee si uniscano in gruppi aventi una velocità comune. Il numero delle molecole costituenti siffatti gruppi senza dubbio avrà un limite che in generale varierà colla temperatura; ma rimanendo questa costante, la mescolanza, senza cangiare le sue proprietà, potrà effettuarsi fra un numero qualunque di molecole non superiore al massimo. Al contrario nella formazione dei composti è necessario che ciascun atomo entrando a far parte di una molecola cambi la sua forma di movimento per modo che tutti si riducano ad avere un moto comune risultante dai moti combinati dei singoli elementi. Variando dunque il numero degli atomi che entrano nella composizione di una molecola, varierà del pari il moto risultante epperò le proprietà chimiche del composto. A misura poi che cresce quel numero di atomi, cresceranno pure le differenze di velocità che le cause estrinseche tendono a produrre nelle diverse masse elementari di maniera che assai presto l'equilibrio molecolare diverrà instabile e cessata l'unità di azione si separeranno gli uni dagli altri i componenti. Una somigliante separazione deve avvenire e avviene difatto anche nelle mescolanze chimiche, come di continuo ci viene attestato dall'evaporazione delle soluzioni e dal precipitare dei sali sciolti nei liquidi; ma in questi casi la separazione si fa tra le molecole senza che si turbi l'equilibrio dei gruppi atomici determinanti la natura chimica dei corpi.

Quanto all'altra proprietà caratteristica dell'azione chimica di essere cioè elettiva, facilmente si comprende che se la combinazione consiste nel fon-

dersi assieme le atmosfere atomiche e nel ridursi mediante l'urto scambievole all'uniformità di moto gli atomi eterogenei, secondo la maggiore o minore differenza fra i volumi delle atmosfere riuscirà più o meno facile a ciascuna di penetrare nello spazio occupato dall'altra, e due corpi nei quali il ritmo dei movimenti atomici più o meno facilmente può divenire concordante saranno due corpi aventi fra loro maggiore o minore affinità. Nell' atto poi che si compie l'esercizio dell'affinità, come varia il moto atomico degli elementi, così deve in generale variare la quantità dell'etere formante le atmosfere delle nuove molecole. E così può intendersi lo sviluppo di elettricità che accompagna le azioni chimiche e l'influsso che esercitano sulle azioni medesime il calorico, la luce, le azioni meccaniche, la pressione ed ogni altra causa capace di modificare il moto atomico. Anche l'azione catalitica e lo stato nascente che nelle antiche teorie sembravano inesplicabili, ammettono nelle moderne una spiegazione molto naturale. Quale meraviglia infatti che due corpi dotati di velocità diverse venendo a contatto di un terzo corpo acquistino una velocità comune o tale da non impedirne l'unione? e che gli atomi di un corpo nell'atto di svincolarsi da un composto, prima cioè di essere determinati a formare fra loro delle molecole, possano più facilmente ubbidire all' impulso che li spinge ad associarsi con quelli di altri corpi?

Ciò che riesce più difficile a intendersi nell'esercizio dell'affinità chimica è il numero determinato di atomi con cui una sostanza semplice può entrare in combinazione colle altre sostanze semplici, proprietà che i chimici moderni appellano *atomicità* o *valenza*. Ciononostante se si considera che gli atomi delle diverse sostanze probabilmente non hanno la medesima figura e che le rotazioni nelle diverse figure e anche in una stessa figura secondo la diversa posizione dell' asse, importano un diverso numero di punti nei quali la forza centrifuga è massima, agevolmente s'intende che a siffatti punti dovranno corrispondere altrettanti centri di rarefazione più energica ossia di più forte attrazione; simili a quei centri di forze prevalenti che tanto chiaramente ci sono indicati dalle cristallizzazioni e che possono attribuirsi anche essi al moto rotatorio delle molecole. Si vuole inoltre osservare che gli atomi dei diversi corpi avendo ciascuno la sua propria massa e i suoi propri movimenti che hanno da coordinarsi con quelli degli atomi con cui si combinano, la capacità di saturazione di un corpo non può essere la stessa verso tutti gli altri corpi e neppure verso un medesimo corpo quando sieno cambiate le circostanze capaci di alterare il moto atomico.

Quindi si vede che senza bisogno di forze occulte e misteriose col solo moto in un mezzo inerte si può dar ragione anche di quei fenomeni chimici dei quali prima delle moderne teorie non si era saputo trovare plausibile spiegazione. Del resto l'esposta teoria quanto alla sostanza non differisce dalle altre che dopo un più profondo esame dei fatti sono state proposte dai moderni studiosi delle scienze positive e sopra tutti dal nostro compianto presidente l'illustre p. Secchi nella sua classica opera *l'unità delle forze fisiche*. I punti fondamentali su cui convengono tutte queste teorie sono i seguenti:

1. Ogni corpo è formalmente costituito da due principi, uno passivo che è la materia, attivo l'altro ed è il moto o se così piace la forza meccanica che si traduce in moto.

2. Ambidue questi principi nello stato attuale della creazione sono essenziali ai corpi e indistruttibili dalle cause finite.

3. Quando due corpi si uniscono a formare un composto la materia non soffre alcuna mutazione intrinseca, solo il moto e la disposizione degli atomi e delle molecole rimangono modificati.

La ragione precipua che ha indotto i fisici moderni ad ammettere il primo dei suddetti principi è che stando ai soli fatti ogni corpo ci si presenta come una sostanza inerte in movimento, nè fa bisogno di altro per intendere i fenomeni offertici dalla materia inanimata. Che poi non solo la materia, cosa che al presente da tutti si concede, ma neppure il moto possa essere distrutto dalle cause finite, lo mostra l'osservazione costante ed universale che ogni perdita di moto è sempre accompagnata da un lavoro, cioè da un moto equivalente al moto perduto, di maniera che tutte le apparenti distruzioni di moto in realtà non sono che trasformazioni di una in altre specie di movimento.

Ciò che vuole essere più accuratamente dichiarato è il terzo principio, vale a dire che la materia non va soggetta a mutazioni intrinseche o in altri termini che gli atomi dei corpi semplici tanto nello stato di libertà che in quello di combinazione conservano sempre la stessa massa e le medesime proprietà. La conservazione delle masse degli atomi nei composti ci è direttamente mostrata dal peso che in un composto qualunque è sempre uguale alla somma di pesi degli elementi che lo compongono. Non è così delle proprietà fisiche e chimiche che in apparenza sono molto diverse nei composti e nei componenti. Ciononostante se attentamente le consideriamo saremo costretti ad ammettere che la diversità non proviene da una mutazione intrin-

seca della materia, prodotta non si sa da che, ma dal diverso modo di unione delle sue parti e dal diverso movimento che l'unione produce nelle parti medesime.

Cominciando dalle proprietà fisiche, il peso specifico che nei composti a prima vista sembra non avere alcun rapporto con quello dei componenti, se si tien conto delle variazioni di densità, troviamo che i componenti lo conservano inalterato anche nei composti. Così p. e. nell'acido cloridrico che risulta di volumi eguali di cloro e idrogeno uniti assieme senza condensazione, il peso specifico 1,258 uguaglia la semisomma dei pesi specifici 2,448 del cloro e 0,069 dell'idrogeno. Laddove nel vapore di acqua che si compone di due volumi d'idrogeno e uno di ossigeno condensati nel rapporto di tre volumi a due, il peso specifico 0,622 rappresenta il peso specifico dell'idrogeno aumentato della metà di quello dell'ossigeno che è 1,1056. Similmente nel gas ammoniaco formato di un volume di azoto e tre d'idrogeno, condensati in due volumi, il peso specifico 0,59 uguaglia la metà del peso specifico dell'azoto più tre metà del peso specifico dell'idrogeno. La generalizzazione di questi esempi è compresa nella formola

$$vp + v'p' = VP$$

in cui v, v', V e p, p', P rappresentano i volumi e i pesi specifici dei componenti e del composto. I chimici ricorrono spesso a questa formola per conoscere i pesi specifici dei composti gassosi, e i risultati del calcolo sono sempre molto conformi ai dati dell'esperienza.

Ciò che si è detto del peso specifico si deve parimenti dire del calorico specifico, altra proprietà fisica della materia e che da se sola può bastare a farci distinguere i diversi corpi della natura. Moltissimi sono i composti nei quali il calorico specifico presenta un rapporto semplice colla somma dei calorici specifici dei componenti. Così p. e. nelle combinazioni aeriformi di carbonio, idrogeno e ossigeno rappresentate dalla formola $C^n H^m O^r$, a parità di circostanze, si trova che i calorici specifici sono proporzionali alla somma degli atomi $n + m + r$ o in altri termini che quegli elementi conservano il loro calorico specifico anche nelle combinazioni. Lo stesso fanno il solfo, il cloro, il bromo, lo iodio nelle combinazioni che hanno identica costituzione; anzi quei medesimi corpi che apparentemente si allontanano da questa legge in realtà la confermano perchè siffatti composti hanno struttura molecolare assai diversa da quella dei loro compo-

nenti, e la diversità di struttura importa sempre delle variazioni nella capacità per il calorico.

Ma dal vedere che la suddetta legge si verifica nei composti che hanno le molecole affatto libere o che si trovano nel medesimo stato di coesione possiamo legittimamente inferire che, prescindendo dalle cause perturbatrici, la capacità per il calorico dei componenti si conserva inalterata nei composti. Questo fatto è si certo che anche prima che fosse rigorosamente determinato il calorico specifico dei melalli alcalini potassio, sodio e litio M. Regnault lo potè dedurre dalla capacità per il calorico delle loro combinazioni; ed i valori così calcolati si trovarono d'accordo coi risultati delle sperienze direttamente istituite più tardi sui metalli isolati. Ad una somigliante conclusione ci conduce il così detto *volume atomico* cioè il rapporto fra il peso atomico di un corpo e la sua densita. Dalle rimarchevoli sperienze di E. Kopp su tale proposito risulta che nei liquidi specialmente di origine organica il volume molecolare di un composto uguaglia la somma dei volumi atomici dei componenti, e che nei composti di analoga costituzione uno stesso elemento possiede sempre il medesimo volume atomico, per forma che conosciuti i volumi atomici dei corpi semplici si può calcolare il volume molecolare di un composto di cui si conosce la composizione. L'accordo di questi calcoli colla sperienza è tale da poterne inferire che gli elementi conservano in quei composti il volume atomico che occupano nello stato di libertà.

Il peso specifico, la capacità per il calorico e il volume atomico non sono le sole proprietà fisiche che, per quanto il diverso modo di aggruppamento degli atomi lo permette, i componenti conservano nei composti. È un fatto bene dimostrato che nei composti di analoga struttura, quali sono p. e. i termini di una serie omologa della chimica organica, i punti di fusione e di ebollizione stanno in un rapporto semplice con quelli degli elementi che li compongono di maniera che la fusione e l'ebollizione dei composti medesimi sono ritardate o accelerate secondo che gli elementi che entrano nella loro composizione sono meno o più fusibili, meno o più volatili. Così p. e. negli idrocarburi, negli alcooli, negli eteri, negli acidi organici e in generale in tutti i composti veramente omologhi per ogni atomo di carbonio aggiunto o sottratto il punto di ebollizione del composto cresce o diminuisce di un numero di gradi che è lo stesso in ciascuna serie omologa, sebbene vari un poco da una serie all'altra come da una serie all'altra varia la struttura molecolare. Coll'idrogeno accade il contrario, cioè le combina-

zioni più povere d'idrogeno bollono a temperatura più elevata delle meno povere, ma in ciascuna serie di composti omologhi la differenza nel punto di ebollizione per l'aumento o decremento di un egual numero di atomi d'idrogeno rimane costantemente la stessa. Siffatta costanza di rapporti fra i punti di fusione ed ebollizione dei composti e le qualità e quantità dei componenti non si può comprendere se non si ammette che la materia degli elementi resta inalterata nei composti. Da recenti sperienze di M. Bunsen abbiamo che anche la volatilità di non pochi corpi ha un rapporto costante colla qualità e quantità de' componenti. Se si espongono pesi eguali di cloruri, bromuri o ioduri alcalini nella regione più calda di una stessa fiamma, i tempi che impiegano questi sali per volatizzarsi sono inversamente proporzionali ai loro pesi molecolari epperò strettamente connessi coi pesi atomici degli elementi che li compongono.

Un'altra specie di rapporti incomprensibili se la materia degli elementi non resta inalterata nei composti, ci è offerta dalla rifrazione della luce. Da molto tempo si conosceva che il potere rinfrangente specifico di una mescolanza ha un valore medio fra i poteri rinfrangenti specifici delle sostanze di cui è formata, e su questo fatto è fondato un metodo di analisi chimica delle miscele. Più recenti sperienze hanno mostrato che molti corpi organici, specialmente nella serie de' corpi grassi e nelle combinazioni affini più povere d'idrogeno, agiscono sulla luce non altrimenti che se fossero semplici miscugli. Se p. e. facciasi una mescolanza di acido acetico e acido butirrico avente la composizione centesimale dell'acido propionico, si trova per il potere rinfrangente specifico della mescolanza il numero 1,3956, che appena differisce di 0,0005 dal potere rinfrangente specifico dell'acido propionico. Similmente per una mescolanza di alcool metilico e di alcool amilico che abbia la composizione centesimale dell'alcool etilico si trova il potere rifrangente specifico 1,3735, che differisce solo di qualche millesimo dal potere rinfrangente specifico dell'alcooletilico. Quindi è avvenuto che i chimici ora ricorrono alla misura degli indici di rifrazione anche nelle analisi quantitative dei composti. Conosciuto p. e. il potere rifrattivo specifico r di un idrocarburo ed i poteri rifrattivi specifici r', r'' di ciascuno de' suoi componenti l'idrogeno e il carbonio, le quantità d'idrogeno e di carbonio contenute in 100 parti di quell'idrocarburo sono date dalle equazioni

$$x + y = 100, \quad r' x + r'' y = r$$

Viceversa se si conosce la composizione centesimale di un idrocarburo e il suo potere rinfrangente specifico, sarà cosa facile con queste formole il

calcolare i poteri rinfrangenti specifici dell'idrogeno e del carbonio. I numeri per tale maniera ottenuti combinano molto prossimamente con quelli dati direttamente dalla sperienza; ciò vale quanto dire che, prescindendo dalle piccole perturbazioni cagionate dal diverso modo di aggruppamento degli atomi, gli elementi che entrano a far parte di un composto continuano ad agire sulla luce non altrimenti di quando erano isolati.

Ad una simile illazione siamo condotti dalla proprietà che hanno i corpi semplici di emettere alcune sole specie di radiazioni luminose. Le analisi spettrali hanno dimostrato che unitamente agli spettri dei gas e dei vapori composti si formano spesso anche gli spettri propri de' loro componenti. L' ossido di carbonio reso incandescente dalla corrente elettrica, fuori del contatto dell'aria, dà uno spettro nel cui mezzo appariscono le righe dell' ossigeno. Anche lo spettro del vapore di acqua nelle medesime circostanze ora presenta le righe dell' ossigeno, ora quelle dell'idrogeno e sullo spettro di alcuni idrocarburi si vede talvolta proiettato lo spettro del carbonio. Ma prescindendo da questa simultaneità di spettri, che per lo più può essere attribuita ad una parziale dissociazione prodotta dal calorico, i composti aeriformi più semplici, come gli ossidi e le altre combinazioni binarie, scaldate fuori del contatto dell'aria ad una temperatura molto inferiore alla richiesta per la loro dissociazione, danno degli spettri a righe larghe e sfumate che messi a confronto con quelli dei loro componenti più o meno apertamente ne rivelano la presenza nel composto. Nè meno apertamente la presenza dei componenti nei composti ci è rivelata dalla struttura cristallina, dallo stato elettrico e dal magnetismo o diamagnetismo proprio dei componenti medesimi. Vediamo infatti che gli elementi isomorfi come solfo e selenio, bario e strontio, fosforo e arsenico conservano fra loro l'isomorfismo anche nei composti analoghi di cui fanno parte, e che quando un composto si sottopone all'elettrolisi i suoi elementi anche prima di separarsi destano negli elettrodi l'elettricità contraria manifestata dalla tensione elettroscopica dei circuiti aperti epperò avanti che incominci l'azione chimica generatrice della corrente. Vediamo infine che gli elementi magnetici come ferro, niccolo, cobalto e i diamagnetici come bismuto, solfo, fosforo conservano il loro magnetismo o diamagnetismo in quasi tutte le combinazione di cui fanno parte. Anzi le qualità magnetiche di alcuni corpi semplici p. e. del cromo, del cerio e del manganese si sono scoperte mediante l'osservazione che i sali di questi metalli sono magnetici. Le anomalie che talvolta s'incontrano in questa lagge sono della stessa natura di

quelle che ci offre una medesima sostanza p, e. il ferro che sebbene sia il più magnetico di tutti i corpi pure nello srato di fusione appena da qualche segno di magnetismo. Conchiudiamo dunque che le proprietà fisiche dei composti paragonate con quelle dei componenti presentano solo quelle differenze che si osservano anche in uno stesso corpo allorchè la sua struttura molecolare viene alterata.

Quanto alle proprietà chimiche, queste a prima vista sembrano incapaci di somministrare delle prove in favore della presenza dei componenti nei composti. Ma bisogna bene distinguere le proprietà chimiche di un composto dalle proprietà ossia dall'attitudine di agire chimicamente che hanno i componenti nel composto medesimo. Le prime sono e debbono necessariamente essere diverse nel composto e nei suoi componenti per la ragione che la risultante di piu forze non può essere identica con una qualunque delle componenti. Rispetto alle seconde un attento esame di ciò che accade nelle operazioni chimiche ci persuade che gli elementi conservano nelle combinazioni tutte le loro proprietà chimiche, sebbene in generale non possano immediatamente mostrarle, perchè sono impiegate a produrre un altro effetto, che nella esposta teoria è il movimento risultante dai movimenti individuali degli atomi eterogenei. Le considerazioni seguenti faranno intendere la ragionevolezza di queste asserzioni.

Un composto di due elementi A e B p. e. l'acqua si può ottenere tanto facendo agire l'uno sull'altro i suoi componenti idrogeno e ossigeno quanto sottoponendo all'azione di uno di essi dell'ossigeno p. e., un composto dell'altro componente, quale nel caso nostro potrebbero essere l'acido solfidrico, formato di idrogeno e di solfo. La differenza fra questi due modi di preparazione dell'acqua è che col primo si ottiene solo acqua e col secondo si ha dell'acqua e del solfo ovvero, se l'ossigeno sia in eccesso, dell'acqua e dell'anidrido solforoso, composto di ossigeno e di solfo, e che direttamente si produce mediante l'azione mutua di questi due metalloidi. Si vede da ciò che l'idrogeno o il solfo tanto nello stato di libertà come in quello di combinazione esercitano la stessa azione verso l'ossigeno producendo l'acqua o l'anidrido solforoso epperò che in ambidue gli stati possiedono le medesime proprietà chimiche.

A questa conclusione si potrebbe opporre che l'azione chimica dell'ossigeno sull'acido solfidrico si può effettuare non fra l'ossigeno e l'idrogeno dell'acido, ma fra l'ossigeno e l'acido; e dato anche che si eserciti fra l'ossigeno e l'idrogeno tale azione potrà essere preceduta dall'analisi del-

l'ossigeno nel biossido di azoto e quella del carbonio nel cianogeno, nel l'acido medesimo. A sciogliere queste difficoltà basta riflettere che l'analisi dell'acido, se non si vuole dire un effetto senza causa, si deve necessariamente attribuire all'azione dell'ossigeno. Ora l'ossigeno non può decomporre l'acido che in due maniere, operando cioè sul composto o su alcuno dei suoi componenti. Se l'analisi è prodotta dall'azione dell'ossigeno sul composto non si comprende come un composto che ha proprietà del tutto diverse dall'idrogeno e dal solfo possa essere decomposto da un'altro corpo solo nel caso che questo abbia, come ha l'ossigeno, maggiore affinità per l'idrogeno che non ha il solfo oppure maggiore affinità per il solfo che non ha l'idrogeno, quale sarebbe p. e. il potassio. Che se quell'analisi è prodotta dall'azione dell'ossigeno sull'uno o sull'altro dei componenti l'acido, siffatta analisi non precede ma segue l'esercizio dell'affinità fra due corpi uno libero, l'altro facente parte di di un composto. Il ragionamento precedente si può estendere a tutte le analisi fondate sull'affinità che i chimici chiamano *prevalente* e vuole essere perciò considerato come una prova generale del nostro assunto, vogliamo dire che i componenti conservano le loro proprietà chimiche anche nei composti.

Se non che la chimica ci offre pure degli esempi di corpi semplici i quali senza cessare di far parte di un vero composto si combinano ad altri corpi non altrimenti di quando sono isolati. Così p. e. il carbonio dell'ossido di carbonio si combina ad un atomo di ossigeno per formare l'anidrido carbonico, ed il carbonio libero si unisce ad un atomo di ossigeno producendo l'ossido di carbonio. Che poi nel primo caso la combinazione dell'ossigeno si faccia col carbonio dell'ossido e non coll'ossido stesso, apparisce dal fatto che la quantità di ossigeno fissata dall'ossido di carbonio è precisamente quella che si richiede per saturare il suo carbonio e per conseguenza che la reazione dell'ossido di carbonio sull'ossigeno si deve unicamente attribuire al carbonio *esistente colle sue proprietà chimiche nell'ossido stesso*. Dico esistente colle sue proprietà perchè se da una parte l'atomo di carbonio nello stato di libertà si unisce fino a due e non più atomi d'ossigeno, e se dall'altra l'ossido di carbonio, che risulta di un atomo di carbonio e uno di ossigeno, si combina con un altro atomo di ossigeno e non con più, possiamo legittimamente inferire che in quell'ossido esistono realmente il carbonio e l'ossigeno colle loro proprietà chimiche. In somigliante maniera si potrebbe dimostrare la presenza dell'azoto e del-

cacodilo ed in molti altri composti organici. Ma per dare a queste dimostrazioni la più grande generalità tornerà meglio considerare il caso più comune di analisi e sintesi chimica cioè la così detta doppia decomposizione. Allorchè due composti uno di A e B, l'altro di C e D sono tali che i componenti A e B del primo C e D del secondo hanno fra loro minore affinità che A per C e B per D, il prodotto dell'azione mutua di quei composti è sempre la formazione di due nuovi composti AC e BD. Ora se nei composti di A e B, C e D non esistessero realmente i componenti A e B, C e D o non vi esistessero colle medesime proprietà di quando sono isolati, converrebbe dire che tali composti ed operano chimicamente al modo dei componenti e non contengono quei componenti o li contengono dotati di proprietà chimiche diverse. Ad evitare si manifesta contradizione coloro che non ammettono la presenza dei componenti nei composti, sogliono dire che AB e CD messi a contatto l'uno dell'altro prima si decompongono e poi cogli elementi rigenerati si formano i nuovi composti AC e BD. Ma siffatta decomposizione a quale altra causa fuori dell'affinita di A per C e B per D si può ragionevolmente attribuire? E se i due composti AB e CD agiscono a vicenda in forza dell'affinità fra i loro componenti, questi debbono senza dubbio preesistere nei composti medesimi, senza di che l'effetto precederebbe la sua causa. Non è dunque senza buone ragioni che i chimici moderni considerano come principio fondamentale di loro scienza che le operazioni chimiche si fanno sempre fra gli elementi e che questi conservano costantemente le loro proprietà anche nei composti.

SE E QUAL VALORE SIA DA ATTRIBUIRE NELLA DETERMINAZIONE DELLA SPECIE AL NUMERO DELLE STRIE NELLE DIATOMEE.

NOTA

DEL CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE

Una delle epoche più fortunate per le scienze di osservazione che sia stata registrata dalla Storia, fuori d'ogni dubbio vuolsi annoverare la metà del Secolo XIX, allora che richiamata l'attenzione degli Ottici teorici e prattici su la costruzione del microscopio e su i suoi perfezionamenti si aperse a questo istrumento una nuova via e un più brillante avvenire mercè il Modenese Professore Giovanni Battista Amici con l'invenzione degli obiettivi ad immersione. Per tale mezzo con obiettivi del maggiore ingrandimento si poterono ottenere immagini corrette dalle aberrazioni sferica e cromatica; e sopra di ogni altro vantaggio ottenuto per tal mezzo fu un prezioso acquisto e massimo progresso quello della inusitata ampiezza dell'angolo sotto il quale l'oggetto sottoposto al microscopio può essere illuminato. Per tal modo organismi presentanti dettagli così squisitamente fini, che sembrarono sfidare qualunque maggior potere di risoluzione, poterono essere fatti evidenti e si discriminarono ad uno ad uno sotto l'influenza di una illuminazione molto obliqua, cosicchè il così detto angolo di apertura di un obiettivo è precipuo coefficiente del suo valore e merito.

L'acquisto di un così interessante ed efficace istrumento di ricerche condusse allo scoprimento di inattese maraviglie, e il microscopio divenne l'inseparabile compagno del Naturalista, del Medico, del Botanico, del Fisiologo e di chiunque si adopera a conoscere le minime forme e la struttura intima dei corpi e dei tessuti. Il Microscopio dischiuse nuovi campi alla insaziabile curiosità umana, la quale fu attratta per tal mezzo alla considerazione delle maraviglie del microcosmo. Fra queste indubitatamente va numerato l'ordine delle diatomee, la di cui cognizione può dirsi datare dal momento nel quale vennero introdotti nella costruzione del Microscopio i suaccennati perfezionamenti. Una tale rivelazione offerì la più copiosa messe a quelli, che si adoperarono in tali ricerche; nè fa maraviglia che Erhenberg, Kützing, Smith, Brebisson, Gregory, Bailey e molti altri, che

ci precedettero, poterono far conoscere un numero stragrande di Diatomee, mentre chiunque seriamente si adopera in tale studio sa come la scoperta di nuovi generi e specie di Diatomee ad onta del numero che se ne conosce sia tutt'altro che difficile, così che l'elenco di quelle sia ancor lontano dall'essere compiuto.

Ma il lavoro di quelli ai quali andiamo debitori della conoscenza di migliaja di forme e tipi diversi appartenenti all'ordine delle Diatomee, necessariamente dovette risentire le conseguenze della fretta di chi veniva sopraffatto dal numero dei nuovi organismi che incessantemente presentavansi; cosicchè non è da maravigliare che talvolta l'istessa forma o tipo sia stato distinto con nomi diversi, e che alcune forme apparentemente diverse e perciò designate con nomi distinti, per più mature indagini si riconoscano ora appartenere ad una medesima specie, e perciò doversi riunire ed indicare con un solo nome. Però questo appunto costituisce il lavoro più ingrato ed il compito più arduo al quale abbiamo da sobbarcarci. A ciò fare ci incombe il dovere di riconoscere il valore dei titoli, per i quali una forma ha diritto ad essere riconosciuta come tipo specifico, eliminando quelli che non possano per avventura vantare eguale legittimità, facendo per tal modo cessare possibilmente quella confusione, che esiste nella nomenclatura delle Diatomee, che è il più forte ostacolo a quelli che sarebbero attratti ad intraprenderne lo studio.

Ma quali saranno le norme da seguire in tanto delicata ricerca? In altre parole: quali sono i caratteri diagnostici delle Diatomee, per i quali le une dalle altre specificamente si distinguono? Tale fu la domanda che feci a me stesso, quando presi a studiare seriamente questo interessantissimo ordine di organismi, e questo istesso fu ed è il soggetto che mi tiene più perplesso. Difatti non v'è chi ignori come nulla sia più difficile nello studio della Natura quanto il determinare la specie fissandone i limiti precisi, cosicchè da tale difficoltà alcuno si argomenti a negare l'esistenza di quei limiti. Senza fermarmi su l'assurdità di simile dottrina, la quale d'un sol tratto annullerebbe l'opera dei sommi che ci precedettero nello studio della Natura distruggendo la scienza stessa, farò notare come nel fissare i caratteri specifici delle Diatomee le difficoltà di lunga mano si accrescano per l'estrema piccolezza di quelli organismi, per la quale non ci sarà dato mai l'isolare una forma vivente per sorvegliarne le successive evoluzioni, e così determinare i caratteri indipendenti dalla evoluzione organica. Tali caratteri riconosciuti costanti ed invariabili senza tema di errore costituirebbero

le note da servire di carattere specifico nella determinazione di un tipo distinto da qualunque altro ed autonomo.

In tale stato di cose ed in attesa di chi sappia ritrovare mezzo di far vegetare una Diatomea in una cellula ristretta, come il Micologo fa sviluppare i funghi inferiori in una cellula umida, vediamo quali siano i caratteri, che presentano queste maravigliose creature, i quali caratteri ci possano per avventura almeno provvisoriamente servire alla determinazione della specie. Siccome però è più savio consiglio l'assumere di trattare un punto alla volta, allora che molti se ne presentino e tutti quasi egualmente ardui, ci contenteremo per ora trattare di un solo, e questo sia la striazione, la quale distingue generalmente quasi tutte le Diatomee, e ne forma il più bello e curioso ornamento. Questa particolarità appunto di vedere oggetti così minuti, alcuni dei quali rimangono interamente impercettibili ad occhio nudo per quanto acuto possa essere, per magistero del microscopio presenta alla dotta curiosità dello scienziato una superficie maravigliosamente decorata di minutissime strie o di serie di punti, e fu precisamente la qualità che colpì da vantaggio qualunque attento osservatore. Così dal momento che le Diatomee vennero studiate e descritte, notata in primo la circostanza della striazione, in seguito si tentò determinarne la finezza calcolando quante se ne contenessero in un dato spazio, come, per esempio, in un centesimo di millimetro.

Fino che le Diatomee che si andarono riconoscendo e studiando, non furono così minute, e che sopratutto la striazione non fu tale da richiedere i più forti ingrandimenti nel Microscopio e la più accurata modificazione della luce nella illuminazione, non sursero gravi difficoltà nel determinare il numero delle strie, che si contenevano in un dato spazio. Ma quando i progressivi perfezionamenti del Microscopio permisero il discernere le granulazioni delle Grammatofore, dei Pleurosigma, delle Nitzschie, e delle Anfipleure, i tentativi dei diversi osservatori nel misurare la finezza di quei dettagli, che ne ornavano la superficie valvare condussero a risultati grandemente discordi. L'autorità dei nomi degli osservatori vietava l'attribuire ad errore la discrepanza nella determinazione di quelle misure, quindi ebbe origine l'opinione che il numero delle strie contenute in un dato spazio su le Diatomee non sia costante; perciò il numero delle strie fu riguardato come variabile, per cui non potrebbe costituire un carattere attendibile nella determinazione dalla specie. Ma quella divergenza nei risultati ottenuti molte volte dipendeva dall'avere preso ad esame e a misurare tipi non esattamente

identici nè appartenenti talvolta all'istessa specie o varietà; oppure era trista conseguenza di metodo fallace nell'eseguire la misura. Allorchè, per modo d'esempio, i signori Sollitt e Harrison di Hull asserirono avere ritrovato che il numero delle strie trasversali dell'*Amphipleura pellucida* era non meno di 120,000 per pollice (*inch* misura inglese) pari a strie 5200 al millimetro, certamente furono condotti in errore, mentre tutti i notevoli progressi, che si sono verificati da quel tempo negli ingrandimenti del Microscopio in questi ultimi anni non permettono arrivare tanto oltre nella definizione delle strie; oltre che una tale misura notevolmente sorpasserebbe il limite della visibilità, quale venne stabilito dall'illustre Professore Helmholtz. L'uso di calcolare i minimi dettagli nelle Diatomee e misurarli a mezzo del micrometro oculare sarebbe l'ottimo da seguire, come fuori d'ogni dubbio è il più spedito, se in pari tempo fosse pratticamente di sicuro impiego. Ma quando trattasi di dettagli squisitamente fini e tali che quasi sfidano il potere risolvente dei più perfetti e potenti Microscopi, rimane estremamente difficile e soggetto ad errore il determinare con certezza e precisione il numero esatto delle strie che si hanno in un grado del micrometro oculare, il quale avendo tanto minor valore quanto più forte dovette essere l'ingrandimento adoperato, nel venire moltiplicato il numero delle strie di un grado del micrometro per il valore di questo, l'errore probabile diviene tanto maggiore, e tale ne è il risultato da essere ben lontano dal vero. Così avvenne ai due succitati micrografi di essere tratti in errore dall'impiego di un fallace sistema di enumerazione di strie nell'Anfipleura, che valutarono grandemente al disopra del vero.

Così la difficoltà nella determinazione del numero delle strie per un dato spazio della valva delle Diatomee, la discrepanza nel precisare quel numero per parte dei diversi osservatori, unite alla mania di quelli che non vorrebbero riconoscere e ammettere l'esistenza della specie, i quali quantunque destituiti di qualsiasi argomento positivo nè confortati dall'esperienza, pure pretendono riguardare qualunque forma organica come accidentale e quale transitoria condizione di un organismo in attuale incessante evoluzione; tutte queste circostanze hanno portato a negare qualunque valore di carattere specifico al numero delle strie che ricoprono una data superficie nella valva della Diatomea.

A prova di che cade in acconcio il ricordare la discussione interessante, che ebbe luogo su la pretesa identità della *Navicula rhomboides*. Erbhg. della *Navicula crassinervis*, Breb. e della *Frustulia Saxonica*, Rabnh. A questa

presero parte i ch. Dr. Dallinger e Dr. Wallich, e i signori Slack e Ingpen, e la controversia venne agitata non tanto al punto di vista dello studio delle Diatomee, quanto in ragione dell'adoperarsi le valve di quelle a cimentare la qualità e il valore degli obiettivi. In quella discussione vennero ancora riportate le autorità degli illustri Micrografi Kitton fra gli Inglesi e fra gli Americani il Professor H. L. Smith ed il Colonnello Dr. Woodward, e quella ebbe luogo avanti la Reale Società Microscopica di Londra nell'adunanza del 6 Decembre 1876 in occasione di uno scritto lettovi dal Dr. Dallinger. La grandissima analogia fra quelli tre tipi è innegabile, è anzi evidente; ma da tale analogia si può dedurre l'identità? Per quanto io possa essere tacciato di temerità mi sia permesso dire con tutto il rispetto alla ricordata pleiade di illustri naturalisti, che la deduzione è tutt'altro che certa, e che se per tal modo si dovesse argomentare nello studio della Natura, un poco alla volta si arriverebbe a distruggere qualunque classificazione, annullando ogni nozione di specie, e lascio pensare quanta jattura alla scienza ne conseguirebbe. Ridotti dalla eccessiva minutezza di questi organismi a dovere contentarci di arguire da quanto materialmente ed attualmente appare ai nostri occhi, supplendo con probabili deduzioni alla mancanza di argomenti certi e di esperienza, sembrami dover essere riguardato qual canone di ragionevole critica, che quando in una raccolta sufficientemente abbondante e pura di Diatomee si presentino più forme analoghe tra di loro, le quali con numerosi esemplari e diverse grandezze rappresentino una continuata gradazione fra i due termini più distanti della serie, allora soltanto sarà ragionevole arguire con tutta probabilità che quelle forme diverse appartengono ad una sola specie. Da questo consegue qual corollario che un deposito di Diatomee fossili non possa fornire argomento a probabili deduzioni in materia, mentre in tal caso avremo un singolare mescolamento di generi e specie diverse, e non un insieme che ci si mostri come di componenti una sola stirpe e famiglia e una stessa generazione.

Ora riconducendoci al caso della pretesa identità fra i tre sopra ricordati tipi, non si è fatto cenno nella discussione del punto controverso di alcuna raccolta, la quale presentasse confusi quei tre tipi, a meno del deposito di Cherryfield in America, nel quale si ebbero soltanto la *Nav. rhomboides*, e la *Nav. crassinervia*. Perciò il non conoscersi finora alcuna raccolta di Diatomee viventi nella quale presentansi confuse quelle tre forme, mi sarebbe sufficiente argomento a non ammettere per ora la pretesa identità.

torio con apposito apparecchio di lenti. La immagine della Diatomea per tal modo si presenta enormemente ingrandita su l'opposta parete, alla quale Però questo non è se non un argomento negativo, e quella identità se non rimarrebbe provata, potrebbe rimanere possibile. Ma mi si offre ancora un argomento positivo il quale (se non mi inganno a partito) a mio senso vieta il potere ammettere che quelle tre forme non sieno altrettanti tipi distinti ed autonomi. Nell'esaminare attentamente quelle tre forme riconobbi che la striazione trasversale della *Frustulia Saxonica* nella così detta Tipen-platte di Möller è di 3400 strie al millimetro, mentre la longitudinale ne novera 3600; per l'istessa misura la *Navicula crassinervia* ha 1400 strie trasversali, mentre il numero delle longitudinali è non meno di 2400. E si dirà dopo ciò che questi tre tipi non sono che una medesima specie? Fin ad ora nessuno argomento positivo, nessuna esperienza ci autorizza a ritenere che una qualsiasi Diatomea abbia tanta irregolarità nella striazione per modo non solo che un frustulo abbia strie trasversali notevolmente più fine delle longitudinali, mentre in altro frustulo della medesima specie avvenga il contrario. So bene che in talune specie le strie sono distribuite in modo singolarmente irregolare nella superficie della valva, come avviene per modo di esempio nella *Eunotia Formica*, Ehrbg.; ma per la distribuzione delle linee nei tre surricordati tipi abbiamo invece lo spettacolo di una stupenda regolarità nell'intera superficie valvare.

Però, avendo io condannato come inducente in errore il sistema di calcolare il numero delle strie a mezzo del micrometro oculare, al quale sistema attribuii per la maggior parte la discrepanza nella determinazione del numero delle strie per parte dei diversi osservatori; avendo in seguito parlato di numerazione di strie da me fatta nella direzione trasversale e longitudinale di tre differenti naviculacee, una delle quali è delle più difficili a risolvere fra quante si conoscono; mi si domanderà quale sia il così sicuro processo da me seguito nella determinazione di tante minute particolarità strutturali, per modo che da quella mi sia sentito tenuto a dissentire dal giudizio di Micrografi di incontestata autorità. Eccomi pronto a soddisfare alla troppo giusta domanda, affinchè ognuno possa giudicare se a torto io mi senta sicuro, e quando venga riconosciuta l'esattezza del processo da me seguito, ciascuno ne possa fare suo prò. Nella pratica abituale della fotomicrografia, con la quale sotto l'ingrandimento costante di 535 diametri ho fatto una collezione di circa 3000 immagini di Diatomee, io mi servo delle immagini così dette *negative* sul vetro per farne la projezione nel mio labora-

immagine sovrappongo una striscia di carta, tagliata in misura esatta da rappresentare $\frac{1}{100}$ di millimetro preso in identiche condizioni, cioè misurato su di una immagine fotomicrografica di un millimetro diviso in cento parti e amplificato 535 diametri. Nel sovrapporre la carta alla parte dell'immagine, che sia la più precisa e regolare, conto con il dito o marco ogni stria o granulo e il numero ottenuto moltiplicato per cento mi determina quante strie o granuli, si abbiano in un millimetro, preso nella direzione longitudinale, nella trasversale, o nella obliqua secondo i casi. Non credo che alcuno potrà negarmi che questo metodo sia il più certo, mentre l'errore possibile trovasi ridotto a tale punto da essere appena attendibile. È bensì vero che questo processo implica l'impiego della fotografia, la quale quantunque sia tale da essere di grandissimo giovamento al Naturalista ed al Micrografo, pure ancora non è alla portata e nell'uso di tutti; si deve però notare che quantunque non con eguale facilità pure si può ottenere il medesimo risultato con l'impiego della *Camera lucida*, ma forse anche meglio con la projezione diretta della Diatomea a mezzo di buon Microscopio solare.

Un tal metodo di misurazione ho utilizzato per vedere di formarmi un retto giudizio sul numero delle strie, se quello sia o no costante nella specie, e però se quello sia carattere attendibile nella determinazione della specie. Nella « *Synopsis of the British Diatomacee* » Vol. 2°, Pag. XXIV della Introduzione lo Smith così si esprime: » Che le strie.... siano mutuamente parallele o radiate nella loro disposizione, che raggiungano la linea mediana o siano assenti da porzione maggiore o minore della superficie valvare, – che le cellule istesse siano disposte a quinconce, e le strie nella loro disposizione trasversale conseguentemente siano oblique o trasverse in relazione al margine o alla linea mediana – la distanza relativa delle strie e la loro maggiore o minore distinzione – sono tutte qualità che possono sicuramente riguardarsi di specifica importanza,... quantunque soggette a lievi modificazioni, prodotte da accidentalità di luogo e di età.... ecc. » Per quanto grave fosse questa autorità pure ho voluto riportarmi all'esperienza ed al fatto che è il solo giudice supremo e inappellabile in tale materia. Io mi sono detto che due forme riscontrate in località e tempi diversi, quantunque nell'insieme dei caratteri sieno grandemente affini, pure possono costituire due tipi vicini l'uno all'altro, ma non per questo meno autonomi e indipendenti, destinati a riprodurre le proprie forme a traverso un numero indefinito di generazioni. Questo noi vediamo aver luogo in tanti altri ordini

di esseri e di organismi, che ci cadono ad ogni ora sott'occhio. Che queste forme si dicano meglio varietà oppure specie mi è totalmente indifferente, dipendendo la distinzione fra le due parole dal diverso valore che loro comunemente si dà, valore e significato grandemente elastico; purchè però si riconosca la permanenza della forma nelle successive generazioni, la quale permanenza esatta della forma in ogni minima particolarità di struttura nelle Diatomee rimase dimostrato quale legge costante dallo studio da me fatto su le Diatomee dell'epoca del carbone.

Quando pertanto mi fu dato porre la mano in alcun luogo sopra una raccolta costituita da miriadi di frustuli appartenenti evidentemente ad una sola specie e formanti una sola famiglia, mi proposi subito il farne un esame il più accurato, mentre tenni sempre per fermo che soltanto in tali circostanze si possa trarre criteri più probabili a riconoscere la latitudine delle modificazioni possibili della forma tipica dentro i limiti della specie. Tali circostanze sono tutt'altro che frequenti, ma pure a tempo a tempo si danno; che anzi ricordo con amarezza come nei primordi del mio studio su le Diatomee, ansioso come io era di conoscere nuovi tipi lamentavo l'incontrare raccolte costituite da una o due forme soltanto, e le rigettavo non conoscendo ancora il partito, che ne avrei potuto trarre. In raccolte di tale natura formate da una congerie di frustuli appartenenti ad una medesima specie, vediamo schierati avanti noi una serie di forme varianti tra loro in grandezza e presentanti talvolta notevoli variazioni nel profilo. Ma nel fare la rivista delle diverse dimensioni e dei differenti profili dei frustuli un attento esame ci fa conoscere come nelle diverse misure e profili esista una completa gradazione, le quali con lievi sfumature ci mostrano e ci provano l'identità dei termini estremi della serie. Oltre che nel vedere contemporaneamente come la disposizione e la qualità delle strie o file di granuli ed ogni altra particolarità di noduli o di qualsiasi altra scoltura delle valve si mantengono perfettamente costanti ed uniformi, siamo fatti certi che tutti i frustuli della raccolta malgrado le differenze di misura e le variazioni di profilo appartengono alla medesima specie.

Una circostanza opportunissima a fare simili considerazioni mi si offerì da dodici anni e più, quando la parziale bontà per me dell'illustre Botanico di Ginevra Alfonso de Candolle gentilmente mi permise scegliere nei ricchissimi erbari alcuni piccoli brandelli di Utricularie di distintissime località, i quali mi si presentavano incrostati da Diatomee. Tre di queste Utricularie provenivano l'uno da Rio Ianeiro, da Giava il secondo, e l'altro dal Se-

negal, e tutte tre ritrovai egualmente cariche di frustuli di *Eunotia Formica*, Ehrbg. A proposito di questo mi sarà permesso richiamar l'attenzione su la circostanza singolare di ritrovare la medesima specie di Diatomea molto rara sempre su l'istessa pianticella, quantunque questa fosse proveniente da tre diverse parti principali del globo, la quale circostanza potrebbe a mio avviso indurre a riguardare questa Diatomea meglio che quale epifita per parassita. Le tre diverse raccolte, nel mentre che mostrarono subito la forma caratteristica dell'*Eunotia Formica* con il rigonfiamento angolare nel centro, le costrizioni intermedie, e tutti gli altri caratteri di noduli e pseudonoduli, di linee trasverse moniliformi interrotte da linea jalina eccentrica e inegualmente distribuite racchiudevano ancora numerosi frustuli di molto differenti profili e grandezze ma tutti forniti delle medesime particolarità strutturali da non permettere il più lieve dubbio che non appartenessero tutti alla specie *Eu. Formica*. L'asse longitudinale delle forme maggiori era quintuplo di quello sia nelle minori, ed in queste non vedesi indicazione di rigonfiamento centrale, mentre meglio sono o lineari o con lieve costrizione. Ho innanzi agli occhi una serie di fotogrammi, che mi feci con amplificazione di 535 diametri, rappresentanti l'intera serie delle diverse forme: nel vedere l'ineguale distanza delle strie in questa Diatomea e specialmente negli esemplari più grandi e caratteristici, strie grandemente ravvicinate nelle estremità, rade nel mezzo, e più rade ancora nelle due costrizioni intermedie, nel seguire le graduali differenze di profili e grandezze è impossibile rifiutarsi all'idea che le diverse forme e grandezze dei frustuli non rappresentino altrettanti stadi di sviluppo, e che in questa Diatomea per lo meno abbia luogo un'*auxesi* bilaterale, e forse anche una contemporanea dilatazione o stiramento delle parti intermedie fra il centro e le estremità. Le diverse graduali forme di questa Diatomea furono altresì vedute e disegnate dal Ch. Micrografo Alberto Grunow nello studio che fece e pubblicò su le Diatomee di acqua dolce dell'Isola Banka.

In questo come in altri simili casi nel considerare la non interrotta serie di grandezze e profili, nel mentre che in pari tempo i caratteri strutturali tutti rimangono assolutamente identici, necessariamente siamo condotti a riguardare tutti quei frustuli quantunque di varie dimensioni e profili come appartenenti ad una medesima specie, ma semplicemente rappresentanti diversi gradi di sviluppo organico. Però in questi confronti ed in simili esami il carattere, la costanza del quale sia più difficile a con-

statàre, è la finezza delle strie o file di granuli, che adornano le valve delle Diatomee, cioè quale sia il numero di quelle strie che si contiene in una data frazione di millimetro, e il controllarne quindi l'immutabilità nelle svariate grandezze di frustuli appartenenti ad una specie medesima. E tanto più mi parve necessario il decidere un tal punto in modo irrefragabile, inquanto che su tale rapporto precisamente regna la maggiore discrepanza nelle sentenze di coloro, che sono reputati della maggiore autorità su tale materia, ed inoltre per la somma importanza delle deduzioni da trarne ad elucidazione delle leggi biologiche riguardanti l'intero ordine delle Diatomee. Fra gli osservatori più acuti ed autorevoli primeggia il Ch. Dr. Wallich della di cui personale conoscenza io mi onoro, e chiedogli venia se puro amore di verità mi costringe a dissentire da Lui. Esso nella seduta della Reale Società Microscopica di Londra al 3 Gennaio 1877 lesse una memoria = *On the relation betwen the Developement, Reproduction, and Markings of the Diatomacee* = In quella l'autore dice che « mentre il » numero *totale* delle strie sopra la valva della Diatomea può rimanere quasi » uniforme in ogni valva dell'istessa specie, il numero delle strie sopra una » parte frazionale della valva (come la millesima parte di pollice) ammette » precisamente tanta variazione, come la misura della valva e procede simul- » taneamente con essa durante la divisione ma non in appresso. » Il parere dell'insigne Naturalista non poteva essere enunciato più esplicitamente; però concorda una tale sentenza con l'esperienza? vediamolo. Ho di sopra ragionato del metodo da me usato della projezione fotomicrografica delle Diatomee per enumerare le minutissime strie contenute in una parte frazionale di millimetro, e dopo la minuta descrizione che ne ho dato non credo che alcuno possa oppugnare la certezza dei risultati ottenuti da tale processo. Di questo io faccio uso abitualmente, e questo mi pone in grado di dimostrare al Ch. Dr. Wallich essersi male apposto su tale argomento, forse condotto da idee preconcette, e dal non avere verificato la cosa con la propria esperienza, fidatosi troppo delle varianti determinazioni del numero delle strie per parte dei diversi Micrografi, i quali probabilmente seguirono in quelle determinazioni il fallace processo del micrometro oculare.

Ogni qual volta la sorte propizia mi dà di incontrare un acervamento di Diatomee appartenenti tutte ad una sola specie, se pure anche potesse racchiudere contemporaneamente frustuli di altro genere, mi studio trarre profitto dalla opportunità istituendo diligente esame onde riconoscere l'estensione delle deviazioni della forma tipica, le quali deviazioni siano con-

sentanee alla idiosincrasia della specie. In tali occasioni riconosciuti i tipi e le dimensioni di frustuli più l'un dall'altro distanti, i quali però si ricongiungano tra loro per una serie continuata di grandezze e di forme intermedie da non permettere di nutrire alcun dubbio su l'identità della specie, alla quale appartengono, procedo a ritrarre a mezzo della fotomicrografia l'immagine del più piccolo frustulo e del più grande, adoperando sempre l'amplificazione di 535 diametri. Nel presentarsi successivamente le due immagini enormemente ingrandite su la parete con l'apparecchio di projezione ne conto le strie contenute in $\frac{1}{100}$ di millimetro; *fin ora* non una sola volta mi è arrivato di trovare che il numero delle strie non fosse costante. Così in due memorie da me pubblicate negli Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, l'una nella Sessione del 19 Marzo 1876, con il titolo = Nuovi argomenti a provare che le Diatomee riproduconsi per germi = e l'altra nella Sessione del 22 Gennajo 1877, cioè = Osservazioni e note a elucidazione dello sviluppo delle Diatomee = parlai dettagliatamente di due raccolte pure da me ottenute e studiate, nella prima delle quali non ebbi altro che la *Pinnularia stauroneiformis*. Sm. var. *Latialis*, l'altra conteneva unicamente frustuli innumerevoli di *Cyclotella Pisciculus* Ehrbg. Valve delle due specie scelte appositamente fra tutte le più grandi e le più piccole furono ritrovate di identica finezza di strie. Eguali ricerche con sempre eguale risultato ho avuto in questo anno su diverse specie di Diatomee della 1ª Centuria di preparazioni tipiche del D.r Eulenstein, e nominatamente su la *Navicula Jennerii* Sm. (*Scoliopleura tumida*), su la *Navicula* (*Pinnularia*) *major* Kz, nell'*Istmia enervis*, Eherbg, e nella *Navicula didyma* Kz di una preparazione di Bourgogne di Parigi. Dopo tali così concordi risultati non parmi si dia più luogo a dubitare che per lo meno in talune specie la finezza delle strie non sia eguale nelle valve di diverse dimensioni, per cui in quelle specie almeno la finezza delle strie è determinata dalla idrosincrasia della specie, e perciò le marche o strie e la loro finezza è *una qualità di specifica importanza* come scrisse Smith.

Finalmente a convincere ulteriormente chi fosse di contrario parere, che il numero delle strie o file di granuli si mantiene costante nelle Diatomee grandi e piccole purchè appartengano alla medesima stirpe, e che quindi non si può rifiutare al numero di quelle strie il valore di carattere specifico, dirò come nella succitata Centuria di preparazioni tipiche di Diatomee ho una bellissima preparazione di *Isthmia enervis* Ehrbg. *in situ*, e in quella vedonsi i frustuli aderire per un angolo gli uni e gli altri, e tuttora

scorgonsi attaccati al peduncolo. Un medesimo peduncolo ritiene frustuli grandi e piccoli insieme uniti; così non mi si poteva presentare occasione più favorevole a decidere la controversia. Riprodussi pertanto con l'usato ingrandimento frustuli di dimensioni le più fra loro disparate; misurai le file di granuli minuti dei cingoli o zone in ambi i casi; nè ritrovai la minima discrepanza fra gli uni e gli altri. Non credo pertanto che alcuno possa ancora nutrire ragionevole dubbio: che se alcuno amasse meglio riferirsi all'esperienza propria nulla mi sarà più gradito, vedendo per tal modo confermato il fatto dall'altrui esperienza.

Parlando di sopra dell'*Eunotia Formica* Ehrbg. io ricordai quale nota caratteristica di questa rara e interessantissima specie come le strie moniliformi, che ne adornano le valve, sieno distribuite irregolarmente e in particolar modo siano aggruppate e fitte alle due estremità, e rade nelle parti intermedie. Con questa osservazione dunque ho fatto intendere qualmente io non ritenga il carattere delle strie del loro numero come circostanza di valore specifico assoluto, ma bensì lo riguardi di tale peso solamente quando la distribuzione delle strie su la superficie valvolare sia regolare, la quale condizione si aveva nella grande pluralità dei casi in talune forme, come nelle Naviculacee, nelle Sinedree e in tante altre. Ma v'è ancora altra considerazione, che desidero porre innanzi a chiarire meglio il mio modo di vedere su l'argomento. Nel grande numero di tipi diversi di Diatomee da me riprodotte con la fotomicrografia e misurate con il sistema della projezione devo confessare che nell'esaminare talune specie ancorchè bene determinate, ma contenute in diverse preparazioni, ho ritrovato qualche differenza in forme dell'istessa specie in ordine al numero e finezza delle strie. Però quando mi sono incontrato in tali discrepanze queste non furono mai di grande rilievo ragguagliatamente e in proporzione del loro numero, così che la differenza non eccedette mai più di $\frac{1}{5}$. Però in pari tempo dichiaro altamente che sino ad ora non ho ritrovato la minima differenza, quando il confronto cadde su frustuli di Diatomee, i quali non solamente fossero della medesima specie, ma che ancora appartenessero alla medesima stirpe.

Quindi è che rimangono inconcusse tutte quelle deduzioni, che possono razionalmente trarsi dalla costante finezza delle strie in frustuli grandi e piccoli di una medesima specie e stirpe. Di tali deduzioni io parlai nella Memoria intitolata = Nuovi argomenti a provare che le Diatomee riproduconsi per germi =, la quale leggesi negli Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, Sessione IV del 19 Marzo 1876. In quella parlando di una

raccolta purissima da me fatta presso il fontanile, che incontrasi ai così detti campi di Annibale sul monte Cavo presso Rocca di Papa, la quale raccolta era unicamente racchiudente miriadi di frustuli della *Pinnularia stauroneiformis* Sm. var. *Latialis*, la quale varietà io credetti dovere costituire fondato su la troppo grande differenza nel numero delle strie della forma di Monte Cavo, che era di 1900 al millimetro da quello del tipo Smithiano, il quale non ne conta più di 1200 nell'istesso spazio, differenza perciò di oltre $\frac{1}{3}$, rimanendo assolutamente identici tutti gli altri caratteri. In quella occasione dalla costanza nella finezza delle strie nei frustuli più grandi e più piccoli, che si racchiudevano in quella raccolta, trassi argomento a sostenere 1° che per lo meno in quel caso la moltiplicazione non aveva avuto luogo per temnogenesi o fissione, mentre in tale ipotesi dal graduale rimpicciolimento delle valve e dei frustuli in conseguenza dell'incapsulamento di quelli, le strie dovrebbero di pari passo diventare da più in più fine, avverandosi quanto esplicitamente dichiarò il Ch. Dr. Wallich, che « il numero delle strie in una parte frazionale della valva..... ammette precisamente tanta variazione, come la misura della valva »; 2° che nella dimensione dei frustuli deve aver luogo l'auxesi per addizione bilaterale di nuove strie e conseguente dilatazione negli anelli o zone che congiungono le valve: 3° che dunque la Diatomea, benchè rivestita di un derma siliceo, va soggetta a graduale sviluppo e distensione, mentre la silice trovasi probabilmente in combinazione quale costituente della cellulosa, rimpiazzando in quella il carbonio, la quale sostituzione venne dimostrata possibile dagli studi dei Chimici Signori Friedel e Ladenbourg. In conferma poi della deduzione indicata al secondo punto, cioè che nelle Diatomee l'auxesi debba aver luogo per addizione bilaterale di nuove strie e non per aumento periferico, come avviene nei Crostacei, mi sia permesso l'addurre un ulteriore argomento. Ho sopra ricordato come nelle raccolte formate da una sola specie di Diatomee sempre si riscontrino frustuli grandi e piccoli per modo che l'asse longitudinale di quelli sia la metà e talvolta ancora molto meno di questi. Chiunque siasi adoprato ad esaminare al Microscopio questi interessanti organismi e lo abbia fatto non solamente nelle preparazioni che ci può fornire il commercio, ma meglio provandosi a ricercarle in natura e a farne raccolta, facilmente ha avuto agio a riscontrarne di pure, e le fredde sorgenti alpine frequentemente gli avranno presentato ricchissime e pure raccolte di *Odontidium hyemale*, Kz. In tali circostanze esaminando ad una ad una le differenti grandezze di valve

e frustuli dell' istessa specie, se ne prenderà a determinare le misure degli assi longitudinali e dei trasversali, nel mentre che riconoscerà come la misura degli assi longitudinali differisca grandemente per modo che gli uni non saranno più della metà e molto di frequente una frazione assai minore degli altri, nel confrontare gli assi trasversi di quelle valve e frustuli si ritroverà nessuna o se pure minima differenza. Eppure nessuno potrà negarmi, che il rimpiccolimento graduale dei frustuli, che necessariamente consegue dall'incapsulamento dei frustuli quando in quelli ha luogo la moltiplicazione per fissiparità, come luculentemente venne dimostrato dal Ch. Dr. Pfitzer di Bonn (Untersuhungen und entwichlung der bacillarieen), dovrebbe produrre tanta variazione negli assi trasversi quanta se ne ha nei longitudinali.

Amore di verità e impulso di intimo convincimento, frutto di lunghe e pazienti meditazioni e ricerche, mi condussero ad esporre il mio qualunque modo di vedere su la striazione delle Diatomee e sul significato e valore di quelle in ordine alla determinazione della specie, e ad indicarne talune logiche deduzioni, che ho creduto doverne trarre. Conosco di dipartirmi in queste mie idee dalla opinione dominante e dal sentire di persone autorevolissime, che altamente onoro, e quindi non è che forza di persuasione, la quale mi fa vincere ogni trepidanza. Nutro fiducia che quelli, lungi dal prendere in mala parte queste mie osservazioni, vorranno anzi prenderle in matura considerazione, tanto più che le mie opinioni su l'argomento sono frutto della abituale pratica di ritrarre le immagini delle Diatomee a mezzo della Fotomicrografia, la quale applicata ad ogni ramo di ricerche di scienze naturali e sperimentali non potrà mancare di portare egualmente utili servigi.

Reputo pertanto fare cosa utile e gradita ai Micrografi, e più particolarmente agli studiosi di Diatomee, l'aggiungere qui appresso un elenco di misure e numerazioni di strie, che ne adornano la superficie valvare, il quale elenco ho tratto del mio libro di note, dove volta per volta inscrissi il numero delle strie corrispondenti ad un millimetro con il sopradescritto processo della projezione fotomicrografica.

Numero delle strie longitudinali e trasversali nelle Diatomee.

(a) Nome della Diatomea	Strie longitudinali	Strie trasversali
Epithemia Argus, Sm.	900	1200.
» constricta, Sm.	»	1450.
» Zebra, Kz.	1250	1700.
» gibba, Kz.	»	1600.
» turgida, Kz.	800	900.
» ocellata, Kz. var.	»	430.
» Musculus, Kz.	»	1750.
» ventricosa, Kz.	»	1530.
» granulata, Kz.	800	900.
» Hyndmannii, Sm.	670	»
Eunotia undulata Grun.	»	1070.
» tetraodon, Ehrbg.	»	1400.
» tetraodon, Ehrbg. var. diodon	»	2100.
» tetraodon, Ehrbg. var Diadema	»	2400.
» incisa, Greg.	»	1550.
» Indica, Grun.	»	1200.
» prerupta, Ehrbg.	»	1600.
» Soleirolii, Kz.	»	1200.
Synedra Talassotrix, Cleve (Messina)	»	1370.
» Sicula, Castracane	»	835.
» splendens, Kz.	»	1030.
» Ulna, Ehrbg.	»	970.
» formosa, Nautzsch	»	1030.
» crystallina Kz.	»	1200.
» pulchella, Kz. var.	»	2150.
» tabulata, Kz.	»	1320.
» affinis, Kz.	»	1150.
Grammatophora marina (Kz.) Sm.	1600	1600.
» angulosa, Grun. var.	»	1350.
» Oceanica. Ehrbg.	»	3850.
Nitzschia Formica, Hantzsch	1550	1550.
» linearis. Sm	»	3000.
» Amphioxys, Sm.	»	2000.
» Hungarica, Grun.	»	1800.
» sigmoidea, Sm.	»	1070.
» spectabilis. (Ehrbg.) Sm.	»	2750.

(a) Siccome la quasi totalità dei tipi riprodotti ed esaminati furono presi dal *tipen-platte* di Möller, così i nomi e l'ordine dei generi è quello del Catologo annesso a detta preparazione. Perciò l'Autore non intende con questo di approvare quell'ordine nè di accettare certe modificazioni nella nomenclatura, come, per esempio, la riunione al già eccessivamente esteso genere *Navicula* di tutte quelle forme che da Ehrenberg e da Smith furono inscritte nel genere affine *Pinnularia*.

Nome della Diatomea	Strie longitudinali	Strie trasversali
Nitzschia dubia Hantzsch.	»	2000.
Perrya eximia	»	975.
Mastogloia Dansei, Thw.	»	1450.
» Meleagris. Kz. var.	»	2000.
» Braunii, Grun. var.	»	1850.
» marginulata, Grun. var.	»	1600.
» exigua, Lew.	»	2600.
Achnanthes inflata, Grun.	»	970.
» subsexilis Kz.	»	970.
» longipes, Ag.	1400	»
» brevipes, Ag.	1100	1700.
Cymbosira Aghardii, Kz.	»	1250.
Achnanthidium lanceolatum, Breb.	»	1400.
Cymbella Pisciculus, Ehrbg.	»	1250.
» heteropleura, Ehrbg.	»	da 900 a 1100.
» affinis, Kz. var.	»	1200.
» Helvetica, Kz.	»	da 1100 a 1300.
» Scotica, Sm.	»	1150.
» Kamtschatica, Grun.	1200	900.
» Navicula, Ehrbg.	»	1500.
» cuspidata, Kz.	»	1175.
Gomphonema robustum. Grun.	»	1230.
» acuminatum, Ehibg. var. coronatum	»	1400.
» dichotomum, var. trigibbum, Eul.	»	1030.
» capitatum, Ehibg.	»	1130.
» comune, Rhab.	»	1250.
Rhoichosphenia curvata Grun.	»	1670.
Navicula ambigua Ehrbg.	2609	1900.
» serians. Kz.	»	2200.
» Bohemica, Ehrbg.	»	1700.
» sculpta Ehrbg.	»	1450.
» limosa, Kz.	»	1900.
» quinquenodis, Grun.	»	1900.
» retusa, Breb.	»	650.
» Rheinardtii, Grun.	»	900.
» Slesvicensis, Grun.	»	1050.
» spherophora, Sm.	»	1600.
» amphisbena, Kz.	» (alquanto irreg.)	1500.
» amphisbena, Kz. var.	»	1300.

Nome della Diatomea	Strie longitudinali	Strie trasversali
Navicula permagna, Bailey	»	1275.
» firma, Kz.	»	1550.
» firma, var. affinis. Ehrbg.	»	1900.
» firma, var. amphiryncus, Ehrbg.	»	1570.
» firma, var. dilatata, Ehrbg.	1650	1650.
» firma, var. latissima, Ehrbg.	1650	1650.
» firma, var. Histchokii, Ehrbg.	»	2100.
» elegans, Sm.	»	1425.
» crassa, Greg.	»	1250.
» quadrata, Greg.	»	1500.
» Entomon, Ehrbg.	850	900.
» didyma, Kz.	»	1000.
» elliptica, Kz.	»	1325.
» Lyra, Ehrbg.	» (irreg.) da 700 a	800.
» Lyra, var.	»	1000.
» major. Kz.	»	630.
» oblonga, Kz.	»	850.
» gibba, Kz. var.	»	1000.
» hemiptera, Kz. var.	»	1400.
» peregrina, Ehrbg. Sm.	2400	750.
» viridis. Kz.	»	720.
» divergens, Sm.	» (irregolare)	1100.
» divergens, Sm. var.	»	1100.
» stauroneiformis, Sm.	»	1200.
» stauroneiformis, Sm. var. Latialis	»	1900.
» crassinervia, Breb.	2400	1400.
» rhomboides Ehrbg.	1700	2400.
Frustulia Saxonica, Rhab.	3600	3400.
Scoliopleura convexa, Grun	»	700.
» tumida (Breb.) Rabh.	»	1300.
Pleurosigma Balticum. Sm.	»	1450.
» attenuatum, Sm.	1050	1400.
» Hippocampus, Sm.	»	1750.
» formosum Sm.	1580	1900.
» angulatum, Sm.	»	2080.
Donkinia recta, (Donk.) Ralfs	»	2100.
Toxonidea insignis. Donkin	»	2250.
Pleurostaurum Iavanicum, Grun.	1300	1320.
» acutum, Rabh. var.	900	1300.
Endostaurum crucigerum (Sm.) Breb.	»	1400.

COMUNICAZIONI

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo.* – Il Prof. M. S. De Rossi presentò all'Accademia un opuscolo pubblicato testè a Parigi, contenente gli eminenti titoli scientifici, per i quali il Sig. Comm. Alessandro Cialdi veniva proposto a candidato e poscia eletto a socio corrispondente dell'Accademia delle scienze nell'Istituto di Francia.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Dispaccio dell'Emo Card. di Pietro, col quale S. E. partecipa la sosovrana approvazione dei tre nuovi soci ordinari Prof. Francesco Ladelci, P. Felice Ciampi, Dott. Matteo Lanzi. Per la nomina di questi venne anche dal S. Padre accordata la deroga agli statuti accademici, che esigerebbero la nomina di un solo membro della terna proposta.

2. Lettera del ch. P. Francesco Denza accompagnante il suo opuscolo intitolato « Commemorazione del P. Angelo Secchi e partecipante all'Accademia il nome monumentale, che dal Club Alpin, dietro l'iniziatfva del Ch. Sig. Senatore Torelli e dello stesso P. Denza, veniva assegnato al più alto osservatorio meteorologico italiano oggi esistente in sullo Stelvio. Questo osservatorio si chiamerà d'ora innanzi l'*Osservatorio Secchi allo Stelvio*.

3. Relazione dell'udienza accordata da S. S. al Comitato accademico, che umiliava al trono del S. Padre il volume XXX degli Atti accademici. Sua Santità accolse questa offerta con la più alta soddisfazione, volgendo parole amabilissime verso i soci della Pontificia Accademia de' Nuovi Lincei, che con le loro fatiche mantengono in alto pregio il progresso delle scienze fra i cattolici. Fu anche riferito come il Comitato per molte ragioni avesse giudicato conveniente di pregare S. S. a nome dell'Accademia di voler permettere alla medesima di fregiare il proprio albo dei soci della classe degli onorari col venerato nome della stessa Santità Sua. Il S. Padre accolse con sovrana degnazione e col più cortese compiacimento il desiderio dell'Accademia; e disse di voler vedere con piacere il Suo Nome nell'Albo della Pontificia Accademia de' Nuovi Lincei.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunitasi in comitato segreto procedette alla votazione per l'elezione dei nuovi soci della classe degli aggiunti proposti dal Comitato

direttivo – Essendo dodici i soci presenti, i canditati riuscirono tutti eletti col seguente risultato nelle votazioni:

Prof. Odoardo Zama, Ing. Giovanni Giovenale, Principe del Drago, Ing. Francesco de Curten; a pieni voti: Prof. Reffaele de' Rossi, Prof. Venanzio Paloni, con undici voti bianchi: Prof. Giuseppe Tuccimei, con dieci voti bianchi.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari. — Comm. A Cialdi, Presidente – Prof. V. de' Rossi Re – Prof. D. Colapietro – Conte Ab. Francesco Castracane – Prof. Ladelci – Prof. M. Azzarelli – P. S. Ferrari – Dott M. Lanzi. – P. F. S. Provenzali – P. G. Foglini – Principe D. B. Boncompagni – Prof. M. S. de' Rossi, Segretario.

Onorari. — Mgr. V. Vannutelli – D. Salvatore Vespasiani – Avv. C. Palomba.

Aggiunti. — Prof. Odoardo Persiani.

La sessione aperta legalmente alle 5 $^1/_2$, fu chiusa alle 7 $^1/_2$ pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicati dagli Accademici Segretari delle due Classi.* — Stamperia Reale di Torino di G. Paravia e C. In 8°.
2. *Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.* — Vol. VII. — Napoli, ecc., 1878. In-4.
3. CIALDI (Alessandro). — *Dei movimenti del Mare sotto l'aspetto idraulico nei porti e nelle rive.* In-4.
4. DE ROSSI (Michele Stefano). — *Copioso deposito di stoviglie ed altri oggetti arcaici rinvenuto nel viminale, e descritto da Michele Stefano De Rossi.* — *Estratto dal Bullettino della Commissione Archeologica Comunale anno* 1878. Roma, coi tipi del Salviucci, 1878. In-8°
5. GILBERT (Ph.) — *Étude historique et critique sur le Problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par Ph. Gilbert. Professeur a l'université Catholique de Louvain.* Bruxelles, F. Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, 1878. In-8°.
6. GILBERT (M. Ph.) — *Sur un théoreme de M. Villarceau; remarques et conséquences; par M. Ph. Gilbert.* Gauthier-Villars, ecc., Paris, ecc. In-4°.
7. LE PAIGE (M. C.) — (Extrait de la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, Tomo IV livraison de mars 1878). — *Sur une transformation de déterminants; par M. C. Le Paige*, ecc. Bruxelles, F. Hayez, imp. de l'Acad. royale. In-8°.
8. —— *Académie Royale de Belgique.* (Extrait des Bulletins, 2me série, tome XLV, n° 2; février 1878). — *Sur quelques Théorèmes de Géométrie supérieure par M. C. Le Paige*, ecc. Bruxelles, impr. de F. Hayez. In-8°.
9. LOMENI. (A.) — *Di alcuni riflessioni sopra la dispersione. Nota di A. Lomeni*, In-8°.
10. *Nactrag. Holzschnitte, ecc.* In-4°.
11. *Notice sur les travaux de M. Le Comm. Alexandre Cialdi, Capitaine de vaisseau.* Tip. del Senato di Forzani e C. In-4°.
12. *Ulm Obersehwaben, Korrespondenzblatt des Vereins für kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben Professor Dr. F. Pressel.* — Ulm, 1876, ecc. In-4°.
13. *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleifses*, 1877. — X. Heft — December, ecc., *Redacteur*: Dr. Hermann Wedding. — Berlin, ecc., 1877. In-4°.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE VII^a DEL 16 GIUGNO 1878

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. ALESSANDRO CIALDI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

DIMOSTRAZIONE DEL QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE

NOTA
DEL PROF. VINCENZO DE ROSSI RE

Ho l'onore di presentare all'Accademia una breve nota intorno ad una proposizione elementare di geometria che, pel corso di venti secoli, ha lungamente affaticato le menti di molti geometri i quali ne cercarono la dimostrazione sembrando loro che, per l'assenza di questa, restasse alquanto oscurato quel capolavoro di logica che sono gli *elementi* di Euclide; intendo dire della proposizione assunta dallo stesso Euclide per quinto postulato:

Se due linee rette nello stesso piano siano tagliate da una terza la quale formi con esse angoli interni dalla stessa parte in somma minori di due retti, le medesime sufficientemente prolungate da quella parte dovranno necessariamente incontrarsi.

Questo lavoro potrà per avventura sembrare inutile a quei geometri i quali, credendo scorgere nella indicata proposizione tutti i caratteri di una incontrastabile evidenza, l'hanno a dirittura collocata fra gli assiomi; ma con loro buona pace io questi caratteri di evidenza non ve li veggo,

e la esperienza ripetutamente fattane nello insegnamento mi ha dimostrato come i giovani allievi assai più facilmente ammettono senza ombra di prova che:

Una linea retta cadendo sopra un' altra forma due angoli che sono ambedue retti, o presi insieme valgono due retti. (*a*) O che:

Due linee rette le quali s'interseghino formano angoli opposti al vertice eguali fra loro. (*b*) Od anche che:

Il cerchio non sega il cerchio in più di due punti (*c*)

e così dicasi di tante altre proposizioni delle quali pure si suol dare la dimostrazione, che non quella che forma oggetto della presente nota. Però io mi penso che, così facendo, essi abbiano avuto in animo piuttosto di non seminare la diffidenza nell'animo dei giovani allievi, mostrando loro come l'edificio geometrico nel quale ogni asserzione è provata a rigor di logica, poggi poi quasi intieramente sopra un fondamento che *si chiede in grazia* che venga ammesso; sebbene non giunga a comprendere quanto la scienza possa avvantaggiarsi di questa specie di giuoco di prestigio.

A così pensare mi conforta il gran numero di sommi geometri tanto dell'antichità che dei tempi moderni, da Aristotele e Tolomeo fino a Simpson D'Alembert, Bezout e va dicendo, i quali non si acconciarono affatto a ritenere la citata proposizione come per sè stessa evidente; e gli sforzi che in ogni tempo si fecero per giungere a dimostrarla. Senza qui citare una lunga serie di nomi e di tentativi, mi basterà ricordare i più recenti; del Legendre, il quale si affaticò a dimostrare senza il soccorso della teoria delle parallele che - *la somma dei tre angoli di un qualsivoglia triangolo è sempre uguale a due retti* - e se non vi riuscì completamente, vi si avvicinò però tanto che ben poco lasciò a desiderare: del Gauss, che riprese questo stesso tentativo del Legendre, e ne fece per ben cinquant' anni oggetto delle sue meditazioni; ciò almeno riferisce il signor Colonnello A. Massimino in un suo recente opuscolo (*d*) nel quale

---

(*a*) Euclide — Prop. XIII. Lib. I.

(*b*) Euclide — Prop. XV. Lib. I.

(*c*) Euclide — Prop. X. Lib. III.

(*d*) *Sugli elementi — di — geometria di Euclide — e gli studi geometrici — Sulla teoria delle parallele — di M. P. Lobatschewsky — ed il saggio critico — Sui principii fondamentali della geometria elementare — di I. Hoüel — considerazioni — di — Alessandro Massimino — 1870 Paravia.*

si fa a proporre un nuovo fondamento alla teoria delle parallele, che però ha qualche analogia col tentativo fatto allo stesso oggetto dal Kirchen, e presenta i medesimi difetti.

Meglio di ogni altro riuscì forse nella impresa il Minarelli, la cui dimostrazione del postulato di Euclide può leggersi in calce a tutte le edizioni meno antiche degli elementi di Algebra e Geometria del Cav. Brunacci. Ma questa dimostrazione, benchè assai pregevole, non incontrò il favore dei geometri e non fu accolta nei trattati elementari: forse per la sua lunghezza (28 proposizioni, oltre 24 richiamate da Euclide, in tutte 56) e forse anche per un certo andamento algebrico che si ravvisa in qualche sua parte, e singolarmente nelle proposizioni 29ª e 36ª.

Così dunque, a malgrado del desiderio di veder tolta qualunque benchè leggiera nube di dubbio che offuschi lo splendore di quella certezza per la quale la geometria si distingue sopra ogni altra scienza, si lasciò sussistere questa deplorevole lacuna nei suoi elementi; e si venne a tale, come si esprime il lodato Massimino nell'opuscolo surrichiamato, da porre il tentativo di colmarla *alla pari con la ricerca della quadratura del circolo o del moto perpetuo; tanto che l'Accademia delle scienze di Parigi stabilì perfino di non più ricevere alcuna memoria su tal soggetto.*

Dopo tutto ciò, a chi nol creda lavoro inutile parrà forse somma arditezza la mia, di presentarmi a correre lo stesso arringo nel quale tanti sono caduti. Ma da questa taccia mi scuserà l'amore vivissimo che porto al rigore geometrico: amore che mi fece volgere i miei pensieri a questo oggetto fin da quando, uscito appena dagli studii, cominciai a dar private lezioni di matematica.

Non voglio tediar l'Accademia col racconto di tutti i tentativi da me fatti per giungere al fine, frustrati sempre da qualche paralogismo nel quale, alla pari di coloro che mi precedettero in questa ricerca, inavvertentemente io cadeva. Ora però mi sembra esser veramente giunto al bramato scopo, e con un andamento quasi perfettamente consono a quello delle altre dimostrazioni di Euclide. Pertanto se, come io credo, la nuova dimostrazione che io propongo pone veramente al coperto da ogni obbiezione il *postulato* sarà per me ambito premio vederla accolta nei libri elementari, e colmata così in essi quella lacuna che si è tanto lamentata: se poi per avventura mi fossi ingannato, avrei caro che mi s'indicasse dove i miei ragionamenti sieno in difetto; ma non però rim-

piangerei il tempo speso in tentare di togliere questo piccolo neo da una scienza, la cui principale attrattiva è appunto la evidenza dei raziocini con i quali ogni asserzione viene giustificata.

Comincierò dal richiamare alcune proposizioni dimostrate rigorosamente da Euclade prima della proposizione 29ª dalla quale egli principia a far uso del suo postulato, e ne trarrò alcuni semplici corollari; di quelle poi, lascierò la dimostrazione per amore di brevità, limitandomi a citare il numero della corrispondente proposizione di Euclide.

1. Se due triangoli abbiano due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, ed eguale l'angolo contenuto dai lati eguali, avranno anche la base eguale alla base, ed il triangolo sarà eguale al triangolo, ed i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli ciascuno a ciascuno quelli che sono sottesi da lati eguali. (*Euclide IV*).

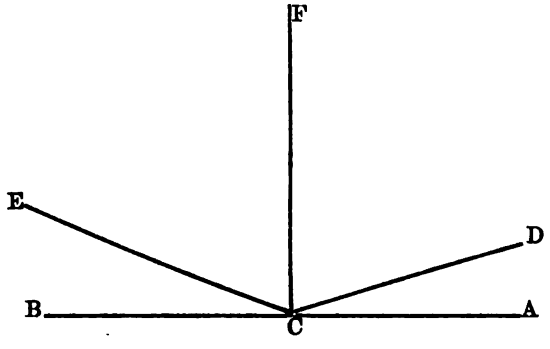
2. Se due triangoli abbiano due lati eguali ciascuno a ciascuno e la base uguale alla base avranno anche eguali gli angoli contenuti dai lati eguali. (*Euclide VIII*).

3. Tirare una linea retta perpendicolare ad una data retta, da un punto dato in essa. (*Euclide XI*).

4. Sopra una data linea retta indefinita, da un punto dato che non sia in essa, tirare una linea retta perpendicolare. *(Euclide XII).*

5. Insistendo una linea retta sopra un' altra forma, due angoli, i quali o sono ambedue retti, o presi insieme valgono due retti. (*Euclide XIII*).

Fig. I.



6. Una retta che ne incontra un altra in un punto non può rimanere tutta ad una stessa banda di essa, ma deve necessariamente tagliarla. (Fig. I.)

Infatti nel punto C della retta data AB insista una retta DC, e, se è possibile, rimanga tutta da una stessa banda di essa prolungandosi in CE. Condotta nel punto C la CF perpendicolare ad AB (3) saranno i due angoli ACF FCB ambedue retti per costruzione. Ma anche i due

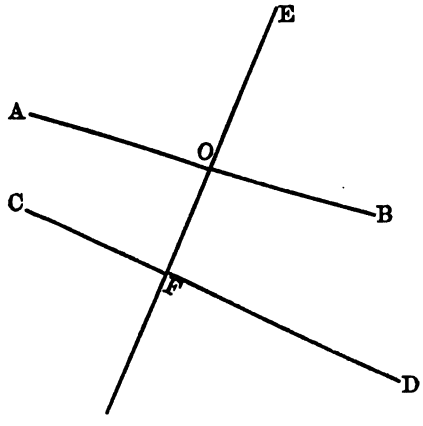
angoli DCF FCE presi insieme valgono due retti (5) dunque saranno i due ACF FCB presi insieme eguali ai due DCF FCE, il tutto eguale alla parte, il che è assurdo. Quindi la DC non può rimaner tutta dalla stessa banda di AB ma deve necessariamente tagliarla, c. d. d. (*a*).

7. Se in uno stesso punto di una data linea retta insistano più altre rette, tutti gli angoli consecutivi formati dalla stessa parte della retta data, presi insieme, equivalgono a due retti.

Di questa proposizione non aggiungo dimostrazione, potendo considerarsi qual semplice corollario della proposizione (5).

8. In qualsivoglia triangolo prolungandosi un lato, l'angolo esteriore è maggiore di ciascuno degli interiori ed opposti. (*Euclide XVI*).

Fig. II.



9. Se per un punto qualunque di una retta che ne incontri un'altra obliquamente si abbassi su questa una perpendicolare (4) il piede di essa incontrerà la retta data dalla parte dell'angolo acuto.

Questa proposizione può considerarsi qual corollario della antecedente (8), perchè se la perpendicolare cadesse dalla banda dell'angolo ottuso, si avrebbe un triangolo nel quale l'angolo esteriore sarebbe minore di uno degli interiori ed opposti.

10. Da un medesimo punto preso fuori di una linea retta, non si può tirare a questa che una sola perpendicolare.

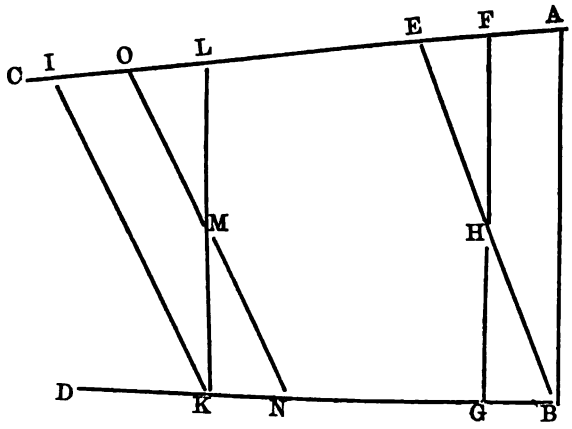
Anche questa proposizione è un semplice corollario della (8) perchè se fosse possibile da un sol punto tirare due perpendicolari ad una data retta, si avrebbe un triangolo nel quale l'angolo esteriore sarebbe eguale ad uno degli interiori ed opposti.

(*a*) Questa proposizione generalmente viene ammessa di fatto, vale a dire che non se ne fa menzione nè come assioma, nè come postulato, nè come teorema. Mi parve però che dovendo necessariamente invocarla fosse conveniente darne una dimostrazione, che gioverà pur essa a togliere un sottinteso dagli elementi di geometria.

11. Se due triangoli abbiano due angoli eguali, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, sia quello compreso fra gli angoli eguali od uno opposto ad uno degli angoli eguali, avranno anche il rimanente angolo eguale al rimanente angolo, ed i rimanenti lati eguali ai rimanenti lati, ciascuno a ciascuno. (*Euclide XXVI*).

12. Quando due linee rette AB CD (fig. II.) siano segate da una linea retta trasversale EF, due angoli l'uno interiore l'altro esteriore i quali volgano nello stesso senso la loro apertura come EOB OFD diconsi *corrispondenti*.

Fig. III.



13. Se sopra una data retta AB (Fig. III) insistano una perpendicolare BD ed una obliqua CA che formi l'angolo interno CAB acuto, nessuna perpendicolare tirata da un punto del lato AC di questo angolo alla BD potrà fare ottuso l'angolo corrispondente a CAB.

Ed in primo luogo: condotta dal punto B una BE perpendicolare alla AC (4) questa dovrà cadere in qualche punto E dalla banda dell'angolo acuto (9); se però da qualsivoglia punto F compreso fra A ed E si abbassi una FG perpendicolare alla DB (3) la stessa FG non potendo incontrare la AB (10) dovrà tagliare in qualche punto H la EB, ed a cagione della perpendicolare HE sarà acuto l'angolo EFG (9). Quindi il proposto teorema sarà vero almeno per un certo tratto della AC, e certamente per tutto l'intervallo compreso fra A ed E.

Poniamo ora che non si verifichi in tutto il rimanente della AC, e che da un certo punto I di essa abbassando una IK perpendicolare sopra BD si abbia *per la prima volta* ottuso l'angolo CIK corrispondente a CAB. *(a)*

(*a*) Poichè il teorema proposto si verifica per un certo tratto della AC, se esso non è intieramente vero dovrà esservi un punto della AC nel quale esso comincia a fallire. Supponendo dunque che sia I questo punto, nessuna altra perpendicolare abbassata da un punto compreso fra I ed A potrà fare ottuso l'angolo corrispondente a CAB.

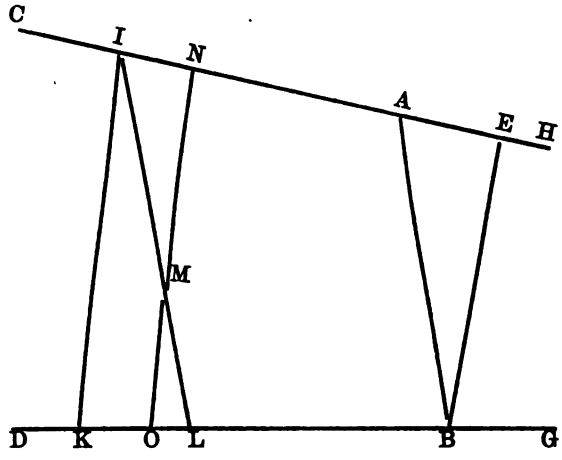
In questo caso dovrà essere acuto l'angolo AIK (5) e però se da K si tiri una perpendicolare alla AC essa cadrà in qualche punto L compreso fra I ed E (9 e 10); e se da un punto M della KL si guida una MN perpendicolare sopra BD essa dovendo tagliare la LK (6) e non potendo tagliare la IK (10) passerà necessariamente per qualche punto O compreso fra I ed L. Ma in tal caso dovendo essere acuto l'angolo AON (9) sarebbe ottuso l'angolo CON, lo che è impossibile essendo IK *la prima* perpendicolare a BD che faccia ottuso l'angolo corrispondente a CAB.

Poichè dunque l'assunta ipotesi involge contradizione, possiamo concludere che:

Nessuna perpendicolare abbassata sulla BD da un qualche punto del lato AC potrà fare ottuso l'angolo corrispondente a CAB c. d. d.

14. Se sopra una data retta AB insistano una perpendicolare BD ed una obliqua CA che faccia l'angolo interno CAB ottuso, nessuna perpendicolare abbassata sopra BD da un punto del lato AC o del suo prolungamento potrà fare acuto l'angolo corrispondente a CAB. (Fig. IV.)

Fig. IV.



Ed in primo luogo: poichè l'angolo CAB è ottuso sarà acuto l'angolo EAB (5) ed una perpendicolare BE abbassata da B sopra CE (4) cadrà dalla parte di questo angolo (9). Inoltre, pel teorema precedente, se da qualsivoglia punto del lato AH si tiri una perpendicolare alla BG non potrà essere ottuso l'angolo corrispondente ad HAB, il che viene a dire che non potrà essere acuto l'angolo corrispondente a CAB. Quindi il proposto teorema è vero almeno per un certo tratto della CH, e certamente per tutto l'indefinito prolungamento di CA verso H.

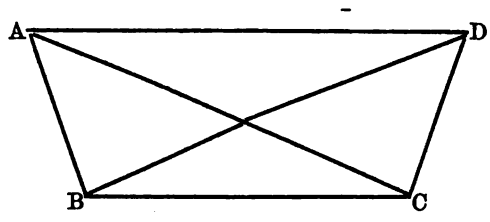
Ora, se è possibile, poniamo che non si verifichi in tutta la CH; in questo caso dovrà esservi un qualche punto I di essa dal quale con-

dotta una IK perpendicolare sulla BD si abbia *per la prima volta* l'angolo CIK corrispondente a CAB acuto.

In questa ipotesi, tirata dal punto I la IL perpendicolare ad AC, la medesima non potendo incontrare la BE (10) e dovendo cadere dalla parte di B perchè l'angolo HIK è maggiore del retto dovrà necessariamente tagliare la DB in qualche punto L compreso fra K e B. Se ora da un punto M di essa si tiri una MO perpendicolare alla BD, essa dovendo tagliare la IL (6) e non potendo tagliare nè la IK nè la AB (10) passerà necessariamente per qualche punto N della AC compreso fra I ed A. Ma allora a cagione della perpendicolare MI dovrà essere acuto l'angolo CNM (9) il che non può essere giacchè abbiamo supposto essere IK *la prima* perpendicolare a BD che facesse acuto l'angolo corrispondente a CAB; quindi la negazione del proposto teorema involgendo contradizione potremo concludere che:

Nessuna perpendicolare abbassata da un punto del lato AC o del suo prolungamento sopra BD può fare acuto l'angolo corrispondente a CAB c. d. d.

Fig. V.



15. Se in un quadrilatero ABCD (Fig. V) siano eguali due lati opposti AB, CD, ed eguali anche due angoli B, C adiacenti ad un terzo lato B, C, le due diagonali di esso saranno eguali, e saranno pure fra loro eguali i rimanenti angoli A e D.

Infatti i due triangoli ABC, DCB avendo il lato AB eguale al lato DC per costruzione, il lato BC comune l'angolo ABC eguale all'angolo DCB per costruzione, avranno ancora la base AC eguale alla base DB c. d. d, ed i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli (1), cosicchè sarà BAC eguale a BDC, e DBC eguale a BCA.

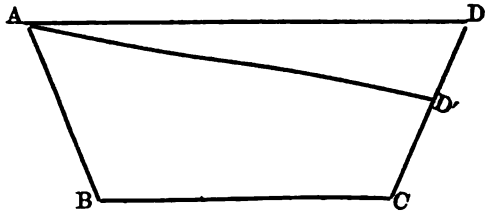
Inoltre: i due triangoli ACD, DBA, avendo i tre lati rispettivamente eguali avranno pure eguali gli angoli compresi dai lati eguali (2) e però sarà l'angolo BAD eguale all'angolo CDA e quindi:

Se in un quadrilatero sieno eguali due lati opposti, ed eguali anche i due angoli adiacenti ad un terzo lato, le due diagonali di esso

saranno fra loro eguali, ed i rimanenti angoli saranno pure fra loro eguali c. d. d.

16. Reciprocamente: se in un quadrilatero siano fra loro eguali i due angoli adiacenti ad un lato, ed uguali ancora fra loro gli altri due angoli adiacenti al lato opposto a questo, gli altri due lati del quadrilatero saranno pure fra loro eguali.

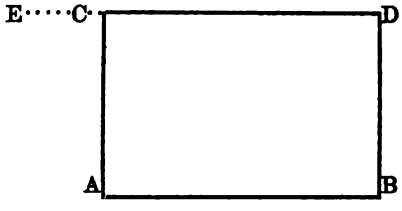
Fig. VI.



Nel quadrilatero ABCD (Fig. VI.) sia l'angolo ABC eguale all'angolo DCB e l'angolo BAD eguale all'angolo ADC dico che il lato AB dovrà essere eguale al lato DC. Infatti se questi due lati non sono eguali, uno di essi, p. es. CD, dovrà essere maggiore dell'altro: presa allora sopra CD una porzione CD' eguale ad AB e congiunto A con D' il quadrilatero ABCD' in forza del teorema precedente dovrà avere l'angolo BAD' eguale all'angolo AD' C; ma quest'angolo come esterno al triangolo ADD' è maggiore dell'interno ed opposto ADC (8) e questo è per ipotesi eguale all'angolo DAB maggiore di BAD' quindi l'angolo maggiore dovrebbe essere eguale al minore il che è assurdo. In conseguenza:

Se un quadrilatero abbia due angoli adiacenti ad un lato fra loro eguali, e pure fra loro eguali i due angoli adiacenti al lato opposto, dovranno gli altri due lati essere fra loro eguali c. d. d.

Fig. VII.



17. Dal precedente teorema emerge come semplice corollario che:

Se in un quadrilatero i quattro angoli siano tutti retti, i lati opposti di esso dovranno essere eguali due a due.

18. Se agli estremi A e B di una data retta terminata si tirino due perpendicolari AC, BD egualmente lunghe, la retta CD che unisce i loro estremi sarà anch' essa perpendicolare alle due AC, BD (Fig. VII). (*a*)

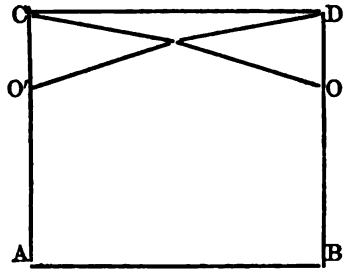
(*a*) Questa verità che a me è costata tanta fatica il dimostrare assumono molti come evidente, e però di leggieri si comprende come ne rimanga abbreviata la via per giungere allo scopo.

Infatti: se l'angolo D fosse acuto, non potendo essere ottuso l'angolo ECA (13) nemmeno potrà essere acuto l'angolo DCA (5): se l'angolo D fosse ottuso non potrebbe esserlo l'angolo DCA perchè non potrebbe essere acuto l'angolo ECA (14); ma i due angoli DCA BDC devono essere eguali (15) quindi non potendo essere nè ambedue acuti nè ambedue ottusi dovranno essere necessariamente retti. Quindi:

Se agli estremi di una retta terminata si tirino due perpendicolari egualmente lunghe, la retta che unisce i loro estremi sarà anche essa perpendicolare alle medesime c. d. d.

19. Se tre angoli di un quadrilatero sono retti, il quarto angolo di esso sarà parimenti retto.

Fig. VIII.



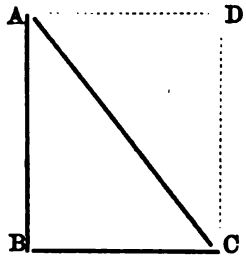
Nel quadrilatero ABCD (Fig. VIII) siano retti gli angoli A, B, D: dico che sarà retto anche il quarto angolo ACD. Infatti se è possibile, non sia retto l'angolo ACD: e siccome se i due lati AC, BD, fossero eguali dovrebbero gli angoli ACD, CDB essere ambedue retti (18) dovrà uno dei lati stessi, p. es. BD, esser maggiore dell'altro. Presa allora sopra BD una porzione BO eguale ad AC e congiunto C con O, nel quadrilatero ACOB dovranno essere retti gli angoli ACO, COB; ma quest' ultimo come esteriore al triangolo CDO è maggiore dell'interiore ed opposto CDO (8) il quale è retto per costruzione, quindi non può essere il lato BD maggiore del lato CA. Ma nemmeno può essere BD mivore di CA, perchè in questo caso presa sopra CA una porzione AO' eguale a BD e congiunto D con O' ne risulterebbe retto l'angolo O'DB, cioè la parte eguale al tutto il che è assurdo, quindi dovranno i due lati AC BD essere eguali e quindi retto anche l'angolo ACD. In conseguenza:

Se tre angoli di un quadrilatero siano retti lo sarà anche il quarto c. d. d.

20. In qualsivoglia triangolo rettangolo la somma dei due angoli obliqui è eguale ad un retto.

Sia infatti il triangolo ABC rettangolo in B (Fig. IX), e condotta dal punto A la AD perpendicolare ad AB (3) e dal punto C la CD perpendicolare ad AD (4) dovrà essere retto l'angolo BCD (19) ed insieme

Fig. IX.



dovrà essere il lato BC eguale ad AD ed il lato AB eguale a DC (17); quindi i due triangoli ABC, ADC avendo i tre lati rispettivamente eguali avranno ancora eguali gli angoli ad essi opposti (2) cioè sarà l'angolo ACB eguale all'angolo CAD; ma questo è complementare dell' angolo CAB, dunque sarà tale anche l'angolo ACB, cioè:

In qualsivoglia triangolo gli angoli obliqui saranno in somma eguali ad un retto c. d. d. (*a*).

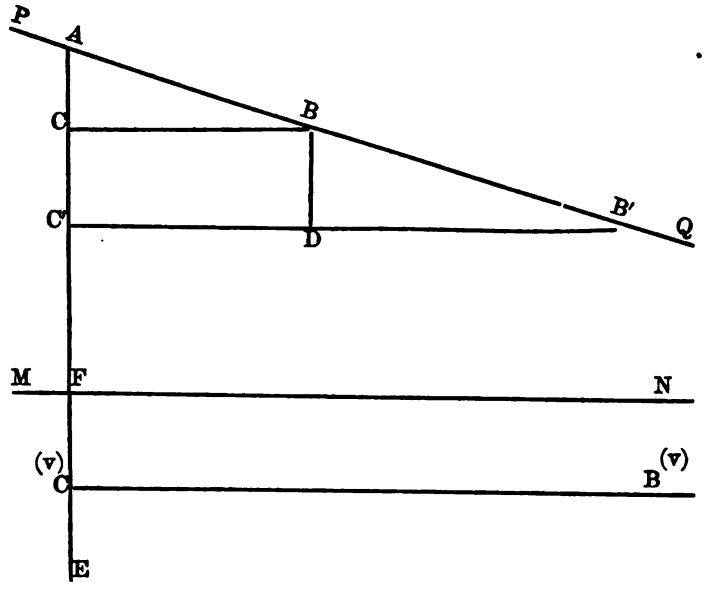
21. Se due linee rette siano incontrate da una terza che sia perpendicolare ad una di esse ed obliqua all'altra, quelle due rette sufficientemente prolungate dovranno incontrarsi.

Sopra le due rette PQ MN (Fig. X) cada la AE facendo gli angoli in F retti ed obliqui quelli in A; e siccome uno di questi deve essere ottuso e l'altro acuto (5) sia l'angolo QAE acuto.

Presa allora sopra AQ una lunghezza ad arbitrio AB, dal punto B si tiri una BC perpendicolare ad AE (4) la quale cadrà in C dalla banda dell'angolo acuto (9); presa poi sulla stessa retta una lunghezza BB' eguale alla lunghezza AB si abbassi sopra la stessa AE un' altra perpendicolare B' C' sulla quale si prenda una parte C' D eguale alla BC e si congiunga B con D: saranno retti gli angoli CBD, BDC' (18) e sarà CC' eguale a BD (17). Ma essendo retto l'angolo CBD i due angoli ABC, DBB' presi insieme dovranno equivalere ad un retto (7) come pure dovranno equivalere ad un retto i due ABC, BAC (20): in conseguenza sarà l'angolo BAC eguale all'angolo DBB'. Similmente BB'D essendo complementare di DBB' dovrà essere eguale ad ABC, e però saranno eguali i due triangoli ABC, BB'D (11) sicchè sarà AC eguale a BD; ma si è già dimostrato essere BD eguale a CC' dunque sarà anche AC eguale a CC', cioè AC' doppia di AC. Al modo stesso potrà dimostrarsi che prendendo sopra AQ una lunghezza tripla, quadrupla, ecc. di AB ed abbassando dal suo estremo una perpendicolare sopra AE verrà su questa tagliato un segmento parimenti triplo, quadruplo ecc. di AC cioè la

(*a*) Da questa proposizione può derivare come semplice corollario il teorema relativo alla somma dei tre angoli interni di qualsivoglia triangolo, e quindi sarebbe raggiunto l'obbiettivo del Legendre e del Gauss. Siccome però tal teorema non è necessario ai seguenti ragionamenti, si è tralasciato di riportarlo.

Fig. X.



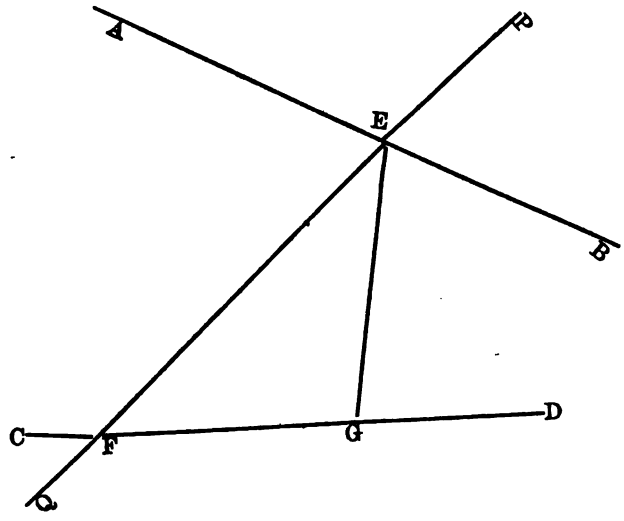
lunghezza presa sopra AQ ed il segmento tagliato dalla perpendicolare sopra AE saranno equi molteplici di AB ed AC. Ora questa lunghezza AC entrerà in AF un numero limitato di volte esattamente o prossimamente, e se supponiamo che vi entri più di quattro volte e meno di cinque, preso sopra AQ un segmento AB(v) quintuplo di AC cadrà in un punto C (v) situato al di sotto di MN: ma in questo caso anche il punto B(v) dovrà trovarsi al disotto di MN poichè se così non fosse la perpendicolare B(v) C(v) dovrebbe tagliare la MN e quindi da uno stesso punto si potrebbe tirare ad una stessa retta due diverse perpendicolari il che è assurdo (10); dunque la PQ sufficientemente prolungata dovrà tagliare la MN, e però:

Se due linee rette siano incontrate da una terza perpendicolare ad una di esse ed obliqua all'altra, quelle due rette sufficientemente prolungate dovranno incontrarsi c. d. d.

22 Se due linee rette sullo stesso piano siano segate da una terza la quale formi con esse angoli interni dalla stessa parte in somma minori di due retti, le medesime sufficientemente prolungate da quella parte dovranno incontrarsi.

Siano le due rette AB CD (Fig. XI) segate dalla terza PQ, e siano gli angoli interni dalla stessa parte BEF, EFD presi insieme minori di due retti; uno almeno di essi dovrà essere acuto, e sia EFD. Tirata allora dal punto E la perpendicolare EG sopra CD (4) il suo piede cadrà in G dalla banda di esso angolo acuto (9); e siccome GFE ed FEG come angoli obliqui di un triangolo rettangolo presi insieme valgono un retto (20) sarà l'angolo BEG minore di un retto, e però la EB e la CD essendo

Fig. XI.



segate dalla EG perpendicolare ad una di esse ed obliqua all' altra, in forza del teorema precedente, prolungate sufficientemente dovranno incontrarsi. Quindi:

Se due linee rette nello stesso piano siano segate da una terza la quale formi con esse angoli interni dalla stessa parte che presi insieme valgano meno di due retti, le medesime sufficientemente prolungate dovranno incontrarsi c. d. d.

Ecco dunque, se io non m' inganno, dimostrato a stretto rigore di logica quel principio che dai più si è ritenuto non potersi dedurre che dalla esperienza. Ecco pure dimostrato il famoso teorema relativo alla somma dei tre angoli di un triangolo rettilineo (20 nota *a*) e però non si potrà più dichiarare che *tutti i tentativi per dimostrare questa proposizione* devono *necessariamente riescire vani*, PERCHÈ IN SÈ È PURE AMMISSIBILE L'IPOTESI CONTRARIA CIOÈ CHE IN UN TRIANGOLO E QUINDI ANCHE NELLE PARALLELE LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI SIA MINORE DI 180° (a). Idea che, se a stretto rigore, poteva porsi innanzi a geometri già maturi, i quali sono perfettamente al caso di distinguere i principii veramente assodati dalle speculazioni che non hanno altro fine che fare sfoggio d'ingegno, non poteva senza rischio insinuarsi a giovani principianti, che facilmente ne sarebbero stati tratti a dubitare anche di quella scienza che pur suole additarsi come fondata sulla evidenza. So che ad onta di questo rischio non mancano istitutori i quali si credono in dovere di turbar la mente dei loro allievi con idee tratte dalla geometria romantica; ma, se io non ho lavorato invano,

(*a*) Baltzer — Elementi di Matematica — Planimetria 7. IV.

questa stessa geometria non avrà più alcuna ragione di esistere a meno che non piaccia ad alcuno di mostrare la sua valentia nel paradosso traendo conseguenze da principii riconosciuti per falsi.

Il desiderio, che nutro vivissimo, di vedere questo mio povero lavoro entrare a far parte dei libri elementari, mi spinse a dare alla mia esposizione tutto l'andamento e fin la frase euclidea; perchè sopra tutto m'interessava accattarmi i voti degli amatori di Euclide, come quelli che più io credo proni a giudicarmi severamente, abituati come sono ad un linguaggio strettamente rigoroso, al tutto opposto a quella indefinita e vaporosa locuzione che sventuratamente or si adotta da tanti altri. Non di meno è facile il vedere come lasciando intatta la sostanza si potrà di leggieri variar la locuzione, per porla in armonia con quella usata da coloro che per amor della scienza, volessero introdurre questo che io credo perfezionamento, nei loro libri di elementi.

E qui porrò fine al mio discorso scusandomi, se troppo a lungo il protrassi, con la brama che mi accende di togliere allo scetticismo il vanto di essersi insinuato financo nella scienza che per antonomasia chiamasi *esatta*.

SOPRA UN APPARECCHIO PER ELEVARE ACQUA NELLE ABITAZIONI

NOTA

DEL PROF. ING. FILIPPO GUIDI

Le macchine generalmente usate per elevare acqua nelle abitazioni, traendo partito delle piccole forze motrici idrauliche, sono gli arieti, o le trombe poste in movimento da piccole ruote a cassette.

L'ariete idraulico sarebbe invero un ottimo elevatore di liquidi, poichè, studiandone bene le dimensioni, è facile ottenerne un rendimento del 60 per cento: ma presenta un inconveniente gravissimo, cioè un romore insopportabile specialmente nella quiete notturna. Tal romore non è comunicato alle mura del fabbricato dall'apparecchio che contiene le valvole, altrimenti sarebbe facile interporre materie non conducenti le vibrazioni, ma bensì è trasmesso dai tubi contenenti la colonna d'acqua discendente, e l'altra ascendente. In un ariete da me collocato tentai

d'isolare le condotture contornandole di materie elastiche, ma allora si generavano vibrazioni secondarie, che assorbivano forza viva, e sturbavano la normalità delle vibrazioni assolutamente necessaria per l'andamento dell'ariete, e quindi si arrestava più volte nella giornata. Gli arieti adunque possono essere adottati per usi agricoli, o negli stabilimenti manufatturieri, ma nelle abitazioni si ritengono generalmente intollerabili.

Il sistema delle trombe mosse da ruote produce anch' esso qualche romore, ma questo è molto meno fastidioso di quello dell'ariete, ed è quasi intieramente evitabile col mantenere in buono stato, e lubrificate le varie membrature trasmittenti il movimento.

Gravi inconvenienti di questo sistema sono 1° il pochissimo rindimento, poichè ordinariamente se ne ottiene il 25 per cento: 2° lo spazio ben grande occupato: 3° il capitale d'impianto assai forte se vogliasi un meccanismo ben fatto e duraturo.

Pertanto nella occasione di dover porre in opera un elevatore qualunque di acqua, mi venne in mente di tentare l'impiego dell'antico apparecchio, inventato dal discepolo del celebratissimo Ctebisio, voglio dire della fontana d'Erone.

Era necessario peraltro ottenere che vuotato il recipiente superiore ed empito quello inferiore, si rinnovasse automaticamente la carica, ossia si ponesse l'apparecchio in istato da poter agire nuovamente.

Ad ottenere tale scopo la idea che spontanea si presenta, è quella d'introdurre nei due recipienti un galleggiante a mezzo del quale si ottenga l'apertura e la chiusura delle valvole necessarie perchè ne risulti il vuotamento del recipiente inferiore ed il riempimento di quello superiore, ogni volta che l'apparecchio abbia terminato di agire. Ma è facile persuadersi che un giuoco di galleggianti entro vasi ermeticamente chiusi sarebbe ammissibile in qualche raro caso di elevazione di grandi volumi e quindi con grandi recipienti; e pel contrario nei casi comuni di usi domestici pei quali è sufficiente spesso un solo metro cubo d'acqua elevato nelle 24 ore, i recipienti che costituirebbero l'apparecchio sarebbero talmente piccoli, da non ammettere davvero nel loro interno un giuoco di galleggianti, che risulterebbe estremamente delicato, e quindi facilmente alterabile.

Mi venne adunque l'idea del sistema, che ora descriverò, il quale sciolse ogni difficoltà, ed in fatto ha dato ottimo risultato.

Nella fontana d'Erone rappresentata dalla tavola qui unita si osservi il recipiente inferiore C, che in luogo d'esser fisso, è invece ruotante sopra un asse T, il quale è vuoto, e serve di tubo per l'introduzione dell'acqua. Si supponga riempito il recipiente C, e per conseguenza cessato l'effetto della fontana d'Erone, il recipiente stesso peserà più che

il contrapeso E, quindi cadrà ruotando per 90 gradi incirca, e prenderà la posizione indicata nella figura con punteggiatura, appoggiandosi sul pulvinare elastico O. Ad un capo del tubo T avvi un rubinetto il quale per effetto della rotazione avvenuta, intercetta la comunicazione del recipiente C con la colonna di azione H, ed invece ne fa succedere il vuotamento per mezzo del tubo S. Il contrapeso E salito in alto ha perduto la maggior parte del suo braccio di leva, e quindi non può risollevare il recipiente, se non allorquando siasi interamente vuotato.

Il recipiente superiore D pel giuoco della fontana d'Erone era completamente vuoto allorchè cadde e cominciò a vuotarsi il recipiente inferiore C; ma appena ciò accaduto, e quindi cessata la compressione dell'aria entro il recipiente D, la colonna ascendente L che conduceva l'acqua nel bacino superiore B, retrocede chiude la valvoletta *n*, e l'acqua del bacino A apre la valvoletta *m* ed empie nuovamente il recipiente D, il quale in tal guisa trovasi pronto alla nuova azione dell'intiero apparecchio: azione che comincia appena il contrapeso E avrà riportato in alto il recipiente C.

Ecco spiegata la disposizione abbastanza semplice di questo nuovo apparecchio elevatore: aggiungo due parole sopra alcuni accessorii.

Al tubo T è unita una appendice *t* perchè caduto il recipiente C, l'uscita dell'acqua si faccia dalla parte più bassa della cavità, e quindi si vuoti completamente lo stesso recipiente.

Se durante la compressione dell'aria, ne avvenisse qualche fuga benchè minima, si avrebbe un inconveniente non lieve, poichè nel vuotamento del recipiente C, dovendo tornare la pressione interna uguale a quella atmosferica, e l'aria non potendo tornare al primitivo volume, sarebbe impedito il vuotamento completo, in guisa che il recipiente C non potrebbe risalire. Ad ovviare tale inconveniente si è posta una piccolissima valvola F che per mezzo di una leva e del peso *p* è tenuta chiusa allorchè il recipiente C è in alto, e si apre allorchè cade lo stesso recipiente, perchè il peso *p* va ad appoggiarsi sul piano inclinato P.

Le perdite di forza viva che verificansi in questo apparecchio sono dovute: 1° al movimento dell'acqua e dell'aria nei tubi; 2° alla altezza necessaria per la caduta del recipiente C; 3° alla compressione dell'aria perchè possa servire d'intermediario fra la colonna H discendente e la colonna L ascendente. Le perdite pel moto nei tubi e per la caduta del recipiente C sono di minimo valore, tanto che riunite possono ritenersi fra il 2 ed il 3 per cento della forza totale. Non è così della forza perduta a comprimere l'aria: dico perduta, perchè non se ne può trarre alcun partito, salvo qualche raro caso di elevazione d'acqua che si volesse fare con questo sistema, in condizioni tali, che, sia pel volume considerevole, sia per la ingente altezza della colonna H, la quantità d'aria

compressa rappresentasse una forza viva assai grande: in tal caso tornerebbe conto immetterla in un serbatojo, dopo che avesse servito da intermediario per la elevazione dell'acqua, e quindi utilizzarla in parte come forza motrice: cosa che si otterrebbe assai facilmente mediante una valvola regolata dalla caduta del recipiente C.

Ma nei casi ordinarii pei quali verrà adottato questo apparecchio si dovrà naturalmente perdere la forza viva impiegata per comprimere l'aria. Dovendosi innalzare in ogni carica dell'apparecchio, un volume v di acqua dal superiore recipiente D, altro pari volume va impiegato con la discesa nel recipiente C, e se la colonna premente dal bacino A al recipiente C equivale ad un numero n di atmosfere, il volume di aria compressa che caccia dal recipiente D il volume d'acqua v dovrà essere alla pressione ordinaria, ossia prima della compressione uguale a $v\ (n + 1)$: e così l'acqua necessaria per il vuotamento completo del recipiente D sarà uguale a $v + v\ (n + 1 - 1) = v\ (n + 1)$. Adunque per l'elevazione all'altezza di 10 metri questo apparecchio perde il 50 per cento, e tenuto conto di qualche piccolo spazio nocivo, e delle piccole resistenze dianzi, può ritenersi che il rendimento sarà del 45 per cento. Per l'elevazione a 20 metri la perdita per compressione dell'aria sarà del 66 per cento, e quindi il rendimento risulterà del 28 per cento.

Queste cifre risulterebbero dalla legge di Mariotte; ma è da considerare che se i recipienti C e D ed il condotto I fossero coperti di materia non conducente calore l'innalzamento di temperatura prodotto nell'aria dalla compressione non sarebbe perduto che poco, poichè l'acqua dovrebbe scaldarsi dal disopra all'ingiù in ambedue i recipienti, ed in tal caso neppure essa sarebbe conducente del calore. Quindi aumentato per tale ragione l'elatere dell'aria, per ottenere una data compressione equivalente ad n atmosfere non sarebbe più necessario un volume d'acqua pari ad nv; ma un volume sensibilmente inferiore. Senza ingolfarsi nella soluzione di un problema di termo-dinamica, pel quale poi non avremmo elementi certi, mi limiterò a portare un esempio.

Se la compressione dell'aria fosse operata da una colonna H equivalente a 2 atmosfere, il volume dell'aria in azione nel nostro apparecchio da $3v$ dovrebbe ridursi a v per la legge di Mariotte, ossia quando fosse disperso il calore prodotto dalla compressione; ma invece, se fosse evitata ogni dispersione di calore, il rapporto del volume primitivo al volume ridotto sarebbe $v = 2,\ 18\ v'$. Si ammetta pure qualche dispersione di calore in guisa che il rapporto divenga $v = 2.\ 50\ v'$, avrassi in ogni modo un bel risparmio di forza viva, perchè per elevare un volume v abbiamo veduto necessario l'impiego di acqua per un volume $3v$, ed invece se ne impiegherà $2,50v$.

Ed ecco che i rendimenti accennati dianzi sarebbero sensibilmente aumentati; e difatti per l'elevazione a metri 10 si avrà il rendimento 61 incirca, per l'elevazione a metri 20 il 44.

Riassumendo quanto si è detto riguardo a questo nuovo apparecchio elevatore, il quale del resto fu già eseguito dal giovine, ma bravo e colto meccanico Giuseppe Genovesi, e diè risultati in perfetta corrispondenza con le previsioni teoriche sovra esposte, potransi enumerare senza dubbio i seguenti vantaggi.

1°. Rendimento superiore a quello che si ottiene con le trombe mosse dalle ruote a cassette in uso nelle abitazioni.

2°. Spesa d'impianto uguale ad un quinto di quella che occorre con le ruote.

3°. Niun romore che arrechi fastidio nelle abitazioni.

4°. Meccanismo semplicissimo, il cardine del quale consiste in un rubinetto esterno che introduce l'acqua nel recipiente inferiore, o ne la estrae, a seconda della posizione del recipiente stesso. E giova osservare che questo rubinetto nulla ha che fare col giuoco dell'aria; dimodochè se per logoro avesse qualche guasto, si andrebbe incontro soltanto a qualche perdita di acqua, ma l'apparecchio seguiterebbe sempre a funzionare con tutta regolarità.

5°. Mentre con le ruote è impossibile trar profitto da quantità assai piccole d'acqua, con questo apparecchio possono essere utilizzate anche le minime. Ad una famiglia farà comodo avere un serbatojo con un decimo di metro cubo ogni 24 ore; con l'elevazione di 10 metri occorrerà una caduta parimenti di 10 metri, ed una portata di un quinto di metro cubo appena in 24 ore, cioè occorrerà un centesimo di oncia romana (misura piccola).

6°. L'acqua saliente non ha comunicazione con quella discendente, e quindi può essere impiegata un'acqua non potabile, per elevarne altra potabile, cosa che può aversi col sistema delle trombe e con ruote, ma che non è ottenibile dagli arieti.

QUADRO GENERALE STATISTICO

TIPOGRAFICO GIORNALIERO

DEI TERREMOTI AVVENUTI IN ITALIA

NELL' ANNO METEORICO 1877

COL CONFRONTO DI ALCUNI ALTRI FENOMENI

COMPILATO

DA M. S. DE ROSSI (1)

Il quadro grafico che presento, essendo già del quinto anno, non ha bisogno di dichiarazione veruna per ciò che riguarda il sistema convenzionale e le norme seguite nel comporlo. Chi cercasse schiarimenti su ciò, li troverá facilmente nei quattro volumi precedenti di questi nostri Atti accademici.

Per ciò poi che riguarda l'andamento sismico italiano quivi rappresentato, esso trovasi più o meno conforme a ciò che si è verificato anche nei decorsi anni. Perciò l'odierna mia comunicazione consiste tutta nella presentazione del quadro grafico compilato sulle notizie da me raccolte dei fenomeni endogeni italiani del 1877. Non occorre ripetere le osservazioni già fatte, nè è tempo ancora di analizzare quistioni più difficili per le quali è necessario l'accumulare un più grande numero di anni di osservazione e di quadri sinottici simili a questi pubblicati, che riuscirono tanto utili, per porre facilmente sott' occhio il vario manifestarsi della attività endogena nel tempo e nello spazio, ossia, nella topografia e nelle date massime dei terremoti.

Fra i fenomeni messi a confronto in quest' anno comparisce per la prima volta la curva puteale di Livorno favoritami dal Ch. Prof. P. Monte. Mi lusingo nel venturo anno arrecarne delle altre. Intanto si osservi in questa del Monte la molta coincidenza nelle variazioni con quella di Porretta differendone però moltissimo la intensità relativa delle va-

---

(1) La tavola annessa a questo articolo trovasi far parte delle tavole litografiche dell'anno XXXV (1881) Sess. VI. Di questo fascicolo dopo la prima distribuzione furono smarriti i pacchi di deposito e poichè nella sessione VI anno XXXV l'Autore trattava ampiamente l'argomento dell'analisi dei periodi sismici del 1877 fu giudicato riprodurre il quadro congiuntamente a quella nuova memoria.

riazioni medesime: cosicchè la curva di Livorno mostra poi nell'insieme una regolarità d'andamento dal massimo al minimo, che è mirabile. Questa coincide anche col dovuto ritardo colla massima e minima piena della montagna; sicchè sembra additare, ciò che parmi naturale, il livellarsi cioè ed uguagliarsi maggiormente verso il piano la somma delle acque diverse fluenti dalla montagna, mentre quivi esse trovandosi più divise nei singoli bacini manifestano più sensibilmente le variazioni speciali che subiscono.

COMUNICAZIONI

Il Prof. Tito Armellini comunicò alcuni esperimenti sulla ineguale distribuzione nello spazio della luce elettrica, la cui ragione indicò riposta nella differenza di intensitá luminosa dei carboni: che per conseguenza richiede una modificazione nella direzione dei medesimi, dando il merito di queste osservazioni al Sig. Carlo Tenerani.

Il Dott. Matteo Lanzi presentò una memoria con tavole — *Sui Funghi della Provincia di Roma* — da stamparsi negli atti, la quale però viene trasferita al principio del seguente volume.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Relazione dell'ordine di anzianità stabilito dal Comitato per i nuovi tre soci ordinari, cioè:

1. Prof. Francesco Ladelci.
2. P. Felice Ciampi
3. Dott. Matteo Lanzi.

2. Dopo diligenti indagini essendo riuscito impossibile rinvenire in Roma il nuovo socio aggiunto Sig. Francesco de Curten, fu stabilito non esser in tal caso ritirata la nomina fatta; ma neppure doversi inviare il diploma fuori di Roma; atteso che la classe degli aggiunti, secondo lo spirito dello Statuto, deve essere formata essenzialmente da soci residenti. Quindi quante volte il De Curten ritornasse in Roma, con ciò stesso entrerebbe in diritto di ricevere la sua nomina di socio aggiunto.

3. Lettera di ringraziamento del Sig. Prof. N. Breithof per essere stato eletto socio corrispondente dell'Accademia.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia si riunì in Comitato segreto per passare ai voti il candidato per la classe dei soci aggiunti proposto dal Comitato, D. Ugo Boncompagni Marchese di Vignola. Essendo dodici i votanti, questi venne eletto ad unanimità.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari. — Comm. A. Cialdi, Presidente — Contessa E Fiorini Mazzanti — Comm. C. Descemet — Prof. M. Azzarelli — Prof. V. de' Rossi Re — Cav. F. Guidi — Dott. M. Lanzi — P. S. Ferrari — P. F. Ciampi — Prof. Tito Armellini — P. G. Lais. — Prof. M. S. de' Rossi, Segretario.

Onorari. — Prof. Francesco Massi — Avv. C. Palomba — D. S. Vespasiani.

Aggiunti. — Prof. Odoardo Persiani — Prof. Eugenio Persiani.

La sessione aperta legalmente alle 5 3/4, fu chiusa alle 8 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicati dagli Accademici Segretari delle due Classi.* — Stamperia Reale di Torino di G Paravia e C. In 8°.
2. BETOCCHI (Alessandro). — *Del Fiume Tevere,* (Estratto dalla *Monografia archeologica e statistica di Roma e Campagna Romana,* presentata dal Governo italiano alla Esposizione Universale di Parigi del 1878). Roma Tipografia Elzeviriana, ecc., 1877. In 8°.
3. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche pubblicato da B. Boncompagni, ecc.* — Tomo XI. — 8 Maggio 1878. — Roma, ecc., 1878.
4. *Bullettino Meteorologico dell'Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri, ecc.* Vol. XII — 31 Luglio, 31 Agosto, Num. 7—8.
5. BREITHOF (N.) — *Cours de Géométrie Descriptive, ecc.* — Louvain, ecc. 1878. in-4°.
6. LANZI (Matteo). — *Il Fungo della Ferula descritto dal Dott. Matteo Lanzi, ecc.* Roma, Tipografia Romana di C. Bartoli, 1873. In-4°.

7. — — *Alcune Diatomacee raccolte in Fiesole. Nota del Dott. Matteo Lanzi.*

8. — — *I batteri parassiti di Funghi. Osservazioni del Dott. Matteo Lanzi.*

9. — — *Diatomee raccolta in Ostia.*

10. — — *Sulla origine e natura dei Batteri, ecc. del Dott. Matteo Lanzi,* Roma. coi tipi della Tipografia Romana, 1874. In-8°.

11. — — *Le Diatomacee raccolte dalla spedizione della Società Geografica italiana, in Tunisia osservate dal Dott., Matteo Lanzi,* Estratto dal *Bollettino della Società Geografica Italiana,* Fasc. 1°. — Roma, Stabilimento G. Civelli, ecc., 1875. In-8°.

12. — — *Il Polviscolo Aereo, osservazioni del Dott. Matteo Lanzi, ecc.,* Roma, Tipografia Romana, di C. Bartoli, ecc., 1871. In-8°.

13. — — *Esperienze terapeutiche fatte col Silphium Cyrenaicum, nelle malattie croniche di petto per il Dott. M. Lanzi,* Estratto dagli *Atti dell'Accademia Medica di Roma,* Anno III, Fascicolo I, In 8°.

14. — — *La Malaria ed il Clima di Roma, osservazioni ed espe ienze dei dottori Matteo Lanzi e Guglielmo Terrigi.* — Roma, coi tipi della Tipografia Romana, ecc., 1877. In-8°.

15. — — *Ispezione sanitaria dei Funghi, ecc., Relazione II, del Dott. Matteo Lanzi.* Roma Tipografia Menicanti, 1870.

16. NARDO (Giandomenico) — *Bibliografia Cronologica della Fauna delle Provincie Venete e del Mare Adriatico del Dott. Giandomenico Nardo, ecc. (inserita negli Atti del R. Istituto stesso, Ser. V, Tom. I, II e III).* — Venezia, Tipografia di G. Antonelli, 1878. In 8°.

17. — — *Sopra una pietra di origine e di provenienza incerte Aporemite. Nota del Dott. Giandomenico Nardo, ecc. (Estratto dagli Atti del R. Isti uto stesso, Ser. V, Tom. III).* Venezia, Tipografia di G. Antonelli, 1877. In-8°.

18. — — *Sui vantaggi che possono aversi dal mettere a profitto le sabbie incolte del Litorale e le Maremme dell'estuario Veneto, Memoria del Dott. Giandomenico Nardo, ecc., (Estratto dalla Rivista Veneta, vol. IV, n. 6.) Venezia, Tipografia del Giornale « Il Tempo »* 1874 In-8°.

19. — — *Sulle materie organiche di origine Marina che servono o che potrebbero servire alla combinazione de' nost i terreni agricoli del Dott. Giandomenico Nardo, ecc.* Venezia, Tipografia Naratovich, 1875. In-8°.

20. — — *Cenni storici critici sui lavori pubblicati specialmente nel nostro secolo, ecc. del Dott. Giandomenico Nardo,* Venezia, Tipografia Grimaldo, 1875. In-8°.

21. — — *Annotazioni illustranti cinquantaquattro specie di c ostacei, ecc. del Dott. Giovanni Nardo, ecc.,* Venezia, ecc. 1869. In 4°.

22. — — *La pesca del pesce ne' Valli della Veneta Laguna, ecc, Monologo Didalisco in versi nel dialetto de'pescatori chioggiotti, del Dott. Giandomenico Nardo, ecc,* Venezia, ecc. 1871. In-8°.

23. — — *Note illustranti il sottosuolo di Venezia, ecc. del Dott. G. D. Nardo, ecc.,* Estratto dalla *Raccolta Veneta, (ser. I, t. I, disp. 3).* In 8°.

24. — — *Se sempre abbia parte il ferro nella consolidazione e durata dei cementi idraulici? Nota del Dott. G. Nardo,* In-8°.

25. PIRONA (Giulio Andrea). — *Della vita e degli studii di Giandomenico Nardo, commemorazione del Prof. Giulio-Andrea Pirona, ecc.* Venezia Tipografia di G. Antonelli, 1878. In 8°.

26. RAMIÈRE (P. Enrico). — *La Filosofia di S. Tommaso, ecc., opera del P. Enrico Ramière, ecc.,* Roma, Tipografia Poligotta; 1878. — In-8°.

27 *Rapport fait par M. De Fréminville, au nom du Comité des Arts Mécaniques, sur un Mémoire de M. Bertin, ecc.,* Paris, ecc. In-8°.

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XXXI.
(1877-1878)

MEMORIE E NOTE

Pagine

Sulla necessità di stabilire i confini che separano la chimica dalle scienze affini. Nota del Dott, *Domenico Colapietro* 1
Esercizio Geometrico, del Prof. *Mattia Azzarelli* 6
Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances. Par le *Père Pepin, S. J.* 40
Florula del Colosseo, della Sig. Contessa *Elisabetta Fiorini Mazzanti* 155
Sopra la relazione fra i massimi e minimi delle macchie solari e le straordinarie perturbazioni magnetiche, del *P. G. Stanislao Ferrari* 168
Nuovo genere e specie di diatomea. Nota del Conte Abate *Francesco Castracane.* . 179
Fulmine a ciel sereno caduto in S. Stefanetto presso Alba nell'estate del 1877. Nota del Prof. *Michele Stefano De Rossi* 188
Riassunto delle osservazioni microsismiche fatte nel collegio alle Querce di Firenze, e delle principali riflessioni teorico-sperimentali dedotte dalle medesime, del *P. Timoteo Bertelli* 193
Invarianti, covarianti e controvarianti delle funzioni omogenee. Nota del *P. Giacomo Foglini* 249
Sul vero ufficio che prestano le appendici del cuore denominate orecchiette, e sulla perfezione dell'organo aspirante e premente, prodotta dalle stesse appendici. Memoria dell'Ingegnere *Filippo Guidi* 317
Una nuova varietà di Melosira Borrerii Grev. Nota del Conte Ab. *Francesco Castracane.* 321
Equazione della linea Geodesica con qualche applicazione. Nota di *Mattia Azzarelli* . 327
Sulla sorgente dell'acqua Antilitiaca di Anticoli — (Campagna) denominata di Fiuggi. Nota del Prof. *Augusto Statuti* 342
Risoluzioni delle equazioni di 3°. grado. Nota di *Mattia Azzarelli*. 355
Doti e conseguenze acustiche del telefono. Memoria di *Tito Armellini* 367
Sulla struttura molecolare della chinina e di altri alcaloidi naturali. Nota dei *P. F. S. Provenzali* d. C. d. G. 374
Sul risparmio di forza viva in una nuova tromba. Nota del Prof. *Filippo Guidi.* . 377
Sopra la relazione fra i massimi e minimi delle macchie solari e le straordinarie perturbazioni magnetiche. Nota del *P. G. Stanislao Ferrari*. 383
Sur quelques équations biquadratiques et indéterminées, par le P. *Pepin Th.le* . . 397
Intorno alla natura dell'azione chimica. Memoria del *P. F. S. Provenzali* d. C. d. G. 428
Se e qual valore sia da attribuire nella determinazione della specie al numero delle strie nelle diatomee. Nota del Conte Ab. *Francesco Castracane.* 442
Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Nota del Prof. *Vincenzo De Rossi Re.* 461
Sopra un apparecchio per elevare acqua nelle abitazioni. Nota del Prof. Ing. *Filippo Guidi.* 474
Quadro generale statistico topografico giornaliero dei terremoti avvenuti in Italia nell'anno meteorico 1877 col confronto di alcuni altri fenomeni compliato da *M. S. De Rossi* 479

COMUNICAZIONI

Il telefono, del Prof. Tito Armellini 149
Presentazione di tre lavori, del Comm. A. Cialdi, e di tre memorie del Sig, Comm. Bertin. 150
Presentazione di una memoria del P. Pepin, da D. B. Boncompagni 150
Primo annunzio della morte del P. A. Secchi, del P. Stanislao Ferrari. . . . 246

Presentazione di rivista dell'opera del P. Angelo Secchi « *Le stelle* » del Prof. Tito Armellini . . . . . Pag. 247
Presentazione di un'opera del P. Provenzali ed esperienze sul telefono, del Prot. Tito Armellini 350
Presentazione di un opuscolo del P. Serpieri e di una poesia del Prof. D. I. Galli . 350
Presentazione di un' opera, del P. F. S. Provenzali 381
Presentazione di un giornale, del Prof. M. S. De Rossi 381
Presentazione di un recente lavoro del Prof. M. S. De Rossi. 459
Presentazione di un opuscolo relativo ai titoli scientifici del Sig. Comm. Cialdi . . 459
Comunicazione di alcuni esperimenti sulla ineguale distribuzione nello spazio della luce elettrica, del Prof. Tito Armellini. 480
Presentazione di una memoria del Dott. Matteo Lanzi 480

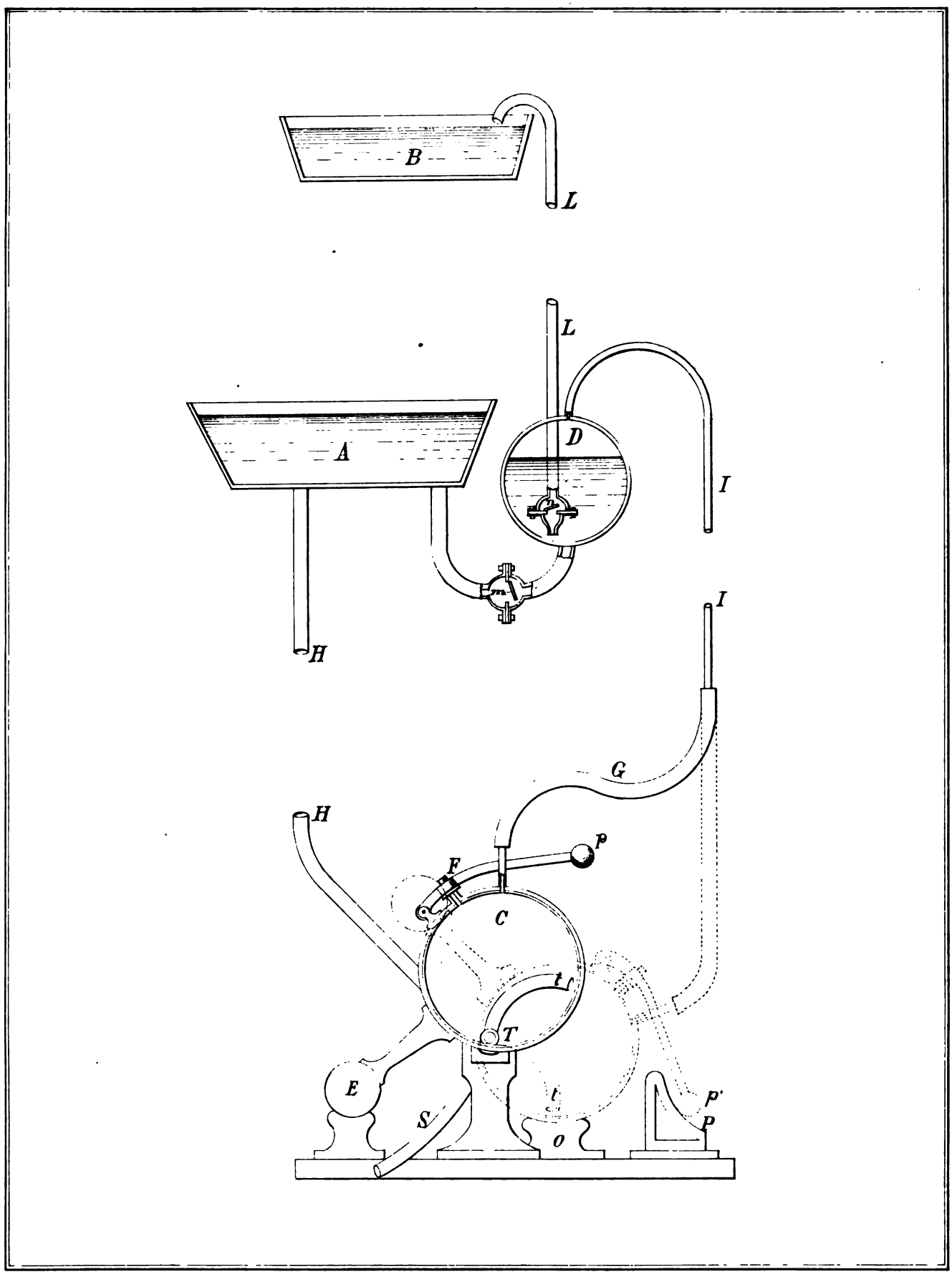
COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Annunzio della morte dell'Emo Card. De Angelis 150
Lettera dell'Emo Card. Pecci 150
Relazione dell'Udienza accordata all'Accademia da S. S. 150
Richiesta di una serie degli Atti. 151
Lettera del Sig. Cav. C. Desimoni 151
Ricevuta di Atti Accademici. 151
Lettera del Direttore dell'Osservatorio di Leiden 151
Lettera del Bibliotecario dell'Accademia di Stuttgart. 151
Forma privata dell'odierna adunanza a cagione del lutto cattolico per la morte di Papa Pio IX; e grave stato d'infermità del P. Angelo Secchi 242
Medaglia donata da S. S. agli scrittori accademici del volume « *Triplice omaggio* », ecc. 242
Astensione dalle comunicazioni scientifiche. 242
Udienza all'Accademia accordata da S. S. 246
Funerale e monumento al P. A. Secchi 246
Apertura della sessione fatta dall'Emo Card. Camerlengo 350
Approvazione sovrana alle nomine del Presidente, di due membri del Comitato, dei censori, del Tesoriere, e di un socio corrispondente 350
Discorso del nuovo Presidente 350
Programma per l'erezione di un monumento al P. Secchi 352
Decisioni relative alle due classi dei soci onorari ed aggiunti e proposta di nuovi soci ordinari 354
Approvazione Sovrana di tre nuovi soci ordinari 459
Lettera del P. F. Denza, con suo opuscolo 459
Udienza accordata da S. S. per la presentazione del vol. XXX degli Atti . . . 459
Ordine d'anzianità dei tre nuovi soci ordinari 480
Decisione intorno ad un socio aggiunto 480
Lettera del Sig. Prof. N. Breithof. 480

COMITATO SEGRETO

Elezione di un socio corrispondente straniero 242
Elezione del Presidente. 247
Elezione dei membri del Comitato Accademico 248
Elezione dei censori 148
Elezione di nuovi soci ordinari, onorari ed aggiunti. 381
Elezione di nuovi soci aggiunti 459
Elezione di un socio aggiunto 480

Soci presenti alle sessioni 151, 242, 248, 354, 382, 460, 481
Opere venute in dono 151, 243, 248, 354, 382, 460, 481


B
L
L
A
D
I
H
I
G
H
p
F
C
t
T
E
S
t
o
p'
p

62.7
1

3 2044 092 632 371